| | | |
|---|---|---|
| الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة)<br>المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية"<br>المادة: رياضيات | **اختبار الفصل الأول** | الموسم الدراسي: 2022/2021م<br>المدة: ساعتان ونصف (2سا 30د)<br>إعداد: عبد المطلب |

## تمرين1 (3نقاط)

إليك جدول تغيرات الدالة $f$ المعرّفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$، وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة مما يلي:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\|\|$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $2$ |

1) النقطة $A(-2;-3)$ تنتمي إلى المنحني $(\mathscr{C})$.

2) $B(0;-2)$ هي نقطة انعطاف للمنحني $(\mathscr{C})$.

3) $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين: $y=2$ و $x=1$.

4) المعادلة $f(x)=1$ تقبل ثلاثة حلول في $\mathbb{R}-\{1\}$.

5) $f(3)>f(2)$ و $f(4)>f(5)$.

6) إذا علمت أنّ $f(-1)=0$ و $f'(-1)=-12$ فإنّ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2-1)}{x}=-12$.

## تمرين2 (8نقاط)

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{2}{x+1}+\ln(x+1)-\ln x$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ معادلته $y=x$ عند $+\infty$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{x^3+2x^2-2x-1}{x(x+1)^2}$.

ب) احسب $f'(1)$، ثم بيّن أنّ إشارة $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ من إشارة $(x-1)$.

ج) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة $f$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{2}{x+1}-\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) بيّن أنّ الدالة $g$ متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

ج) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل $(\Delta)$.

4) أ) اكتب معادلة المستقيم $(\Delta')$ الذي يوازي المستقيم $(\Delta)$ ويشمل النقطة $A(1\,;\,2+\ln 2)$.

ب) ارسم المستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta')$ والمنحني $(\mathscr{C})$.

ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي $m$ $(m>0)$ التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=x+\ln m$ حلا أكبر تماما من 1.

5) $h$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$ بـ: $h(x)=f(-2x+1)$.

دون حساب عبارة $h(x)$ ادرس اتّجاه تغيّر الدالة $h$ على المجال $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$.

**تمرين3** (9نقاط)

**I-** $g$ الدالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{x+1}-(x+1)e^{x}-1$.

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-1$ وأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

2) بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}$، $g'(x)=(-x-2+e)e^{x}$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة $g$.

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجموعة $\mathbb{R}$ حلين: أحدهما -1، والآخر $\alpha$ حيث: $1,4<\alpha<1,5$.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجموعة $\mathbb{R}$.

**II-** $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2e^{x}+x-e}{e^{x}-1}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$، فسّر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$، فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ معادلته $y=-x+e$ عند $-\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ مع تحديد نقطة تقاطعهما.

ج) بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}-\{0\}$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^{x}-1)^{2}}$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة $f$.

3) أ) بيّن أنّ $e-\alpha=1+e^{-\alpha}$ و $f(\alpha)=2+e^{-\alpha}$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ حيث: $0,2<\beta<0,3$.

4) أ) ارسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحني $(\mathscr{C})$. اعتبر $f(\alpha)\approx2,2$ و $f(-1)\approx4,7$.

ب) $m$ وسيط حقيقي. باستعمال $(\mathscr{C})$ بيّن أنّ المعادلة $\dfrac{x-e+2}{e^{x}-1}=e^{m}$ تقبل حلين موجبين تماما من أجل $m<-\alpha$.

ج) بيّن أنّ معادلة المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ عند نقطة تقاطع $(\mathscr{C})$ مع حامل محور الفواصل هي: $y=\dfrac{2e^{\beta}+1}{e^{\beta}-1}(x-\beta)$.

بالتوفيق

# تصحيح اختبار الفصل الأول 2021م

عبد المطلب "

## تمرين 1:

1) خطأ : لأن $f(-2) > -2$ .
من أجل $x < 0$ ، $f(x) > -2$ .

2) صحيح : لأن $f'(x)$ انعدمت عند 0 ولم تغيّر إشارتها.

3) صحيح : لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ ، و $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$ .

4) خطأ : المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلين فقط أحدهما في $]-\infty ; 1[$ ، والآخر في $]1 ; 3]$ .

5) صحيح : لأن $f(3) > f(2)$ ، $f$ متزايدة على $]1 ; 3]$ و $f(4) > f(5)$ ، لأن $f$ متناقصة على $[3 ; +\infty[$ .

6) خطأ : نضع : $g(x) = f(x^2 - 1)$ ؛
$g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 1)$ .
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = 0$

## تمرين 2:

1) أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ x + \dfrac{2}{x+1} + \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \right] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ ؛ لأن $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

مستقيم مقارب لـ $(\mathscr{C})$ .

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ \dfrac{2}{x+1} + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \right] = 0$

مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathscr{C})$ $y = x$

2) أ) $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = \dfrac{x(x+1)^2 - 2x + x(x+1) - (x+1)^2}{x(x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 2x - 1}{x(x+1)^2}$

ب) $f'(1) = 0$ . بعد التحليل نجد :

$f'(x) = \dfrac{(x-1)(x^2+3x+1)}{x(x+1)^2}$

بما أن $x > 0$ فإن $x^2 + 3x + 1 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)$

| $x$ | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ |

جـ) $f$ متزايدة تماما على $x \geq 1$ .
$f$ متناقصة تماما على $0 < x \leq 1$ .

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $2+\ln 2$ | ↗ | $+\infty$ |

3) أ) $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

ب) $g'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}$

$g'(x) = \dfrac{-3x - 1}{x(x+1)^2} < 0$ لأن $x > 0$ .

ومنه $g$ متناقصة تماما على $]0 ; +\infty[$ .

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ و $g(x) > 0$ .

يمكن دراسة إشارة $g(x)$ دون $g'(x)$

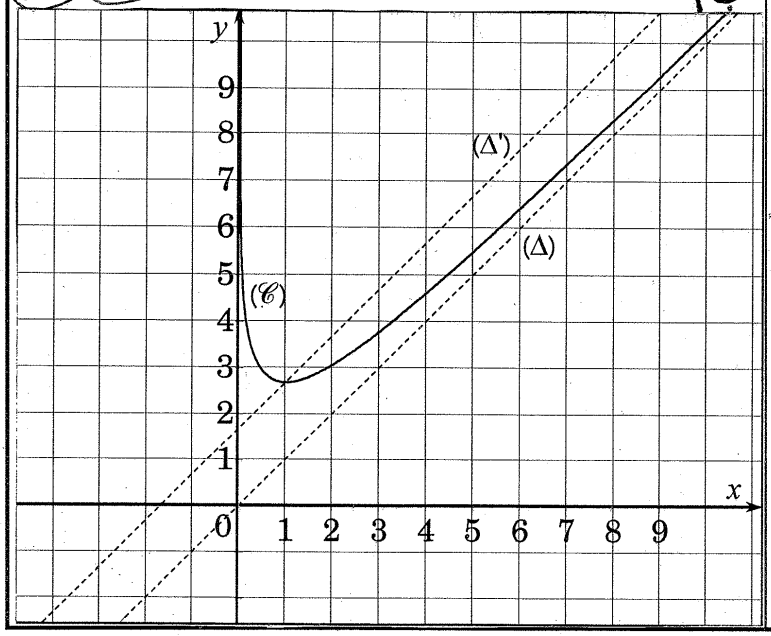
جـ) $f(x) - y = g(x) > 0$

ومنه $(\mathscr{C})$ أعلى $(\Delta)$ .

4) أ) المماس يساوي $y = x + a$ ( لماذا ؟ ) .
و $(\Delta')$ تنتمي إلى $A(1 ; 2 + \ln 2)$

ومنه $2 + \ln 2 = 1 + a$ : $(\Delta)$ $y = x + 1 + \ln 2$

ب)



ج) $f(x)=x+\ln m$ تقبل حلا $x>1$ :

$0<\ln m<1+\ln 2$ تعني $(1<m<2e)$

5) $h'(x)=-2f'(-2x+1)$

$h'(x)=0$ لما $-2x+1=1$ أي $x=0$

$f'(-2x+1)>0$ لما $-2x+1>1$ أي $x<0$

$f'(-2x+1)<0$ لما $-2x+1<1$ أي $0<x<\frac{1}{2}$

* $x<0$ : $h'(x)<0$ ، ومنه $h$ متناقصة تماما

* $0<x<\frac{1}{2}$ : $h'(x)>0$ ، ومنه $h$ متزايدة تماما

## تمرين 3:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e\overset{0}{e^x}-x\overset{0}{e^x}-\overset{0}{e^x}-1)=-1$ I-1

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x(e-x-1)-1\right]=-\infty$

2) $g'(x)=e^{x+1}-\left[e^x+e^x(x+1)\right]$

$g'(x)=e^x.e-(x+2)e^x=e^x(-x-2+e)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $e-2$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↗ | $e^{e-2}-1$ | ↘ | | ↘ | $-\infty$ |

3) $g(-1)=0$ . $g$ مستمرة ومتناقصة تماما على $]1,4;1,5[$ حيث : $g(1,4)\simeq 0,29>0$ .

$g(1,5)\simeq -0,02<0$ . حسب مبرهنة القيم المتوسطة : $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ ،

ومنه إشارة $g(x)$ :

$-\infty$ $-$ $-1$ $+$ $\alpha$ $-$ $+\infty$

II-1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(2+\overset{0}{\frac{x}{e^x}}-\frac{e}{x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}=2$

$y=2$ مستقيم مقارب لـ $(\mathcal{C})$.

ب) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$

$x=0$ مستقيم مقارب لـ $(\mathcal{C})$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\overset{0}{e^x}+x\overset{0}{e^x}-e\overset{0}{e^x}}{e^x-1}=0$

ومنه $(\Delta)$ مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$

ب) $f(x)-y=\dfrac{e^x(x+2-e)}{e^x-1}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $e-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2-e$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $e^x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)-y$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$(\mathcal{C})$ فوق $(\Delta)$ ، $x\in]-\infty;0[\cup]e-2;+\infty[$

$(\mathcal{C})$ تحت $(\Delta)$ ، $x\in]0;e-2[$ .

$(\mathcal{C})$ يقطع $(\Delta)$ عند $A(e-2;2)$ .

ج) $f'(x)=\dfrac{(2e^x+1)(e^x-1)-e^x(2e^x+x-e)}{(e^x-1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{-e^x-1-xe^x+e.e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(-1)$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $2$ |

3) $e^\alpha(e-\alpha-1)-1=0$ $g(\alpha)=0$ P(3

$(e-\alpha=e^{-\alpha}+1)$ تعني $e-\alpha-1=\frac{1}{e^\alpha}=e^{-\alpha}$

$f(\alpha)=\dfrac{2e^\alpha+\alpha-e}{e^\alpha-1}=\dfrac{(2e^\alpha-e^{-\alpha}-1)e^\alpha}{(e^\alpha-1)e^\alpha}$

$f(\alpha)=\dfrac{2e^{2\alpha}-e^\alpha-1}{e^\alpha(e^\alpha-1)}=\dfrac{(e^\alpha-1)(2e^\alpha+1)}{(e^\alpha-1)e^\alpha}=2+e^{-\alpha}$

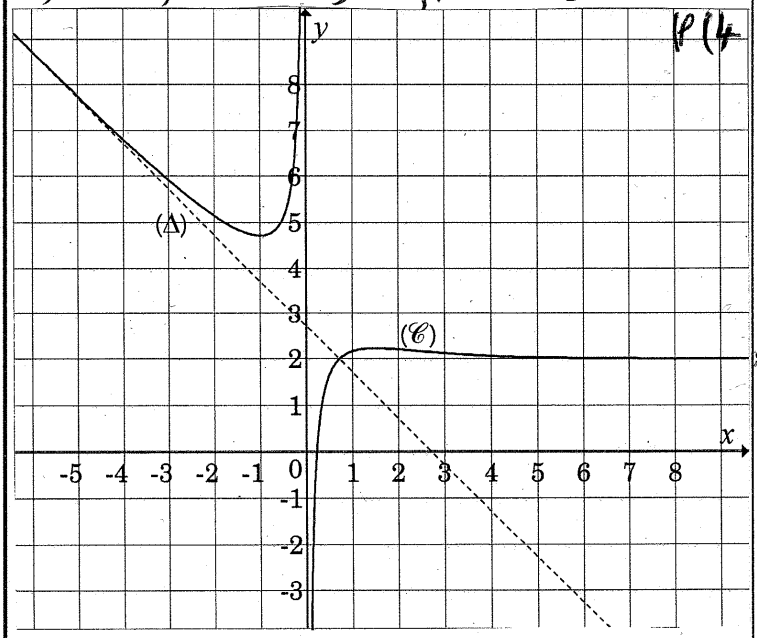
$2,22<f(\alpha)<2,25$

ب) $f$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]0,2;0,3[$

ومنه $f(0,3)\simeq 0,8>0$ و $f(0,2)\simeq -0,34<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

P(4




ب) $f(x)=e^m+2$ ، $2<e^m+2<2+e^{-\alpha}$

تعني $(m<-\alpha)$ : $0<e^m<e^{-\alpha}$

ج) $f(\beta)=0$ و $y=f'(\beta)(x-\beta)$ ، $(e-\beta=2e^\beta)$ $f(\beta)=0$

$f'(\beta)=\dfrac{(e-\beta)e^\beta-e^\beta-1}{(e^\beta-1)^2}=\dfrac{2e^{2\beta}-e^\beta-1}{(e^\beta-1)^2}=\dfrac{(e^\beta-1)(2e^\beta+1)}{(e^\beta-1)^2}=\dfrac{2e^\beta+1}{e^\beta-1}$