اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول

✍ عين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير :

❶ مجموعة حلول المتراجحة : $ln(x+1)+ln(3-x) \leqslant ln(2x+1)+ln3$ في $\mathbb{R}$ هي :

أ $S=[0,3]$ ب $S=[0,3[$ ج $S=[0,ln3[$

❷ g دالة معرفة على $]-\infty,0]$ بـ : $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-3}$ ، (C_g) تمثيلها البياني يقبل مستقيما مقاربا معادلته :

أ $y=0$ ب $y=-1$ ج $y=1$

❸ حل المعادلة التفاضلية : $y-y'=1$ و الذي يحقق $y(0)=e$ هو الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

أ $h(x)=e^{x+1}+1$ ب $h(x)=e^{x+1}-e^x+1$ ج $h(x)=e^{x+1}$

❹ مجموعة حلول المعادلة : $2e^x-3e^{-x}-1=0$ في $\mathbb{R}$ هي :

أ $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ ب $S=\varnothing$ ج $S=\left\{ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right\}$

❺ $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{e^x-e^2}{x^2+x-6}\right)$ تســــاوي :

أ $\dfrac{e^2}{5}$ ب e^2 ج 0

التمرين الثاني

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x^2e^{-x+2}-4$

❶ ادرس تغيرات الدالة g.

❷ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 2 و الآخر α حيث $-0.6<\alpha<-0.5$.

❸ استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\left(-x^3+2x^2\right)e^{-x+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا و احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

❷ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=x\left(x^2-5x+4\right)e^{-x+1}$

❸ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❹ اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2.

❺ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)+\dfrac{4}{e}(x-2)=\dfrac{1}{e}(2-x)\times g(x)$

◄ حدد الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) و المماس (T).

❻ ارسم (T) و (C_f) ، يعطى $f(\alpha)\approx 3.76$.

❼ عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة : $me^x=e(-x^3+2x^2)$ ثلاث حلول متمايزة.

❽ لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=\left(-|x^3|+2x^2\right)e^{-|x|+1}$

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

◄ بين أن h دالة زوجية.

◄ بين كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسم (C_h).

إجابة مختصرة

التمرين الأول

❶ الجواب (ب) التبرير : لدينا $x+1>0$ و $3-x>0$ و $2x+1>0$ ومنه مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D=\left]-\frac{1}{2},3\right[$

نحل المتراجحة: $ln(x+1)+ln(3-x)\leqslant ln(2x+1)+ln3$ يكافئ $ln\left[(x+1)(3-x)\right]\leqslant ln\left[3(2x+1)\right]$

يكافئ $-x^2-4x\leqslant 0$ نحل المعادلة $-x^2-4x=0$ نجد $x=0$ أو $x=-4$ (مرفوض لاينتمي الى مجال التعريف)

x	$-\frac{1}{2}$	0	3
$-x^2-4x$	$+$	0	$-$

ومنه $S=[0,3[$.

❷ الجواب (ب) التبرير : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}}{x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)}}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}=\frac{-1}{1}=-1$

❸ الجواب (ب) التبرير : حل المعادلة التفاضلية هو من الشكل : $y=Ce^x+1$ حيث $C\in\mathbb{R}$ و لدينا $h(0)=e$

و بالتالي : $Ce^{(0)}+1=e$ أي $\boxed{C=e-1}$ اذن : $h(x)=(e-1)e^x+1=e.e^x-e^x+1$ أي $h(x)=e^{x+1}-e^x+1$

❹ الجواب (ج) التبرير : $2e^x-3e^{-x}-1=0$ تكافئ $e^x\left(2e^x-3e^{-x}-1\right)=0$ تكافئ $2e^{2x}-e^x-3=0$ نضع $t=e^x$

أي $2t^2-t-3=0$ نحل المعادلة نجد : $t=e^x=-1$ (لا تقبل حل) أو $t=e^x=\frac{3}{2}$ أي $x=ln\left(\frac{3}{2}\right)$ اذن : $S=\left\{ln\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$

❺ الجواب (أ) التبرير : $\lim\limits_{x\to2}\frac{e^x-e^2}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to2}\frac{e^x-e^2}{(x-2)(x+3)}=\underbrace{\left[\frac{e^x-e^2}{(x-2)}\right]}_{\substack{f(x)=e^x\\ f'(2)=e^2}}\times\underbrace{\frac{1}{(x+3)}}_{\frac{1}{5}}=\frac{e^2}{5}$

التمرين الثاني

(I) ❶ دراسة تغيرات الدالة g : حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{x^2}_{+\infty}\underbrace{e^{-x+2}}_{+\infty}-4=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{x^2e^{-x+2}}_{0}-4=-4$

حساب المشتقة : $g'(x)=2xe^{-x+2}-x^2e^{-x+2}=\left(-x^2+2x\right)e^{-x+2}$ ومنه اشارتها من اشارة $\left(-x^2+2x\right)$ لأن $e^{-x+2}>0$

$-x^2+2x=0$ يكافئ $x=0$ أو $x=2$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- الدالة g متناقصة تماما على المجالين : $]-\infty,0]$ و $[2,+\infty[$ و متزايدة تماما على المجال : $[0,2]$.
- جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4

❷ $g(2)=0$ •

• بماأن g مستمرة و متناقصة تماما على $[-0.6,-0.5]$ و $\underbrace{g(-0.6)}_{\approx 0.85}\times\underbrace{g(-0.5)}_{\approx -0.95}<0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.6,-0.5[$.

❸ اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

II ❶ $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+2x^2)e^{-x+1}=\underbrace{-x^3e^{-x+1}}_{0}+2\underbrace{x^2e^{-x+1}}_{0}=0$ ، التفسير : (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته : $y=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{\left(-x^3+2x^2\right)}_{+\infty}\underbrace{e^{-x+1}}_{+\infty}=+\infty$.

❷ حساب المشتقة : $f'(x)=\left(-3x^2+4x\right)e^{-x+1}-\left(-x^3+2x\right)e^{-x+1}=\left(x^3+-5x^2+4x\right)e^{-x+1}=x\left(x^2+-5x+4\right)e^{-x+1}$

❸ اتجاه تغير الدالة f : $f'(x)=0$ يكافئ $x\left(x^2+-5x+4\right)=0$ لأن $e^{-x+1}>0$.

$x\left(x^2+-5x+4\right)=0$ معناه $x=0$ أو $x^2-5x+4=0$ نحل المعادلة الأخيرة نجد $x=1$ أو $x=4$ و بالتالي :

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-5x+4		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

• الدالة f متناقصة تماما على المجالين : $]-\infty,0]$ و $[1,4]$ و متزايدة تماما على المجالين : $[0,1]$ و $[4,+\infty[$.

• جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	≈ -1.6	$\nearrow$	0

❹ معادلة المماس (T) : $y=f'(2)(x-2)+f(2)=-\frac{4}{e}(x-2)$ ومنه : $y=-\frac{4}{e}x+\frac{8}{e}$.

❺

$$\frac{1}{e}(2-x)\times g(x)=e^{-1}.(2-x)\left(x^2e^{-x+2}-4\right)=\left(2e^{-1}-e^{-1}x\right).\left(x^2e^{-x+2}-4\right)$$

$$=2x^2e^{-x+2-1}-x^3e^{-x+2-1}-8e^{-1}+4xe^{-1}=\left(-x^3+2x^2\right)e^{-x+1}+\frac{4}{e}(x-2)=f(x)+\frac{4}{e}(x-2)$$

◄ الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) و المماس (T) : لدينا : $f(x)-y_{(T)}=\frac{1}{e}(2-x).g(x)$ ومنه اشارة الفرق من اشارة الجداء : $(2-x).g(x)$ لأن $\frac{1}{e}>0$.

x	$-\infty$		α		2		$+\infty$
$(2-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(2;0)$	(C_f) فوق (Δ)	

❼ قيم الوسيط الحقيقي m : $me^x = e(-x^3+2x^2)$ تكافئ $m = (-x^3+2x^2)e^{-x+1}$ تكافئ $f(x) = m$
ومنه : $0 < m < 1$.

❽ h دالة زوجية : من أجل كل x و $-x$ من D_h :

$$h(-x) = \left(-|(-x)^3| + 2x^2\right)e^{-|-x|+1} = \left(-|x^3| + 2x^2\right)e^{-|x|+1} = h(x)$$

◄ من أجل $x > 0$: (C_h) ينطبق فوق (C_f) و من أجل $x < 0$ (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.

♣ رسم (T) ، (C_f) و (C_h) :