الأستاذ فرقاني فارس

3AS

الشعب العلمية والرياضية

السلسلة 3AS-U02-3

SCAN ME

الموقع الإلكتروني

سلاسل المنجد في

العلوم الفيزيائية

السقوط الشاقولي

تطور جملة ميكانيكية

الإصدار : سبتمبر 2024

facebook.com/faresfergani25
www.sites.google.com/site/faresfergani

خلاصة الدرس وتمارين محلولة

3AS

السقوط الشاقولي

تطور جملة ميكانيكية

المحتوى

- دافعة أرخميدس وقوة الاحتكاك مع الهواء.
- السقوط الحقيقي.
- المعادلة التفاضلية التي تميز السرعة بدلالة الزمن.
- السقوط الحر.

3AS-U02-3 السلسلة

ثالثة ثانوي – الشعب العلمية والرياضية

السقوط الشاقولي

المحتوى: عرض نظري مختصر وتمارين محلولة

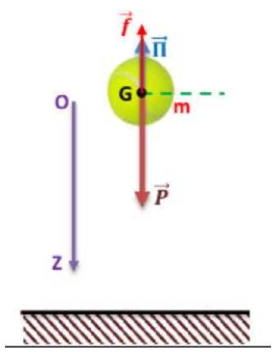
إعداد الأستاذ: فرقاني فارس

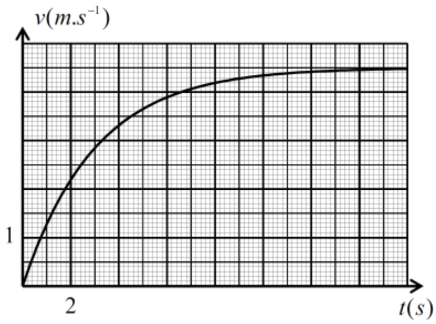
خلاص الدرس وتمارين محلولة 1

التمارين ذات درجة أولى من الصعوبة

السقوط الحقيقي في الهواء

القوى المؤثرة	دافعة أرخميدس		$\vec{P} = m\,\vec{g}$	$P = m\,g$
			$\vec{\Pi} = -m\,\vec{g}$	$\Pi = -\rho V g$
	قوة الاحتكاك	سرعات صغيرة	$\vec{f} = -k\,\vec{v}$	
			$f = k\,v$	
		سرعات كبيرة	$f = k\,v^2$	
المعادلة التفاضلية			$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho})$	
عبارة السرعة الحدية			$v_\ell = \frac{mg}{k}(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho})$	
الزمن المميز للسقوط τ			$\tau = \frac{m}{K}$	
وحدة K	$f = Kv$	الوحدة: $Kg.s^{-1}$	$[K] = \frac{[f]}{[v]} = \frac{[m][a]}{[v]} = \frac{[m].\frac{[L]}{[t]^2}}{\frac{[L]}{[t]}} \Rightarrow [K] = \frac{[m]}{[t]}$	
	$f = Kv^2$	الوحدة: $Kg.m^{-1}$	$[K] = \frac{[f]}{[v]^2} = \frac{[m][a]}{[v]^2} = \frac{[m].\frac{[L]}{[t]^2}}{\frac{[L]^2}{[t]^2}} \Rightarrow [K] = \frac{[m]}{[L]}$	

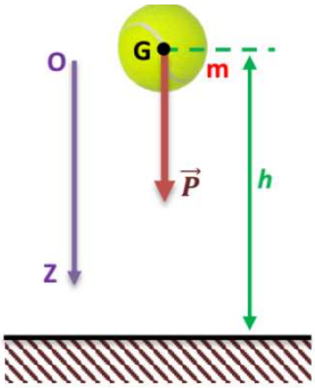
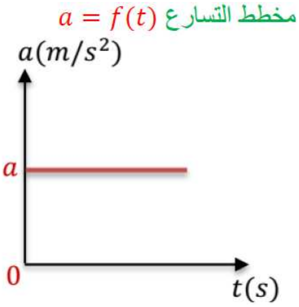
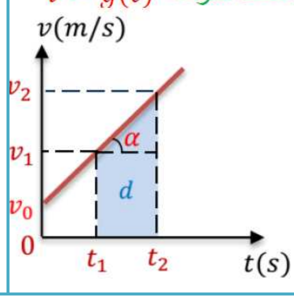
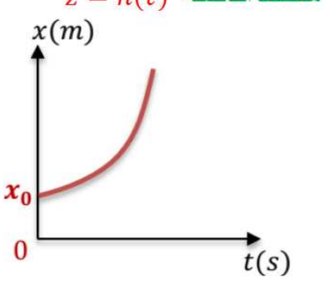




ملاحظة :

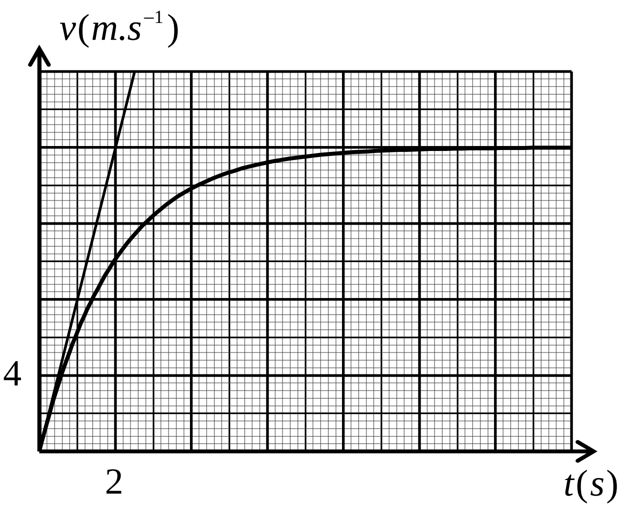
في اللحظة $t=0$ أين $(v=0)$ يكون: $a_0 = g$: $\Rightarrow$ $(\frac{dv}{dt})_{t=0} + 0 = g$ وعليه لمعرفة إن كانت دافعة أرخميدس مهملة نقارن بين a_0 و g ، إذا كان $a_0 = g$ فإن دافعة أرخميدس مهملة، أما إذا $a_0 \neq g$ فإن دافعة أرخميدس غير مهملة .

السقوط الحر في الهواء

تعريف	السقوط الحر هو سقوط تهمل فيه كل تأثيرات الهواء ويخضع الجسم عندها إلا لتأثير ثقله		
المعادلة التفاضلية	$\frac{dv}{dt} = g$ $\frac{d^2y}{dt^2} = g$	$a = g$	
طبيعة الحركة	طبيعة الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام		
المعادلات الزمنية	$y = \frac{4}{2}gt^2 + v_0t + v_0$	$v = gt + v_0$	
مخططات الحركة	• مخطط التسارع $a = f(t)$ 	• مخطط السرعة $v = g(t)$ 	مخطط الفاصلة $z = h(t)$ 

التمرين(1): (التمرين: 018 في بنك التمارين) (**)

قام فوج من التلاميذ في حصة للأعمال المخبرية بدراسة السقوط الشاقولي لجسم صلب (S) في الهواء كتلته $m = 19\ g$ وحجمه $V = 2,71\times10^{-3} m^3$ وذلك باستعمال كاميرا رقمية $(Webcam)$، عولج شريط الفيديو ببرمجية "$Avistep$" بجهاز الإعلام الآلي فتحصلوا على البيان $v = f(t)$ الذي يمثل تغيرات سرعة مركز عطالة (S) بدلالة الزمن (الشكل).



يعطى : $g = 9,8\ m/s$ ، $\rho = 1,29\ kg/m^3$ ونعتبر $f = kv$.

1– حدد طبيعة حركة مركز عطالة الجسم (S) في النظامين الإنتقالي و الدائم.علل.

2– بالاعتماد على البيان عين:

أ– السرعة الحدية v_ℓ، وثابت الزمن t المميز للسقوط.

ب– تسارع الحركة في اللحظة $t=0$، وعند اللحظة $t=12\ s$؟

3– بين أن المعادلة التفاضلية لحركة (S) تعطى بالعبارة : $\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g(1-\frac{\rho V}{m})$

حيث: ρ الكتلة الحجمية للهواء، V حجم الجسم (S).

4– أثبت أن السرعة الحدية v_{lim} تعطى بالعبارة: $v_{\lim}=\frac{g}{k}(m-\rho V)$.

5– أحسب بطريقتين مختلفتين معامل الاحتكاك k.

6– نعتبر دافعة أرخميدس ومقاومة الهواء مهملتين:

أ– كيف نسمي هذا السقوط، عرفه.

ب– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن جِد قيمة التسارع في هذه الحالة.

جـ– توقع بيان السرعة $v=f(t)$ وبيان التسارع $a=g(t)$ في هذه الحالة (أرسم كيفيا البيان).

الحل المفصل:

1– تحديد طبيعة حركة مركز عطالة الجسم (S) في النظامين الإنتقالي والدائم.مع التعليل:

النظام الانتقالي:

المنحنى $v=f(t)$ هو خط منحني، وبما أن السرعة متزايدة فطبيعة الحركة في هذه المرحلة مستقيمة متسارعة من دون انتظام.

النظام الدائم:

المنحنى $v=f(t)$ هو مستقيم يوازي محور الأزمنة، فطبيعة الحركة في هذه المرحلة مستقيمة منتظمة.

2– أ– تعيين السرعة الحدية v_ℓ، وثابت الزمن t المميز للسقوط:

من البيان: $v_\ell=16\ m/s$ ، $\tau=2\ s$.

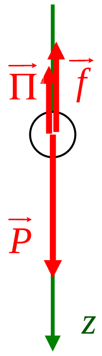
ب– تعيين تسارع الحركة في اللحظة $t=0$، وعند اللحظة $t=12\ s$:

تسارع الحركة في لحظة t مساوي لميل مماس المنحنى $v=f(t)$ عند هذه اللحظة، لذا يكون:

- $t=0 \Rightarrow a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{(4-0)\times 4}{(1-2)\times 2}=8m/s^2$
- $t=12s \Rightarrow a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=0$ (نظام دائم)

3- المعادلة التفاضلية:

- الجملة المدروسة: مظلي وتجهيزه.
- مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{i})$.
- القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:



$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$P - \Pi - f = m.a \Rightarrow mg - \rho Vg - kv(t) = m\frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow m\frac{dv(t)}{dt} + kv(t) = mg - \rho Vg$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}v(t) = g - \frac{\rho Vg}{m} \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}v(t) = g(1 - \frac{\rho V}{m})$$

4- إثبات أن السرعة الحدية v_{lim} تعطى بالعبارة: $v_{\lim} = \frac{g}{k}(m - \rho V)$:

في النظام الدائم أين يكون $v = v_{lim}$ ، $\frac{dv}{dt} = 0$ ، نكتب من المعادلة التفاضلية:

$$\frac{k}{m}v_{\lim} = g(1 - \frac{\rho V}{m}) \Rightarrow v_{\lim} = \frac{mg}{k}(1 - \frac{\rho V}{m})$$

5- حساب بطريقتين مختلفتين معامل الاحتكاك k :

طريقة1:

$$\tau = \frac{m}{k} \Rightarrow k = \frac{m}{\tau}$$

وجدنا سابقا: $\tau = 2\ s$ ومنه:

$$k = \frac{19\times10^3}{2} = 9,5\times10^{-3}\ kg/s$$

طريقة2:

$$v_{\lim} = \frac{mg}{k}(1 - \frac{\rho V}{m}) \Rightarrow k = \frac{mg}{v_{\lim}}(1 - \frac{\rho V}{m}) \Rightarrow k = \frac{9,8}{16}(1 - \frac{1,29\times2,71\times10^{-3}}{19\times10^{-3}}) \simeq 9,5\times10^{-3}\ kg/s$$

6-أ- كيفية تسمية هذا السقوط:

يسمى هذا السقوط بالسقوط الحر .

● تعريفه:

هو سقوط تهمل فيه كل تأثيرات الهواء ويخضع خلاله الجسم إلى تأثير ثقله فقط.

ب- قيمة التسارع في هذه الحالة:

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum F_{ext} = m.\vec{a}_G$$

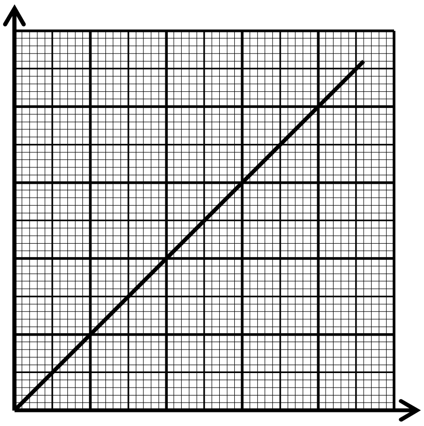
$$\vec{P} = m.\vec{a}_G$$

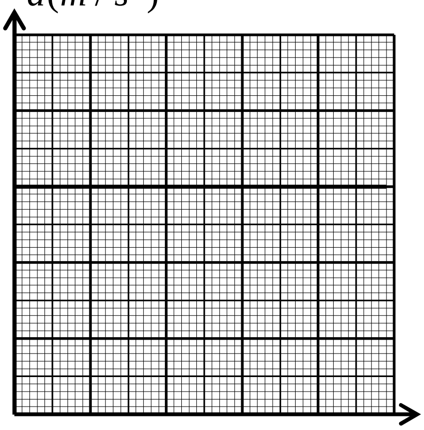
بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$P = m.a \Rightarrow m.g = m.a \Rightarrow a = g$$

g ثابت ومنه a ثابت، إذن الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام دون سرعة ابتدائية.

جـ- توقع بيان السرعة $v = f(t)$ وبيان التسارع $a = g(t)$ في هذه الحالة (أرسم كيفيا البيان):





التمرين(2): (التمرين: 019 في بنك التمارين) (**)

عند اللحظة $t = 0$ وبدون سرعة ابتدائية، يسقط شاقوليا مظلي كتلته مع تجهيزه $m = 100\ kg$ فيبلغ سرعة ثابتة حدية قيمتها $v_\ell = 4.5\ m.s^{-1}$.

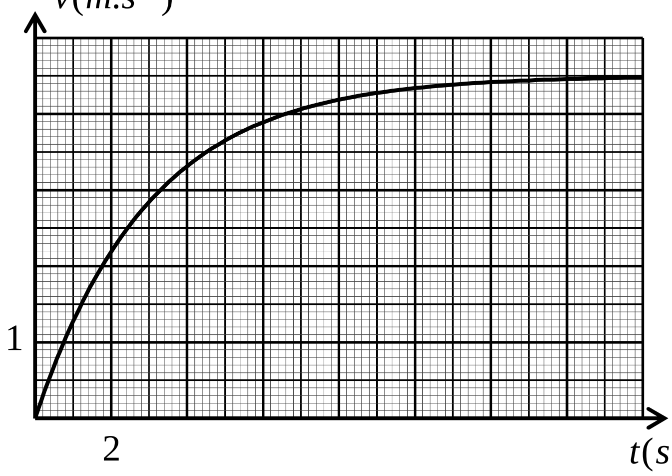
- نهمل خلال السقوط دافعة أرخميدس أمام القوى الأخرى المطبقة على المظلي و تجهيزه.

- ننمذج قيمة $\vec{f}$ قوة احتكاك الهواء على الجملة (مظلة + علبة) بـ $f = k\ v^2$ حيث: k ثابت موجب من أجل ارتفاعات معتبرة، و v سرعة مركز عطالة الجملة.

- نفرض أنه لا توجد رياح (الحركة تكون شاقولية).

يعطى: $g = 9.8\ m/s^2$

بيان الشكل المقابل يمثل تغيرات سرعة (المظلي و مظلته) بدلالة الزمن.



1- أكتب المعادلة التفاضلية التي تعبر عن سرعة حركة مركز عطالة المظلي وتجهيزه.

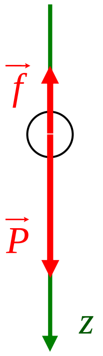
2- اشرح سبب وجود نظامين للحركة.

3- جِد قيمة المعامل k الذي يتدخل في قوة الاحتكاك.

الحل المفصل:

1- أكتب المعادلة التفاضلية التي تعبر عن سرعة حركة مركز عطالة المظلي وتجهيزه:

- الجملة المدروسة: المظلي وتجهيزه.
- مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي، مزود بمعلم خطي $(o,\vec{j})$.
- القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$، قوى الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:



$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{f} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$P - f = m.a \Rightarrow mg - kv^2 = m\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} + kv^2 = mg \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g$$

2- شرح سبب وجود نظامين للحركة.

في اللحظة $t=0$ يخضع (المظلي مع تجهيزه) إلى قوة ثقله فقط $(v=0 \Rightarrow f=kv^2=0)$، هذا يجعله ينطلق نحو الأسفل بحركة مستقيمة متسارعة، وأثناء ذلك تزداد شدة قوة الاحتكاك (نظام انتقالي)، حتى تصبح شدتها مساوية لشدة الثقل وبعدها تصبح محصلة القوى معدومة وينعدم شعاع التسارع حسب القانون الثاني لنيوتن والحركة تكون مستقيمة منتظمة (نظام دائم).

3- قيمة k :

في النظام الدائم يكون $v = v_\ell$ ، $\frac{dv}{dt} = 0$ بالتعويض في المعادلة التفاضلية:

$$\frac{k}{m}{v_{\lim}}^2 = g \Rightarrow k = \frac{m.g}{{v_{\lim}}^2}$$

من البيان: $v_\ell = 4,5\ m/s$ ومنه:

$$k = \frac{100 \times 9,8}{(4,5)^2} = 48,4\,kg/m$$

التمرين(3): (التمرين: 020 في بنك التمارين) (**)

جسم صلب (S) كتلته $m = 20\ g$ ، يترك ليسقط في الهواء دون سرعة ابتدائية عند اللحظة $t=0$ وفق محور شاقولي $(\overrightarrow{oz})$ موجه نحو الأسفل، مبدؤه يوافق مبدأ الأزمنة $t=0$. نعتبر أن الجسم (S) يخضع أثناء حركته لقوة احتكاك $\vec{f} = -k\vec{v}$ حيث k ثابت يمثل معامل الاحتكاك، يعطى $g = 10\ m/s^2$.

1– سمحت كاميرا رقمية بمتابعة حركة الكرية وعولج شريط الصور الملتقطة ببرمجية مكنتنا من الحصول على البيانين $a=h(t)$ و $v=f(t)$.

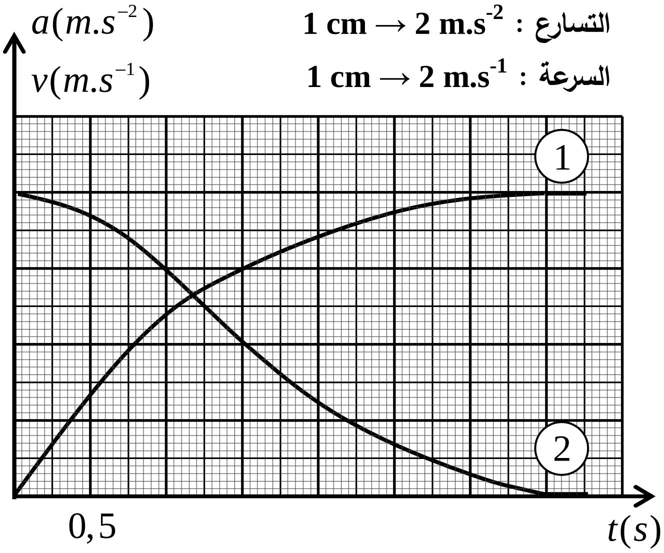
أ– أي المنحنيين يمثل تطور السرعة $v(t)$ بدلالة الزمن وأيهما يمثل تطور التسارع $a(t)$؟ علل.

ب– حدد بيانيا قيمة السرعة الحدية v_{lim}، وقيمة التسارع a_0 عند اللحظة $t=0$.

جـ– أثبت أن دافعة أرخميدس غير مهملة.

2– مثل القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الكرية خلال مراحل السقوط .

3– كيف يكون الجسم الصلب (S) متميزا للحصول على حركة مستقيمة شاقولية انسحابية في نظامين انتقالي ودائم؟



4– أ– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة البالون G في معلم عطالي وبفرض أن دافعة أرخميدس غير مهملة، بين أن المعادلة التفاضلية للسرعة تكتب على الشكل: $\frac{dv(t)}{dt}+Av(t)=B$

حيث A و B ثوابت يطلب كتابة عبارتيهما.

ب– ما هو المدلول الفيزيائي للثابت B؟

جـ– حدد وحدة الثابت k باستعمال التحليل البعدي.

5– جِدْ شدة قوة دافعة أرخميدس Π ومعامل الاحتكاك k الزمن المميز للسقوط τ.

الحل المفصل:

1– أ– المنحنى الذي يمثل تطور السرعة $v(t)$ بدلالة الزمن و المنحنى الذي يمثل تطور التسارع $a(t)$، مع التعليل:

– الجسم (S) ترك عند اللحظة $t=0$ دون سرعة ابتدائية، أي لما $t=0$ يكون $v=0$ وهذا يتوافق مع المنحنى (1).

– محصلة القوى الخارجية المؤثرة على مركز عطالة الجسم عند اللحظة $t=0$ غير معدومة (على الأقل خاضع إلى تاثير الثقل)، ومنه حسب القانون الثاني يكون التسارع غير معدوم وهذا يتفق مع المنحنى (2).

ب– تحديد بيانيا قيمة السرعة الحدية v_{lim}، وقيمة التسارع a_0 عند اللحظة $t=0$:

– من المنحنى(1) الموافق لـ $v(t)$ يكون:

$$v_{lim}=4\times 2=8\ m/s$$

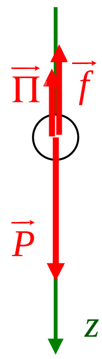
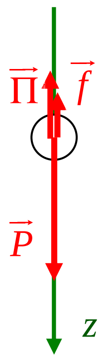
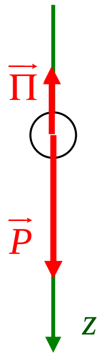
– من المنحنى (2) الموافق لـ$a(t)$:

$$a_0=4\times 2=8\ m/s^2$$

جـ– أثبت أن دافعة أرخميدس غير مهملة:

$a_0\neq 0$، هذا يعني أن الجسم (S) عند اللحظة $t=0$ لا يخضع إلى تأثير قوة ثقله فقط، إنما هناك قوة أخرى هي دافعة أرخميدس علما أن شدة قوة الاحتكاك معدومة عند هذه اللحظة كون أن السرعة معدومة، إذن دافعة أرخميدس غير مهملة.

2– تمثل القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الكرية خلال مراحل السقوط:

مرحلة النظام الدائم	المرحلة الانتقالية	مرحلة الانطلاق
		

3– مميزات الجسم الصلب (S) للحصول على حركة مستقيمة شاقولية انسحابية في نظامين انتقالي ودائم:

يجب أن يكون شكل الجسم انسيابي وهو شرط أساسي، إضافة إلى ذلك كلما كان الجسم أقل وزنا كلما بلغ النظام الدائم في مدة زمنية أقل.

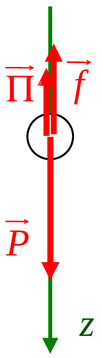
4– تبيين أن المعادلة التفاضلية للسرعة تكتب على الشكل $\frac{dv(t)}{dt} + Av(t) = B$:

– الجملة المدروسة: جسم (S).

– مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{i})$.

– القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.

– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:



$$\sum F_{ext} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور (oz) يكون:

$$P - \Pi - f = m.a_G \Rightarrow mg - \Pi - kv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} + kv = mg - \Pi \Rightarrow m\frac{dv}{dt} + kv = mg - \rho Vg$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g - \frac{\rho Vg}{m} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g(1 - \frac{\rho V}{m})$$

بالمطابقة مع المعادلة التفاضلية المعطاة يكون: $A = \frac{k}{m}$ ، $B = g(1 - \frac{\rho V}{m})$.

ب– المدلول الفيزيائي للثابت B:

عند اللحظة $t = 0$ أين يكون $v = 0$ ، $\frac{dv}{dt} = a_0$ ، نكتب من المعادلة التفاضلية:

$$a_0 + A(0) = B \Rightarrow B = a_0$$

إذن المدلول الفيزيائي للثابت B هو قيمة التسارع الابتدائي a_0 (عند اللحظة $t = 0$).

جـ– تحديد وحدة الثابت k باستعمال التحليل البعدي:

$$f = kv \Rightarrow k = \frac{f}{v} \Rightarrow [k] = \frac{[f]}{[v]}$$

حسب القانون الثاني لنيوتن:

$$F = m.a \Rightarrow [F] = [m].[a]$$

و منه:

$$[k] = \frac{[m][a]}{[v]} \Rightarrow [k] = \frac{[m].\frac{[l]}{[s]^2}}{\frac{[l]}{[s]}} \Rightarrow [k] = \frac{[m]}{[s]}$$

إذن وحدة k هي: $kg.s^{-1}$.

5– إيجاد شدة قوة دافعة أرخميدس Π :

مما سبق يمكن كتابة:

$$P - \Pi - f = m\,a \Rightarrow mg - kv(t) - \Pi = m\,a(t)$$

عند اللحظة $t = 0$ أين $a = a_0 = 8\ m/s^2$ ، $v = 0$ ، يكون:

$$mg - \Pi = m\,a_0 \Rightarrow \Pi = mg - m\,a_0 \Rightarrow \Pi = m(g - a_0)$$

$$\Pi = 20\times10^{-3}\times(10 - 8) = 4\times10^{-2}\,N$$

● إيجاد معامل الاحتكاك k:

مما سبق يمكن أيضا كتابة:

$$P - \Pi - f(t) = ma(t) \Rightarrow mg - \Pi - k.v(t) = ma(t)$$

في النظام الدائم أين $a = 0$ ، $v = v_\ell$ ، يكون:

$$mg - \Pi - k.v_\ell = 0 \rightarrow mg - \Pi = kv_\ell \Rightarrow k = \frac{mg - \Pi}{v_\ell}$$

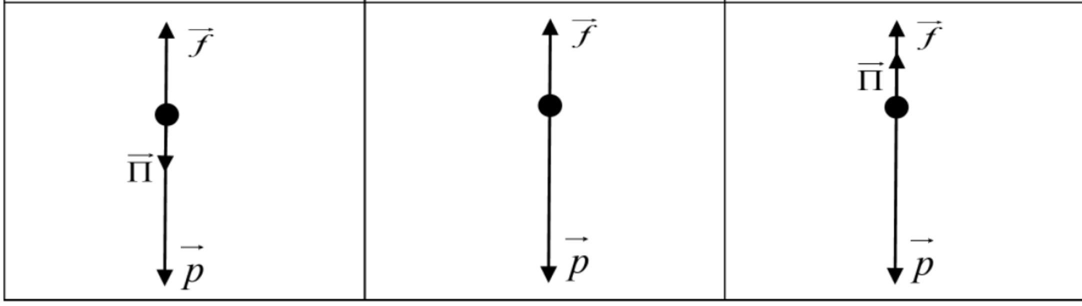
$$k = \frac{(20\times10^{-3}\times10) - 4\times10^{-2}}{8} = 2\times10^{-2}\,Kg/s$$

● حساب الزمن المميز للسقوط τ:

$$\tau = \frac{m}{k} = \frac{20\times10^{-3}}{2\times10^{-2}} = 1s$$

التمرين(4): (بكالوريا 2017 – علوم تجريبية) (التمرين: 103 في بنك التمارين) (**)

خلال حصة الأعمال المخبرية كلف الأستاذ ثلاث مجموعات من التلاميذ بدراسة حركة سقوط كرية في الهواء كتلتها m وحجمها V انطلاقا من السكون في اللحظة $t=0$ حيث طلب منهم تمثيل القوى المؤثرة على الكرية في لحظة t حيث $t>0$، عرضت كل مجموعة عملها فكانت النتائج كالتالي:

المجموعة	1	2	3
التمثيل المنجز			

حيث $\vec{\Pi}$ دافعة أرخميدس و $\vec{f}$ قوة الاحتكاك مع الهواء.

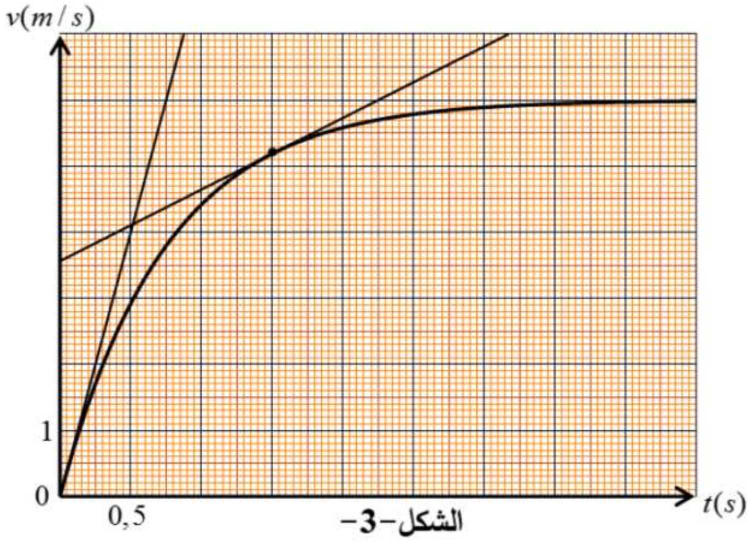
1) بعد المناقشة تم رفض تمثيل إحدى المجموعات الثلاث.

أ) حدد التمثيل المرفوض مع التعليل.

ب) اكتب المعادلة التفاضلية للسرعة لكلا الحالتين المتبقيتين.

ج) أعط عبارة a_0 تسارع الكرية في اللحظة $t=0$ لكل من الحالتين المتبقيتين.

2) لتحديد التمثيل المناسب أُجريت تجربة لقياس قيم السرعة في لحظات مختلفة، النتائج المتحصل عليها سمحت برسم المنحنى الموضح في (الشكل3).



الشكل-3-

مستعينا بالمنحنى حدد قيمة التسارع الابتدائي a_0 في اللحظة $t=0$ ثم استنتج التمثيل الصحيح مع التعليل.

3) عين قيمة السرعة الحدية v_{lim}.

4) جد عبارة السرعة الحدية v_{lim} بدلالة: m، k، g و V حجم الكرية، ثم احسب قيمة الثابت k.

5) احسب شدة محصلة القوى المطبقة على الكرية في اللحظة $t = 1,5\ s$ بطريقتين مختلفتين.

المعطيات: عبارة قوة الاحتكاك من الشكل $f = kv$، $g = 9,80\ m.s^{-2}$، كتلة الكرية $m = 2,6\ g$.

الكتلة الحجمية للهواء $\rho_{air} = 1,3\ kg.m^{-3}$، حجم الكرية: $V = 3,6\times10^{-4} m^3$.

الحل المفصل:

1- أ- تحديد التمثيل المرفوض مع التعليل:

جهة دافعة أرخميدس تكون دوما معاكسة لجهة قوة الثقل ($\vec{\Pi} = -\rho V\vec{g}$) وبالتالي التمثيل(3) هو المرفوض.

ب- كتابة المعادلة التفاضلية للسرعة لكلا الحالتين المتبقيتين:

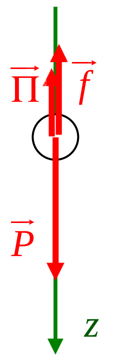
الحالة (1):

- الجملة المدروسة: كرية

- مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{i})$.

- القوة الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:



$$\sum F_{ext} = m.\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m.\vec{a}_G$$

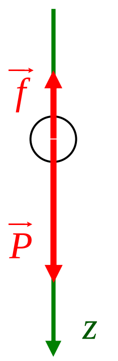
بالإسقاط على المحور (oz) يكون:

$$P - \Pi - f = m.a_G \Rightarrow mg - \rho Vg - kv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} + kv = mg - \rho Vg$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g - \frac{\rho Vg}{m} \quad \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g(1 - \frac{\rho V}{m})$$

الحالة (2):

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:



$$\sum F_{ext} = m.\vec{a}_G \quad \Rightarrow \vec{P} + \vec{f} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور (oz) يكون:

$$P - f = m.a_G \Rightarrow mg - kv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} + kv = mg \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

جـ- إعطاء عبارة a_0 تسارع الكرية في اللحظة $t = 0$ لكل من الحالتين:

الحالة (1):

عند اللحظة $t = 0$، أين $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = a_0$ ، $v = 0$، نكتب من المعادلة التفاضلية للحالة(1):

$$a_0 = g(1 - \frac{\rho V}{m})$$

الحالة (2):

عند اللحظة $t = 0$، أين $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = a_0$ ، $v = 0$، نكتب من المعادلة التفاضلية للحالة(2):

$$a_0 = g$$

2- تحديد قيمة التسارع الابتدائي a_0 في اللحظة $t = 0$:

من البيان عند اللحظة $t = 0$ يكون:

$$a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(4-1)\times 1}{(1-0)\times 0,5} = 8\,m/s^2$$

● استنتاج التمثيل الصحيح مع التعليل:

نلاحظ $a_0 \neq g$ ، نستنتج أن دافعة أرخميدس غير مهملة وبالتالي التمثيل الصحيح هو (1).

3– تعيين قيمة السرعة الحدية v_{lim}:

من البيان: $v_{lim} = 6\ m/s$

4– إيجاد عبارة السرعة الحدية v_{lim} بدلالة: m ، k ، g و V حجم الكرية:

من المعادلة التفاضلية الموافقة للتمثيل الصحيح (الحالة 1) وفي النظام الدائم أين $\frac{dv}{dt} = 0$ ، $v = v_{lim}$ ، يكون:

$$\frac{k}{m} v_{\lim} = g(1 - \frac{\rho V}{m}) \Rightarrow v_{\lim} = \frac{mg}{k}(1 - \frac{\rho V}{m}) \Rightarrow v_{\lim} = \frac{g}{k}(m - \rho V)$$

● حساب قيمة الثابت k:

بالاعتماد على عبارة v_{lim} السابقة:

$$k = \frac{g}{v_{\lim}}(m - \rho V) \Rightarrow k = \frac{9,8}{6}\left(2,6\times10^{-3} - (1,3\times3,6\times10^{-4})\right) = 3,48\times10^{-3}\ kg/s$$

5– حساب شدة محصلة القوى المطبقة على الكرية في اللحظة $t = 1,5\ s$ بطريقتين مختلفتين:

الطريقة الأولى:

حسب القانون الثاني لنيوتن $F_{(t)} = ma_{(t)}$ ، وعند اللحظة $t = 1,5\ s$ نكتب:

$$F_{(1,5s)} = ma_{(1,5s)}$$

من البيان عند نفس اللحظة:

$$a_{(t=1,5s)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(5,2-3,6)\times1}{(3-0)\times0,5} = 1,07\ m/s^2$$

ومنه:

$$F = 2,6\times10^{-3}\times1,07 = 2,78\times10^{-3}\ N$$

الطريقة الثانية:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f}$$

بالإسقاط على المحور (oz):

$$F = P - \Pi - f \Rightarrow F = m.g - \rho V g - kv$$

$$F = \left(2,6\times10^{-3}\times9,8\right) - \left(1,3\times3,6\times10^{-4}\times9,8\right) - \left(3,48\times10^{-3}\times5,2\right) = 2,79\times10^{-3}\ N$$

التمرين(5): (بكالوريا 2020 – علوم تجريبية) (التمرين: 138 في بنك التمارين) (**)

بني جسر سيدي راشد بين 1908 و 191 على ضفتي وادي الرمال بقسنطينة الذي يربط حي الكدية و محطة القطار.

يهدف هذا التمرين إلى إيجاد ارتفاع الجسر.

الشكل 1. جسر سيدي راشد -

زار التلاميذ جسر سيدي راشد في إطار رحلة مدرسية إلى مدينة قسنطينة فانبهرت "منى" من علو هذا الجسر وأرادت معرفة علوه، من أجل ذلك تركت حجراً كتلته $m = 100\ g$ ليسقط دون سرعة ابتدائية من نقطة O تقع على حافة الجسر نعتبرها مبدأ للفواصل في اللحظة $t = 0$ وسجلت زمن سقوطه $t = 4{,}67\ s$.

يعطى: شدة الجاذبية الأرضية: $g = 9{,}80\ m.s^{-2}$.

دراسة السقوط الحر للحجر:

1. عرف السقوط الحر للأجسام.

2. من بين المراجع التالية: (أ) المرجع السطحي الأرضي، (ب) المرجع الجيومركزي، (جـ) المرجع الهيليومركزي.

1.2. اختر المرجع المناسب لدراسة حركة سقوط الحجر.

2.2. هل يمكن اعتبار المرجع المختار عطاليا؟ علل.

3. نعتبر سقوط الحجر حرا في المعلم (Oz) المرتبط بمرجع الدراسة (الشكل1).

1.3. مثل القوى الخارجية المطبقة على الجملة المادية (الحجر) أثناء السقوط .

2.3. ذكر بنص القانون الثاني لنيوتن.

3.3. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة، جِد المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة مركز عطالة الجملة في كل لحظة.

4.3. استنتج طبيعة حركة مركز عطالة الجملة واكتب المعادلة الزمنية لسرعته.

4. اعتمادا على المعادلة الزمنية للسرعة:

1.4. ارسم على ورقة ميليمترية منحنى تطور سرعة مركز عطالة الجملة $v = f(t)$.

2.4. جِد بيانيا قيمة h ارتفاع الجسر عن سطح الأرض.

3.4. اكتب المعادلة الزمنية للحركة $z(t)$.

4.4. تأكد حسابيا من قيمة الارتفاع h.

الحل المفصل:

دراسة السقوط الحر للحجر:

1. تعريف السقوط الحر للأجسام:

هو سقوط تهمل فيه كل تأثيرات الهواء على الجسم، وبالتالي يخضع في الجسم إلى تاثير ثقله فقط.

1.2. اختيار المرجع المناسب لدراسة حركة سقوط الحجر :

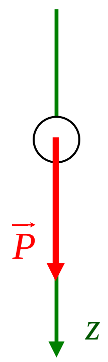
هو المرجع السطحي الأرضي.

2.2. المرجع المختار عطاليا أم لا. مع التعليل:

نعم يمكن اعتبار المرجع عطاليا، لأن مدة الدراسة صغيرة جدا أمام مدة دوران الأرض حول نفسها.

1.3. تمثيل القوى الخارجية المطبقة على الجملة المادية (الحجر) أثناء السقوط:

(الشكل)



2.3. التذكير بنص القانون الثاني لنيوتن:

في مرجع غاليلي، المجموع الشعاعي للقوى الخارجية المؤثرة على مركز عطالة جملة مادية، يساوي في كل لحظة جداء كتلة هذه الجملة المادية في شعاع تسارع مركز عطالتها $\left(\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G\right)$.

3.3. إيجاد المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة مركز عطالة الجملة في كل لحظة:

- الجملة المدروسة: حجر.
- مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o, \vec{j})$.
- القوة الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum F_{ext} = m.\vec{a}_G$$
$$\vec{P} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$P = m.a \;\Rightarrow\; m.g = m\frac{dv(t)}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{dv(t)}{dt} = g$$

4.3. استنتاج طبيعة حركة مركز عطالة الجملة:

مما سبق $a = g$، وحث أن g ثابت والمسار مستقيم في الاتجاه الموجب، فحركة مركز عطالة الحجر مستقيمة متسارعة بانتظام.

- كتابة المعادلة الزمنية للسرعة:

مما سبق لدينا:

$$\frac{dv(t)}{dt} = g$$

بالتكامل نجد:

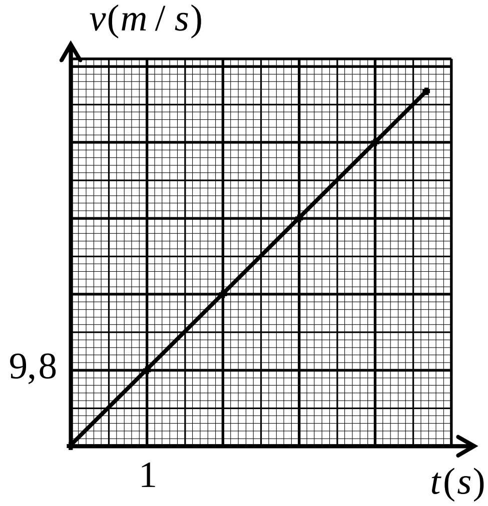
$$v = gt + v_0$$

من الشروط الابتدائية $v_0 = 0$ ومنه تكون المعادلة الزمنية للسرعة:

$$v = gt \quad \Rightarrow \quad v = 9,8t$$

1.4. رسم منحنى تطور سرعة مركز عطالة الجملة $v = f(t)$:

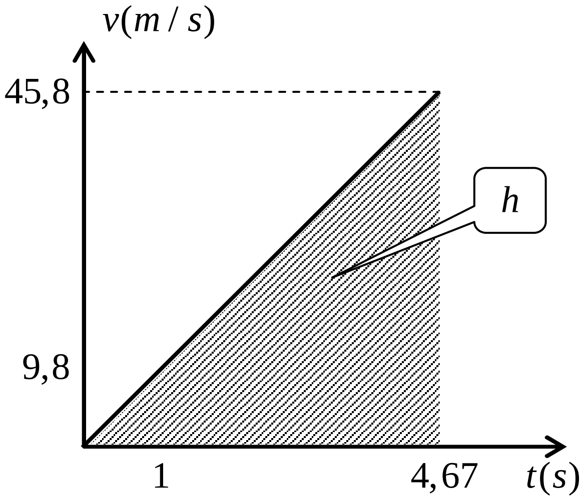
$t(s)$	0	1	2	3	4	4,67
$v(m/s)$	0	9,8	19,6	29,4	39,2	45,8



2.4. إيجاد بيانيا قيمة h ارتفاع الجسر عن سطح الأرض:

h هي المسافة الشاقولية التي يقطعها الحجر بين لحظة تركه $t = 0$ لحظة ارتطامه بسطح الأرض $t = 4,67\,s$، وباستعمال طريقة المساحات يكون:

$$h = \frac{45,8 \times 4,67}{2} \simeq 107\,m$$



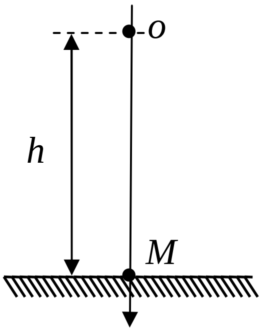
3.4. كتابة المعادلة الزمنية للحركة $z(t)$:

مما سبق:

$$v = 9,8t \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dt} = 9,8t$$

بالتكامل نجد:

$z = 4{,}9t^2 + z_0$



من الشروط الابتدائية $z_0 = 0$ ومنه تكون المعادلة: $z = 4{,}9t^2$

4.4. التأكد حسابيا من قيمة الارتفاع h:

– بفرض أن الموضع M هو موضع ارتطام الحجر بسطح الأرض.

– عند الموضع M لدينا: $z_M = h$ ، $t_M = 4{,}67\,s$ ، بالتعويض في المعادلة $z(t)$ يكون:

$h = 4{,}9 \times (4{,}67)^2 \simeq 107\,m$

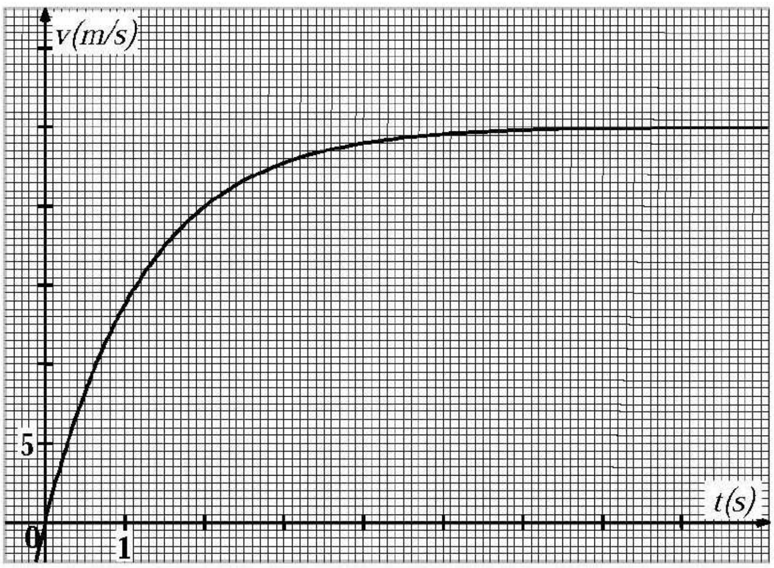
التمرين(6): (بكالوريا 2013 – ع ت) (التمرين: 033 في بنك التمارين) (**)

تسقط حبة برد كروية الشكل، قطرها $D = 3\,cm$ ، كتلتها $m = 13\,g$ ، دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$ من النقطة O ترتفع بـ $1500\,m$ عن سطح الأرض نعتبرها كمبدأ للمحور الشاقولي (Oz).

أولا : نفرض حبة البرد تسقط سقوطا حرا.

1– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، جد المعادلتين الزمنيتين لسرعة وموضع G مركز عطالتيهما.

2– احسب قيمة السرعة لحظة وصولها إلى سطح الأرض.



ثانيا : في الواقع تخضع حبة البرد بالإضافة لقوة ثقلها $\vec{P}$ إلى دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ وقوة احتكاك $\vec{f}$ المتناسبة طردا مع مربع السرعة حيث $f = kv^2$.

1– بالتحليل البعدي حدد وحدة المعامل k في النظام الدولي للوحدات.

2– اكتب عبارة قوة دافعة أرخميدس، ثم احسب شدتها وقارنها مع شدة قوة الثقل. ماذا تستنتج؟

3– بإهمال قوة دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$:

أ– جد المعادلة التفاضلية للحركة، ثم بين أنه يمكن كتابتها على الشكل: $\frac{dv}{dt} = A - Bv^2$.

ب– استنتج العبارة الحرفية للسرعة الحدية v_ℓ التي تبلغها حبة البرد.

جـ– جد بيانيا قيمة v_ℓ السرعة الحدية، ثم استنتج قيمة k .

د– قارن بين السرعتين التي تم حسابهما في السؤالين (أولا–2) و(ثانيا–3–جـ). ماذا تستنتج؟

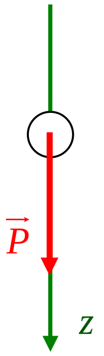
المعطيات : حجم الكرة: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ، الكتلة الحجمية للهواء: $\rho = 1{,}3\,kg.m^{-3}$ ، $g = 9{,}8\,m.s^{-2}$.

الحل المفصل:

أولا:

1- إيجاد المعادلتين الزمنيتين لسرعة وموضع G مركز عطالتيهما:

- الجملة المدروسة: حبة برد.
- مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي.
- القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:



$$\sum F_{ext} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{P} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$P = m.a \Rightarrow m.g = m.a \Rightarrow a = g \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g$$

بالتكامل نجد:

$$v = gt + v_0$$

من الشروط الابتدائية $v_0 = 0$، منه تكون المعادلة :

$$v = gt$$

ونكتب أيضا:

$$\frac{dz}{dt} = gt$$

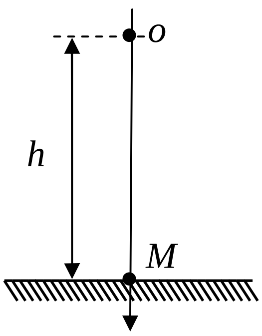
بالتكامل نجد:

$$z = \frac{1}{2}gt^2 + z_0$$

من الشروط الابتدائية $z_0 = 0$، منه تكون المعادلة :

$$z = \frac{1}{2}gt^2$$

2- حساب قيمة السرعة لحظة وصولها إلى سطح الأرض:



إذا اعتبرنا الموضع M هو موضع سقوط حبة البرد على الأرض عندها يكون $z_M = 1500\ m$،

بالتعويض في المعادلة $z(t)$:

$$z_M = \frac{1}{2}g.t_M^2 \Rightarrow z_M = \sqrt{\frac{2z_M}{g}} \Rightarrow z_M = \sqrt{\frac{2\times1500}{9,8}} = 17,50\,s$$

بالتعويض في المعادلة $v(t)$:

$$v_M = g.t_M = 9,8\times17,50 = 171,5\ m/s$$

ثانيا:

1– تحديد وحدة المعامل k في النظام الدولي للوحدات:

$$f = k\ v^2 \Rightarrow k = \frac{f}{v^2} \Rightarrow [k] = \frac{[f]}{[v]^2}$$

حسب قانون نيوتن الثاني:

$$F = m.a \Rightarrow [F] = [m].[a]$$

و منه:

$$[k] = \frac{[m].[a]}{[v]^2} \Rightarrow [k] = \frac{[m].\frac{\cancel{[l]}}{\cancel{[t]^2}}}{\frac{[l]^{\cancel{2}}}{\cancel{[t]^2}}} \Rightarrow [k] = \frac{[m]}{[l]}$$

ومنه وحدة k في جملة الوحدات الدولية هي: $kg.m^{-1}$.

2– كتابة عبارة قوة دافعة أرخميدس وحساب شدتها:

$$\Pi = \rho V g \Rightarrow \Pi = \rho(\frac{4}{3}.\pi r^3)g \Rightarrow \Pi = \frac{4}{3}.\rho.\pi.(\frac{D}{2})^3.g \Rightarrow \Pi = \frac{4}{3}.\rho.\pi.\frac{D^3}{8}.g \Rightarrow \Pi = \frac{\rho.\pi.D^3.g}{6}$$

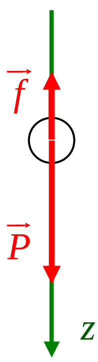
$$\Pi = \frac{1,3 \times 3,14 \times (0,03)^2 \times 9,8}{6} = 1,8 \times 10^{-4}\ N$$

● مقارنة شدة دافعة ارخميدس مع شدة قوة الثقل. والاستنتاج:

- $P = m.g\ = 13\ .\ 10^{-3}.\ 9.8 = \ 0.1274\ N \Rightarrow P = 13 \times 10^{-3} \times 9.8 = 0,1274\ N$
- $\frac{P}{\Pi} = \frac{0,1274}{1,8 \times 10^{-4}} = 708 \Rightarrow \ P = 708P$

نلاحظ أن Π أكبر بكثير، نستنتج أنه يمكن إهمال دافعة أرخميدس أمام قوة الثقل.

3– أ– إجاد المعادلة التفاضلية للحركة، وتبيين أنه يمكن كتابتها على الشكل $\frac{dv}{dt} = A - Bv^2$:



– الجملة المدروسة : كرة برد.

– مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي.

– القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$، قوى الاحتكاك $\vec{f}$.

– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{f} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$P - f = m.a \Rightarrow mg - kv = m\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} + kv^2 = mg \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$$

هي من الشكل $\frac{dv}{dt} = A - Bv^2$، حيث: $A = g$، $B = \frac{k}{m}$.

ب- استنتاج العبارة الحرفية للسرعة الحدية v_ℓ التي تبلغها حبة البرد:

في النظام الدائم أين: $v = v_\ell$، $\frac{dv}{dt} = 0$، يكون بالتعويض في المعادلة التفاضلية:

$$0 = g - \frac{k}{m}v_l^2 \Rightarrow g = \frac{k}{m}v_l^2 \Rightarrow v_l = \sqrt{\frac{m.g}{k}}$$

جـ- إيجاد بيانيا قيمة v_ℓ السرعة الحدية:

من البيان عند النظام الدائم يكون:

$$v_\ell = 5 \times 5 = 25\ m/s$$

● استنتاج قيمة k:

مما سبق:

$$v_l = \sqrt{\frac{m.g}{k}} \Rightarrow v_l^2 = \frac{m.g}{k} \Rightarrow k = \frac{m.g}{v_l^2} \Rightarrow k = \frac{13\times10^{-3}\times9{,}8}{(25)^2} = 2{,}04\times10^{-4}\ kg/m$$

د- المقارنة بين السرعتين التي تم حسابهما في السؤالين (أولا-2) و (ثانيا-3-جـ)، والاستنتاج:

نلاحظ: $v_\ell < v_M$، نستنتج أن تأثير الهواء يخفف من سرعة بلوغ الأرض.

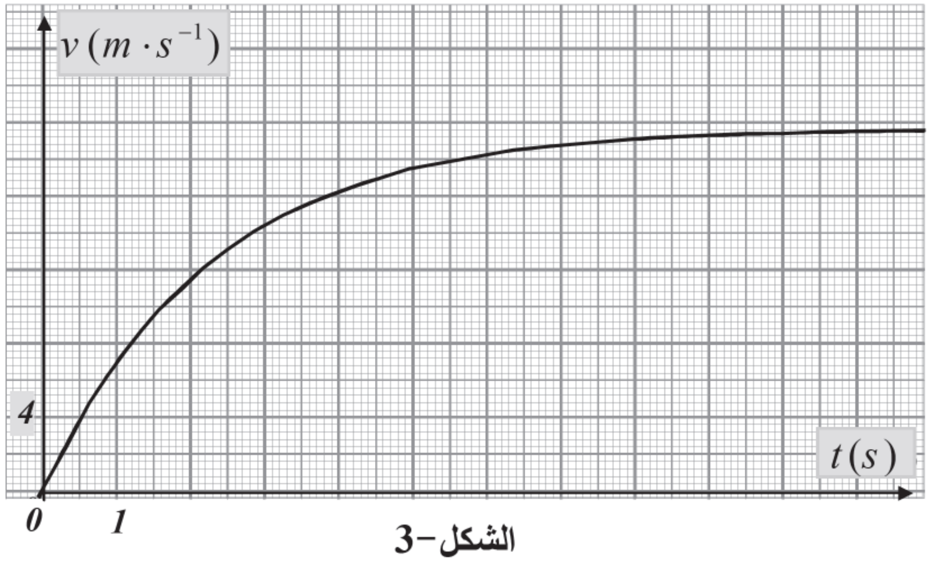
التمرين(7): مقترح (بكالوريا 2012 - علوم تجريبية) (الحل المفصل - التمرين: 059 في بنك التمارين) (**)

ندرس في مرجع سطحي أرضي نعتبره غاليليا حركة سقوط كرية في الهواء.(الشكل-3) يمثل تطور سرعة مركز عطالة الكرية v بدلالة الزمن t.

1- من البيان:

أ- حدد المجال الزمني لنظامي الحركة.

ب- عين قيمة السرعة الحدية v_ℓ.



الشكل-3

ج- احسب a_0 تسارع مركز عطالة الكرية في اللحظة $t=0$. ماذا تستنتج؟

د- ما هي قيمة التسارع لحظة وصول الكرية إلى سطح الأرض؟

هـ- كم تكون قيمة الطاقة الحركية للكرية في اللحظة $t=3\ s$؟

2- مثل كيفيا مخطط السرعة $v(t)$ لحركة السقوط الشاقولي لمركز عطالة الكرية في الفراغ.

تعطى : $g=9{,}80\ m.s^{-2}$ ، كتلة الكرية: $m=30\ g$.

التمرين(8): مقترح (بكالوريا 2015 – رياضيات) (الحل المفصل – التمرين: 084 في بنك التمارين) (**)

تترك كرية كتلتها m تسقط في الهواء من ارتفاع h عن سطح الأرض دون سرعة ابتدائية.

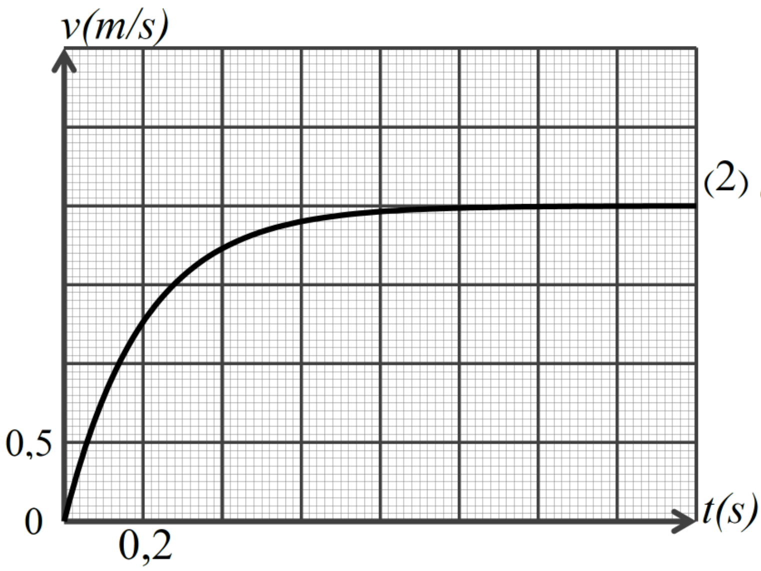
تعطى: $g=10\ m/s^2$.

1- نهمل دافعة أرخميدس ونعتبر شدة قوة مقاومة الهواء $f=kv$.

أ- مثل القوى الخارجية المؤثرة على الكرية.

ب- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في معلم Oz موجه نحو الأسفل ومرتبط بمرجع سطحي أرضي نعتبره غاليلي، أوجد المعادلة التفاضلية لسرعة الكرية.

ج- استنتج عبارة السرعة الحدية v_{lim} بدلالة: k ، m ، g.



الشكل (2)

2- إن دراسة تغيرات سرعة الكرية بدلالة الزمن مكنت من الحصول على بيان الشكل (2).

أ- استنتج من البيان قيمة السرعة الحدية v_{lim}.

ب– حدد وحدة الثابت k باستعمال التحليل البعدي ، واحسب النسبة $\frac{m}{k}$.

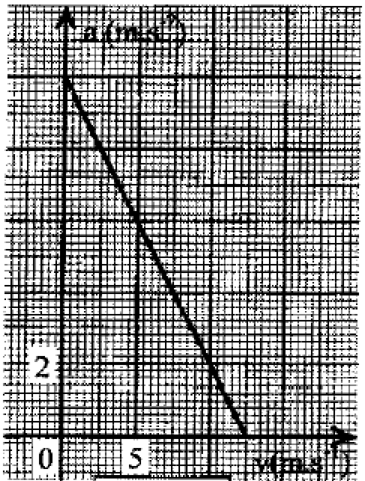
3– كيف يتطور تسارع الكرية خلال الحركة.

4– مثل كيفيا مخطط السرعة $v(t)$ لحركة السقوط الشاقولي لمركز عطالة الكرية في الفراغ.

التمرين(9): مقترح (بكالوريا 2009 – علوم تجريبية) (الحل المفصل – التمرين: 066 في بنك التمارين) (**)

يسقط مظلي كتلته مع تجهيزه $m = 100\ kg$ سقوطا شاقوليا بدءا من نقطة O بالنسبة لمعلم أرضي دون سرعة ابتدائية.

يخضع أثناء سقوطه إلى قوة مقاومة الهواء عبارتها من الشكل $f = k\ v$ (تهمل دافعة أرخميدس).



الشكل 2

يمثل البيان الشكل–2– تغيرات (a) تسارع مركز عطالة المظلي بدلالة السرعة (v).

1– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، بين أن المعادلة التفاضلية لحركة المظلي من الشكل:

$\frac{dv}{dt} = Av + B$. حيث أن A ، B ثابتان يطلب تعيين عبارتيهما.

2– عين بيانيا قيمتي:

– شدة مجال الجاذبية الأرضية (g)، السرعة الحدية للمظلي (v_ℓ).

3– تتميز الحركة السابقة بقيمة المقدار $\frac{k}{m}$ ، حدد وحدة هذا المقدار. وأحسب قيمته من البيان.

4– أحسب قيمة k.

5– مثل كيفيا تغيرات سرعة المظلي بدلالة الزمن في المجال الزمني $0 \le t \le 7s$.

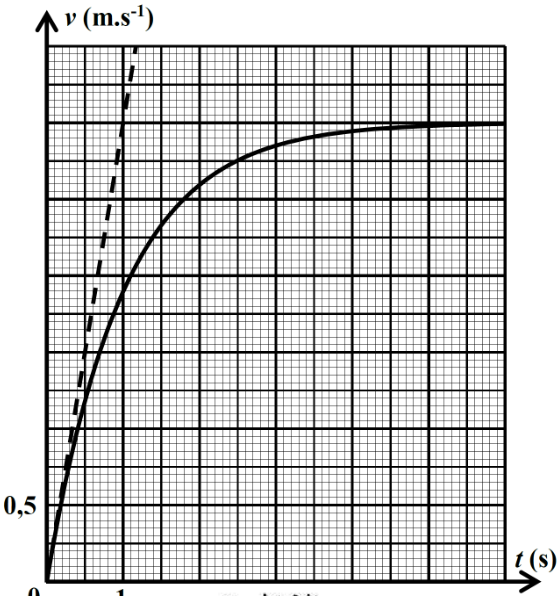
التمرين(10): مقترح (بكالوريا 2018 – رياضيات) (الحل المفصل – التمرين: 114 في بنك التمارين) (**)

بالون مطاطي كروي الشكل مملوء بالهواء، كتلته $m = 20\ g$ ومركز عطالته G، يترك ليسقط في الهواء دون سرعة ابتدائية عند اللحظة $t = 0$ وفق محور شاقولي $(\overrightarrow{oz})$ موجه نحو الأسفل، مبدؤه يوافق مبدأ الأزمنة $t = 0$.

تمكنا عن طريق التصوير المتعاقب من رسم منحنى تغيرات السرعة $v(t)$ لمركز عطالة البالون بدلالة الزمن t كما في الشكل–1–.

نعتبر أن البالون يخضع أثناء حركته لقوة احتكاك $\vec{f} = -k\vec{v}$ حيث k ثابت يمثل معامل الاحتكاك.

1– مثل القوى المؤثرة على البالون في الحالتين:



الشكل-1-

أ) لحظة الانطلاق التي توافق $t=0$.

ب) خلال الحركة.

2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة البالون G في معلم عطالي:

أ) بين أن المعادلة التفاضلية للسرعة تكتب على الشكل: $\frac{dv}{dt}+Av=B$ محددا عبارة الثابت A بدلالة k و m وعبارة الثابت B بدلالة تسارع الجاذبية الأرضية g، الكتلة الحجمية للهواء ρ_0 و الكتلة الحجمية للبالون ρ.

ب) ما هو المدلول الفيزيائي للثابت B؟

3- باستعمال المنحنى البياني المعطى في الشكل-1- جد قيمة كل من:

أ) السرعة الحدية v_ℓ.

ب) التسارع a_0 عند اللحظة $t=0$.

جـ) ثابت الزمن τ المميز للحركة و الثابت k.

د) شدة قوة دافعة أرخميدس.

4- نملأ البالون بالماء بحيث يمكن إهمال باقي القوى أمام قوة الثقل، ما طبيعة السقوط في هذه الحالة ؟ ثم مثل كيفيا منحنى تغيرات السرعة بدلالة الزمن عندئذ.

يعطى : $g=10\ m.s^{-2}$.

التمرين(11): مقترح (بكالوريا 2017 – علوم تجريبية) (الحل المفصل – التمرين: 107 في بنك التمارين) (**)

يستعمل الديوان الوطني للأرصاد الجوية لأجل معرفة تركيب الغلاف الجوي بالون مسبار ، من المطاط الخفيف المرن جدا ، معبأ بالهيليوم ، معلق به علبة تحتوي على تجهيز علمي لرصد الطقس والإتصال اللاسلكي بالمحطة ينفجر بالون المسبار عندما يصل إلى ارتفاع h عن سطح الأرض، حينئذ تفتح مظلة هبوط العلبة المتصلة بها مع التجهيز العلمي ، فتعيده إلى الأرض.

ننمذج قيمة $\vec{f}$ قوة احتكاك الهواء على الجملة (مظلة + علبة) بـ $f=k\,v^2$ حيث: k ثابت موجب من أجل ارتفاعات معتبرة ، و v سرعة مركز عطالة الجملة.

بفرض أنه لا توجد رياح (الحركة تكون شاقولية)، وندرس حركة مركز عطالة الجملة في مرجع أرضي نعتبره غاليليا.

1. أ) مثل القوى المطبقة على مركز عطالة الجملة (مظلة + علبة) في بداية السقوط $(t=0)$ وفي النظام الدائم.

ب) أعط العبارة الحرفية الشعاعية لدافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$.

جـ) ذكر بنص القانون الثاني لنيوتن ثم اكتب العبارة الشعاعية للقوى المطبقة على الجملة في النظام الانتقالي.

د) جِد المعادلة التفاضلية للسرعة.

هـ) استخرج عبارة السرعة الحدية v_ℓ، ثم احسب قيمتها.

و) انطلاقا من عبارة السرعة الحدية وباستعمال التحليل البعدي ، حدد وحدة k في الجملة الدولية للوحدات.

2) جِد قيمة a_0 عبارة تسارع مركز عطالة الجملة (مظلي + علبة) عند اللحظة $t=0$ ، ثم احسب قيمته.

3) إذا اعتبرنا سقوط العلبة حرا:

أ) عرف السقوط الحر .

ب) عين قيمة التسارع في هذه الحالة.

ج) إذا اعتبرنا أن العلبة سقطت من ارتفاع $1000\ m$ من سطح الأرض ، احسب سرعتها لحظة ارتطامها بالأرض بـ km/h ، ماذا تتوقع أن يحدث للعلبة في هذه الحالة مع التعليل وماذا تستنتج؟

د) كيف تتوقع شكل البيانين: بيان السرعة $v=f(t)$ وبيان التسارع $a=g(t)$ (ارسم كيفيا البيانين) ؟

تعطى : $k=1,32\ S.I$ ، $\Pi=3N$ ، $g=9,8\ m.s^{-2}$ ، $m=2,5\ kg$.

التمرين(12): مقترح (الحل المفصل – التمرين: 133 في بنك التمارين) (**)

قام تلميذ من القسم النهائي بزيارة موقع الـ $NASA$ $(www.nasa.gov)$ لإجراء بحث حول طبيعة القوى المعينة للأجسام الساقطة، فوجد مايلي:

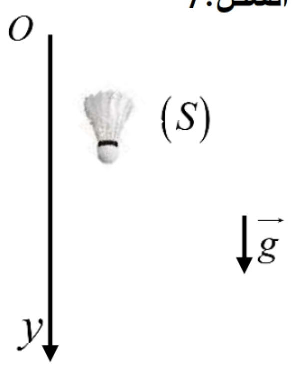
- في حالة الأجسام ذات السرعات الصغيرة تعطى عبارة قوى الاحتكاك بالعلاقة: $\vec{f}_1=k_1.\vec{v}$.
- في حالة الأجسام ذات السرعات الكبيرة تعطى عبارة قوى الاحتكاك بالعلاقة: $\vec{f}_2=k_2.v^2.\vec{j}$.

يهدف هذا التمرين إلى دراسة حركة السقوط الشاقولي لكرة الريشة $(Bad\min ton)$ **في الهواء.**

- **المعطيات:**
  - مميزات كرة الريشة: كتلة $m=22\,g$ حجم V_S
  - قيمة الجاذبية الأرضية: $g=9,8\,m.s^{-2}$
  - معامل الاحتكاك في حالة السرعات الصغيرة: $k_1=0,023\,kg.s^{-1}$
  - معامل الاحتكاك في حالة السرعات الكبيرة: $k_2=2,4\,kg.m^{-1}$
  - الكتلة الحجمية للهواء: $\rho_{air}=1,2\,kg.m^{-3}$

- **الجزء الأول:**

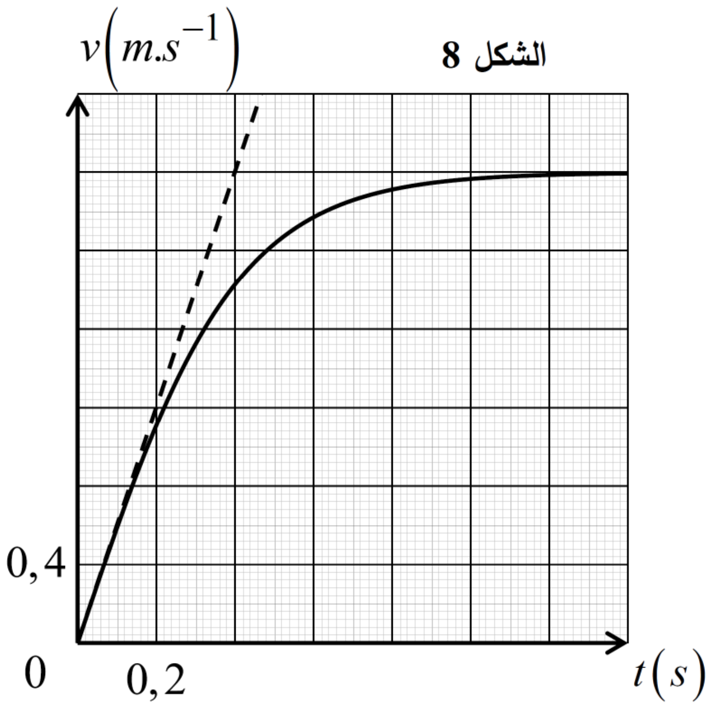
الشكل.7



قام التلميذ بترك كرة الريشة (S) لتسقط دون سرعة ابتدائية شاقوليا نحو الأسفل في حقل الجاذبية المنتظم (الشكل.7). باستعمال برمجية مناسبة برسم منحنى السرعة $v(t)$ بدلالة الزمن الموضح في الشكل.8

1. حدد مقصود العبارة: حقل الجاذبية المنتظم.
2. تخضع كرة الريشة خلال حركتها إلى ثلاث قوى: قوة الثقل $\vec{P}$، قوة الاحتكاك $\vec{f}_n$، دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$.

2.2. أذكر مميزات دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$.



2.2. مثل القوى المؤثرة على كرة الريشة خلال حركتها.

3. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة كرة الريشة في مرجع مناسب، وباعتبار شدة قوة الاحتكاك مع الهواء تعطى بالعبارة $\vec{f}_n = k_n.v^n.\vec{k}$، حيث k_n معامل الاحتكاك و n عدد طبيعي.

1.3. أثبت أن المعادلة التفاضلية لتطور سرعة مركز عطالة الكرة من الشكل:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \cdot v^n = g\left(1 - \frac{\rho_{air}.V_S}{m}\right)$$

2.3. جد عبارة كل من a_0 التسارع الابتدائي، $v_{\lim}$ السرعة الحدية.

4. سمحت برمجية مناسبة برسم منحنى السرعة $v(t)$ بدلالة الزمن الموضح في الشكل.8.

1.4. أحسب قيمة التسارع الابتدائي a_0، واستنتج قيمة V_S حجم كرة الريشة.

2.4. حدد قيمة $v_{\lim}$ السرعة الحدية، واستخرج قيمة n.

- **الجزء الثاني:**

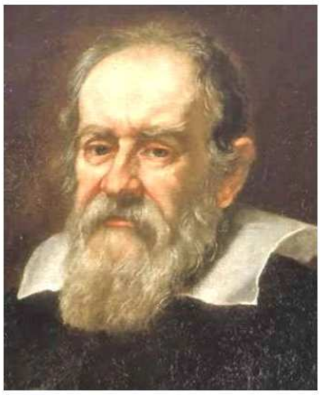
قام التلميذ بنزع الجزء العلوي لكرة الريشة، ثم تركها تسقط دون سرعة ابتدائية من ارتفاع h عن سطح الأرض، وبعد الدراسة قام بحساب سرعة وصول الكرة إلى سطح الأرض فوجدها $v_f = 5{,}88 m.s^{-1}$.

1. حدد تأثير نزع الجزء العلوي لكرة الريشة على الحركة.
2. عرف السقوط الحر.
3. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة الكرة في مرجع سطحي أرضي، جد المعادلة التفاضلية للسرعة.
4. استنتج المعادلات الزمنية للسرعة $v(t)$ والموضع $y(t)$.
5. أحسب الارتفاع h الذي سقطت منه الكرة.

تمارين محلولة 2

التمارين ذات درجة ثانية من الصعوبة

التمرين(13): (بكالوريا 2022 – علوم تجريبية) (التمرين: 093 في بنك التمارين) (**)



غاليلي (1642-1564)

شكَّل سقوط الأجسام موضوع تساؤل الكثير من العلماء مُنذ القِدم، حيث تصَّور أرسطو في القرن الرابع قبل الميلاد أنَّ سرعة الأجسام أثناء سقوطها تتناسب مع ثقلها و في بداية القرن السابع عشر اهتم الإيطالي غاليلي بدراسة حركة أجسام مُختلفة بتركها تسقط من أعلى برج بيزا، فلاحظ أنّ أجساما ذات كتل مُختلفة تسقط بنفس الكيفية في غياب تأثير الهواء (على عكس ما كان يظنه أرسطو).

للتحقق من بعض النتائج المُتوصل إليها، ندرس في هذا التمرين تأثير كتلة الجسم على تطور سرعته خلال السقوط الشاقولي في الهواء.

1. دراسة السقوط الشاقولي بإهمال قوى الاحتكاك وتأثير الهواء:

عند لحظة $t=0$ نعتبرها مبدأ للأزمنة، نترك كرة كتلتها m نعتبرها نقطية بدون سرعة ابتدائية من نقطة O تقع أعلى برج ارتفاعه $h=90m$ عن سطح الأرض. ندرس حركة الكرة في معلم $(o,\vec{k})$ شاقولي موجه نحو الأسفل مُرتبط بسطح الأرض، نعتبره عطاليا (نأخذ $g=9{,}8m.s^{-2}$).

1.1. عَرّف المرجع العطالي.

2.1. هل يكون مركز عطالة الكرة في سقوط حُر؟ برّر إجابتك.

3.1. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن حدّد طبيعة حركة مركز عطالة الكرة ثم اكتب المعادلة الزمنية لكل من السرعة $v(t)$ والحركة $z(t)$.

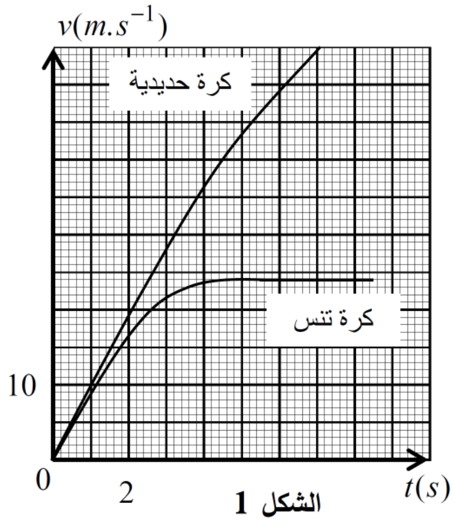
4.1. احسب سرعة مركز عطالة الكرة عند بلوغها سطح الأرض ثم استنتج مُدّة السقوط عندئذٍ.

5.1. هل تتعلق سرعة الكرة أثناء سقوطها بكتلتها في هذه الحالة؟ علّل.

2. دراسة حركة سقوط كرتين في الهواء:

ندرس في هذا الجزء السقوط في الهواء لكرة حديدية وكرة تنس نعتبرهما نقطيتان، تمّ تحريرهما عند نفس اللحظة $t=0$ بدون سرعة ابتدائية من أعلى نفس البرج السابق وفي نفس المعلم $(o,\vec{k})$ مبدؤه منطبق مع أعلى البرج.

تخضع كل كرة أثناء سقوطها في الهواء لثقلها ولقوة احتكاك الهواء $\vec{f}$ (نهمل دافعة أرخميدس أمام هاتين القوتين).



الشكل 1

نقبل أن شدة $\overrightarrow{f}$ تُكتب $f = k.v^2$ حيث k مُعامل الاحتكاك و v سرعة مركز عطالة كل كرة عند لحظة t.

دلَّت القياسات عن بلوغ الكرة الحديدية سطح الأرض عند اللحظة $t = 4,4\,s$ وبعد تأخر بثانية تصل كرة التنس إلى سطح الأرض. (نأخذ $g = 9,8\,m.s^{-2}$).

معطيات:

الجملة المدروسة	الكرة الحديدية	كرة التنس
الكتلة $m(g)$	700	56
معامل الاحتكاك $k(SI)$	$1,19\times10^{-3}$	$9,50\times10^{-4}$

1.2. باستعمال التحليل البُعدي، جِدْ الوحدة الدولية للثابت k.

2.2. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن جِدْ المعادلة التفاضلية التي تُحققها سرعة مركز عطالة إحدى الكرتين $v(t)$.

3.2. بيّن أنّ السرعة الحدية $v_{\lim}$ تُكتب بالعبارة $v_{\lim} = \sqrt{\dfrac{m.g}{k}}$.

4.2. احسب السرعة الحدية $v_{\lim}$ لكل كرة.

5.2. تمّ تسجيل سرعة الكرتين خلال الزمن والحصول ببرنامج معلوماتي على المنحنيين المُمثلين في(الشكل1).

1.5.2. عَيّن بيانيا سرعة كل كرة لحظة بلوغهما سطح الأرض؟ علّل.

2.5.2. هل بلغت الكرتان النظام الدائم عند بلوغهما سطح الأرض؟ علّل.

3.5.2. هل تتعلق سرعة الكرة بكتلتيهما في هذه الحالة؟ علّل.

3. استنادا إلى الدراستين السابقتين، اشرح تأثير كتلة الجسم على تطور سرعة مركز عطالته أثناء السقوط الشاقولي.

<u>الحل المفصل:</u>

<u>1– دراسة السقوط الشاقولي بإهمال قوى الاحتكاك وتأثيرات الهواء:</u>

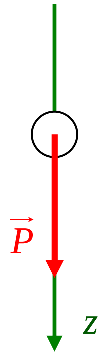
<u>1.1. تعريف المرجع العطالي:</u>

المرجع العطالي هو المرجع الذي يتحقق فيه مبدأ العطالة.

<u>2.1. مركز عطالة الكرة في سقوط حر:</u>

بما أن دراسة السقوط الشاقولي تمت بإهمال قوى الاحتكاك مع الكرة المملة في $\overrightarrow{f}$ وتأثير الهواء الممثلة في دافعة أرخميدس $\overrightarrow{\Pi}$، يكون مركز مركز عطالة الكرة خاضع إلى تأثير ثقله $\overrightarrow{P}$، وبالتالي هو في سقوط حر.

<u>3.3. طبيعة حركة مركز عطالة الكرة:</u>



– الجملة المدروسة: كرة.

– مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o, \overrightarrow{j})$.

– القوة الخارجية المؤثرة: الثقل $\overrightarrow{P}$.

– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum F_{ext} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{P} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$P = m.a \Rightarrow m.g = m.a \Rightarrow a = g = 9,8t$$

g ثابت ومنه a ثابت وكون أن المسار مستقيم فالحركة مستقيمة متغيرة بانتظام وهي متسارعة لأن $a.v > 0$.

<u>– المعادلة الزمنية لكل من السرعة $v(t)$ والحركة $z(t)$:</u>

مما سبق: $a = g$ ونكتب:

$$\frac{dv}{dt} = 9,8$$

بالتكامل نجد:

$$v = 9,8t + v_0$$

من الشروط الابتدائية لما $t = 0$ فإن $v_0 = 0$، ومنه:

$$v = 9,8\ t$$

– نكتب أيضا:

$$\frac{dz}{dt} = 9,8\ t$$

بالتكامل نجد:

$$z = 4,9\ t^2 + z_0$$

من الشروط الابتدائية: لما $t = 0$ فإن $z_0 = 0$، ومنه:

$$z = 4,9\ t^2$$

<u>4.1. حساب سرعة مركز عطالة الكرة عند بلوغها سطح الأرض:</u>

إذا اعتبرنا M موضع سقوط الكرة على سطح الأرض، انطلاقا من الموضع o، يكون:

$$v_M^2 - v_O^2 = 2a.h$$

وحيث أن: $v_O = 0$، $a = g = 9,8\,m.s^{-2}$ و $z_M = h = 90\,m$، يكون:

$$v_M = \sqrt{2\times 9,8\times 90} = 42\,m.s^{-1}$$

<u>– مُدّة السقوط عندئذٍ:</u>

من المعادلة الزمنية للسرعة $v(t)$ يكون:

$$v_M = 9,8t_M \Rightarrow t_M = \frac{v_M}{9,8} = \frac{42}{9,8} = 4,29\,s$$

<u>5.1. تتعلق سرعة الكرة أثناء سقوطها بكتلتها في هذه الحالة مع التعليل:</u>

حسب العلاقة $v = gt$ فإن سرعة السقوط الحر للأجسام في الهواء لا تتعلق بكتلها.

2. دراسة حركة سقوط كرتين في الهواء:

1.2. الوحدة الدولية للثابت k:

$$f = k.v^2 \Rightarrow k = \frac{f}{v^2} \Rightarrow [k] = \frac{[f]}{[v]^2}$$

وحيث أن:

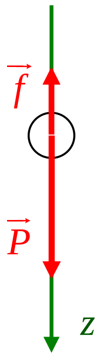
- $F = m.a \Rightarrow [f] = M.\frac{L}{T^2}$
- $[v] = \frac{L}{T} \Rightarrow [v]^2 = \frac{L^2}{T^2}$

يكون:

$$[k] = \frac{M.\frac{L}{T^2}}{\frac{L^2}{T^2}} \Rightarrow [k] = \frac{M}{L}$$

ومنه وحدة k هي: $kg.m^{-1}$

2.2. المعادلة التفاضلية التي تُحققها سرعة مركز عطالة إحدى الكرتين $v(t)$:



- الجملة المدروسة: كرة.
- مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{j})$.
- القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} + \vec{f} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$P - f = m.a \Rightarrow mg - kv^2 = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} + kv^2 = mg \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g$$

3.2. تبيين أنّ السرعة الحدية $v_{\lim}$ تُكتب بالعبارة $v_{\lim} = \sqrt{\frac{m.g}{k}}$:

في النظام الدائم أين: $v = v_{\lim}$ ، $\frac{dv}{dt} = 0$ ، نكتب من المعادلة التفاضلية:

$$\frac{k}{m}v_m^2 = g \Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{m.g}{k}}$$

4.2. حساب السرعة الحدية $v_{\lim}$ لكل كرة:

اعتمادا على عبارة $v_{\lim}$ السابقة:

– بالنسبة للكرة الحديدة:

$$v_m = \sqrt{\frac{0,7 \times 9,8}{1,19 \times 10^{-3}}} = 75,93\, m.s^{-1}$$

– بالنسبة لكرة التنس:

$$v_m = \sqrt{\frac{0,056 \times 9,8}{9,50 \times 10^{-4}}} = 24,04\, m.s^{-1}$$

1.5.2. تعيين بيانيا سرعة كل كرة لحظة بلوغهما سطح الأرض مع التعليل:

– بالنسبة للكرة الحديدة لما $t = 4,4\, s$، بالإسقاط نجد: $v = 39\, m.s^{-1}$.

– بالنسبة لكرة التنس لما $t = 4,4 + 1 = 5,4\, s$، بالإسقاط نجد: $v = 24\, m.s^{-1}$.

2.5.2. بلوغ الكرتان النظام الدائم عند بلوغهما سطح الأرض مع علّل:

– بالنسبة للكرة الحديدية: لما $t = 4,4\, s$ وجدنا بالإسقاط: $v = 39\, m/s$، نلاحظ $v < v_{\lim}$ ، ومنه الكرة الحديدة لم تبلغ النظام الدائم لحظة اصطدامها بالأرض.

– بالنسبة لكرة التنس: لما $t = 5,4\, s$ وجدنا بالإسقاط: $v = 24,04\, m/s$، نلاحظ $v = v_{\lim}$ ، ومنه فإن كرة التنس بلغت النظام الدائم لحظة اصطدامها بالأرض.

3.5.2. تعلق سرعة الكرة بكتلتيهما في هذه الحالة مع التعليل:

مما سبق:

- من عبارة السرعة $v_{\lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$، كلما كانت الكتلة كبيرة كانت سرعتها أكبر.
- عدم تطابق منحني السرعة $v(t)$ بالنسبة للكرتين الحديدية والتنس.
- بلوغ كرة التنس النظام الدائم وعدم بلوغه الكرة الحديدية

كل هذا يدل على أن سرعة الكرة تتعلق بكتلتها.

3. شرح تأثير كتلة الجسم على تطور سرعة مركز عطالته أثناء السقوط الشاقولي:

أثناء سقوط الأجسام في الهواء فيب حالة إهمال تأثير الهواء سكون السرعة مستقلة عن كتلتها، بينما في حالة وجود تأثير للهواء فإن السرعة تتعلق بالكتلة، حيث كلما ازدادت الكتلة ازدادت السرعة إلى أن تتثبت في النظام الدائم.

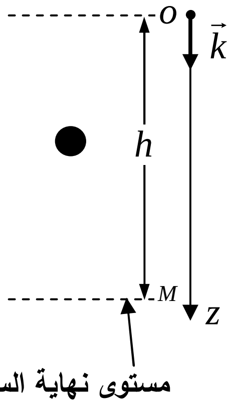
التمرين(14): (التمرين: 090 في بنك التمارين) (**)

إن الأجسام ذات الكتل المختلفة تسقط بنفس السرعة في حالة عدم وجود مقاومة الهواء، هذا يعني أن الأجسام تسقط بنفس التسارع بسبب الجاذبية الأرضية. إن هذه النظرية عمد الكثير من العلماء لإثباتها بدءا من العالم غاليلي، وهي من المواضيع الشيقة لمحبي التجارب العلمية من بينهم صحفي قناة BBC الذي قام بها في أكبر غرفة فراغ في العالم بمنشأة "**ناسا**" الفضائية في "كليفلند" بالولايات المتحدة الأمريكية، حيث تركت كرة و ريشة من نفس الموضع .

يهدف التمرين الى دراسة حركة السقوط الشاقولي للأجسام في حقل الجاذبية الأرضية:

المعطيات:

- الجاذبية الأرضية $g = 10\,m.s^{-2}$ ؛
- الكتلة الحجمية لكرية الفلين $\rho_L = 120\,Kg.m^{-3}$ ؛
- الكتلة الحجمية للهواء $\rho_{air} = 1,3\,Kg.m^{-3}$ ؛
- حجم الكرية $V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$.



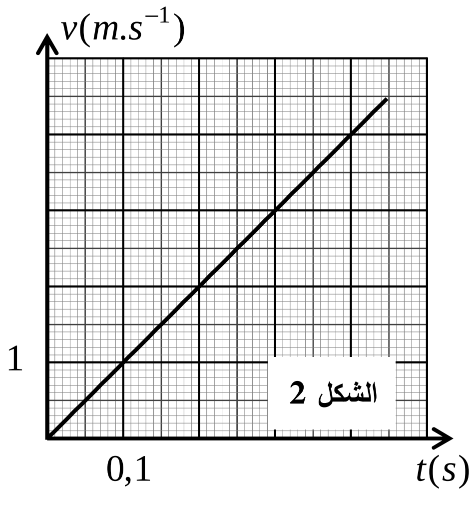
الشكل 1

I . دراسة حركة السقوط الحر للأجسام في الفراغ:

نترك ثلاثة أجسام مختلفة الكتلة (كرة حديدية، كرية فلين، ريشة طائر) تسقط دون سرعة ابتدائية من ارتفاع h داخل أنبوب مفرغ من الهواء مثبت شاقوليا من نقطة O تقع أعلى الأنبوب في لحظة نعتبرها كمبدأ للأزمنة و الفواصل الشكل1.

يمثّل الشكل2 منحنى تغيرات سرعة الأجسام بدلالة الزمن.

1. عرف السقوط الحر.
2. بين أن طبيعة حركة الأجسام مستقلة عن كتلتها.
3. اكتب المعادلات الزمنية لحركة السقوط الحر $v(t)$ (المعادلة الزمنية للسرعة) و $z(t)$ (المعادلة الزمنية للفاصلة أوالموضع)
4. اوجد بيانيا قيمة الارتفاع h، ثم تأكد من النتيجة حسابيا بالاعتماد على المعادلة $z(t)$.



الشكل 2

II . دراسة حركة السقوط الشاقولي لكرية الفلين في الهواء:

نترك كرية فلين نصف قطرها $r = 2cm$ تسقط شاقوليا دون سرعة ابتدائية في الهواء. تخضع كرية الفلين أثناء سقوطها لقوة إحتكاك $\vec{f}$ تتناسب شدتها طردا مع قيمة سرعتها $f = kv$.

1. تحقّق أنّ كتلة كرية الفلين هي: $m = 4g$.

2. تحقّق أنّ النسبة بين شدّة دافعة أرخميدس وشدة قوة ثقل الكرية تكتب من الشكل: $\frac{\Pi}{P}=\frac{\rho_{air}}{\rho_L}$

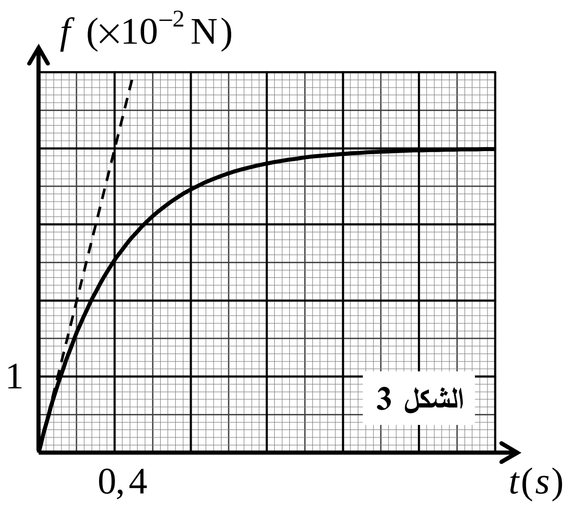
3. تهمل دافعة أرخميدس أمام قوة ثقل الكرية إذا كانت شدة دافعة أرخميدس أقل من 2% من شدة قوة الثقل، هل تهمل دافعة أرخميدس في هذه التجربة؟

4. نعتبر أن دافعة أرخميديس مهملة، بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة المدروسة (كرية)، بيّن أن المعادلة التفاضلية التي تحققها شدة قوة الاحتكاك f تُكتب بالشكل: $\frac{df}{dt}+\frac{1}{\tau}f=B$

حيث τ و B ثابتين يطلب إيجاد عبارة كل منهما.

5. مستعملا التحليل البعدي جد وحدة قياس معامل الاحتكاك k في جملة الوحدات الدولية.

6. لدراسة حركة سقوط الكرية استعملت برمجية خاصة، مكنتنا من الحصول على بيان الشكل 3.



الشكل 3

اعتمادا على المنحنى البياني والمعادلة التفاضلية السابقة اوجد ما يلي:

1.6. ثابت الزمن المميز للحركة τ، ثم استنتج قيمة معامل الإحتكاك k.

2.6. السرعة الحدية $v_{\lim}$.

3.6. شدّة التسارع الإبتدائي a_0.

الحل المفصل:

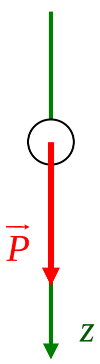
I. دراسة حركة السقوط الحر للأجسام في الفراغ:

1. تعريف السقوط الحر:

هو سقوط حر يخضع فيه الجسم إلى تأثير ثقله فقط و تهمل كل تأثيرات الهواء.

2. إثبات أن طبيعة حركة الجسمين مستقلة عن كتلتيهما:

السقوط تم في الفراغ يعني كل من جسم يخضع إلى تأثير ثقله فقط، نبحث عن عبارة تسارع الجسم في هذه الحالة.



– الجملة المدروسة: جسم

– مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{k})$.

– القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$.

– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext}=m\vec{a}_G$$

$$\vec{P}=m\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور (oz)نجد:

$$P = ma \Rightarrow mg = ma \Rightarrow a = g$$

نلاحظ أن التسارع a ثابت لا يتعلق بالكتلة، إذن حركة الأجسام في الفراغ مستقلة عن الكتلة.

3. كتابة المعادلة الزمنية $v(t)$:

اعتمادا على ما سبق نكتب:

$$a = g \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g = 10$$

بالتكامل نجد:

$$v = 10t + v_0$$

من الشروط الابتدائية لما $t = 0$ فإن $v_0 = 0$، ومنه:

$$v = 10t$$

● كتابة المعادلة الزمنية $z(t)$:

اعتمادا على ما سبق نكتب:

$$v = 10t \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 10t$$

بالتكامل نجد:

$$z = 5t^2 + z_0$$

من الشروط الابتدائية لدينا $z_0 = 0$، ومنه:

$$z = 5t^2$$

4. إيجاد الإرتفاع h:

باستعمال طريقة المساحة في حساب المسافة من مخطط السرعة $v = f(t)$ نجد:

$$h = \frac{4.5 \times 0,45}{2} \simeq 1,01m$$

▪ التأكد من النتيجة حسابيا:

لدينا:

$$t = t_M = 2,25s \Rightarrow z = h$$

بالتعويض في المعادلة $z(t)$ نجد:

$$h = 5\,.(0,45)^2 = 1,01m$$

II . دراسة حركة السقوط الشاقولي لكرية من المطاط في الهواء:

1. التحقق أنّ كتلة الكرية هي $m = 4g$:

لدينا: $\rho_L = \frac{m}{V}$ ، ومنه:

$$m = \rho_L V = \rho_L . \frac{4}{3} . \pi . r^3 \Rightarrow m = 120 \times \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times (0{,}02)^3 = 4g$$

2. التحقق بأنّ $\frac{\Pi}{P} = \frac{\rho_{air}}{\rho_L}$:

$$\begin{cases} \Pi = \rho_{air} V g \\ P = mg = \rho_L V g \end{cases} \Rightarrow \frac{\Pi}{P} = \frac{\rho_{air} V g}{\rho_L V g} \Rightarrow \frac{\Pi}{P} = \frac{\rho_{air}}{\rho_L}$$

3. دافعة أرخميدس مهملة أم لا في هذه التجربة:

نحسب النسبة: $\frac{\Pi}{P} = \frac{\rho_{air}}{\rho_L}$ فنجد:

$$\frac{\Pi}{P} = \frac{1{,}3}{120} = 1{,}1 \times 10^{-2} = 1{,}1\% < 2\%$$

إذن تهمل دافعة أرخميدس أمام قوة الثقل.

4. إثبات أن المعادلة التفاضلية التي تحققها شدة قوة الاحتكاك f تُكتب بالشكل $\frac{df}{dt} + \frac{1}{\tau} f = B$:

- الجملة المدروسة: كرية.
- مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o, \vec{k})$.
- القوة الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل (oz) نجد:

$$P - f = ma \Rightarrow mg - f = m\frac{dv}{dt}$$

وحيث أن:

$$f = kv \Rightarrow v = \frac{f}{k} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{k}\frac{df}{dt}$$

يصبح:

$$mg - f = \frac{m}{k}\frac{df}{dt} \Rightarrow \frac{m}{k}\frac{df}{dt} + f = mg \Rightarrow \frac{df}{dt} + \frac{k}{m} f = kg \text{ .}$$

بالمطابقة مع المعادلة التفاضلية المعطاة، نجد:

- $\frac{1}{\tau}=\frac{k}{m}\Rightarrow\tau=\frac{m}{k}$.
- $B=kg$

5. إيجاد وحدة قياس معامل الاحتكاك K في جملة الوحدات الدولية:

$$f=kv\Rightarrow k=\frac{f}{v}\Rightarrow [k]=\frac{[f]}{[v]}$$

حسب القانون الثاني لنيوتن:

$$F=m.a\Rightarrow [F]=[m].[a]$$

و منه:

$$[k]=\frac{[m][a]}{[v]}\Rightarrow [k]=\frac{[m].\frac{[l]}{[s]^2}}{\frac{[l]}{[s]}}\Rightarrow [k]=\frac{[m]}{[s]}$$

إذن وحدة k هي: $kg.s^{-1}$

1.6. إيجاد قيمة ثابت الزمن المميز للحركة τ:

من البيان: $\tau=0,4\,s$.

- استنتاج قيمة معامل الاحتكاك k:

مما سبق:

$$\tau=\frac{m}{k}\Rightarrow k=\frac{m}{\tau}\Rightarrow k=\frac{4\times10^{-3}}{0,4}=10^{-2}\,kg.s^{-1}$$

2.6. استنتاج قيمة السرعة الحدية $v_{\lim}$:

$$f(t)=kv(t)\Rightarrow v(t)=\frac{f(t)}{k}$$

في النظام الدائم أين $v=v_{\lim}$، $f=f_{\lim}$ ، نكتب: $v_{\lim}=\frac{f_{\lim}}{k}$

من البيان: $f=4\times10^{-2}\,N$ ، ومنه:

$$v_{\lim}=\frac{4\times10^{-2}}{10^{-2}}=4\,m.s^{-1}$$

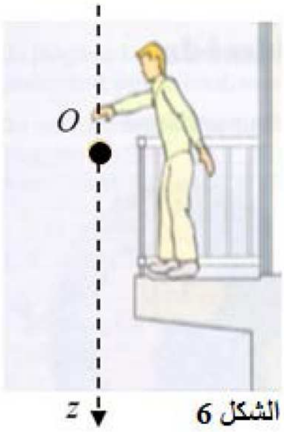
3.6. استنتاج شدّة التسارع الابتدائي a_0:

- $f(t)=kv(t)\Rightarrow v(t)=\frac{f(t)}{k}\Rightarrow$
- $a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{1}{k}\frac{df}{dt}$

عند اللحظة $t=0$ يكون:

$$a_0=\frac{1}{k}\frac{df}{dt}\Big)_{t=0} \Rightarrow a_0=\frac{1}{10^{-2}}\frac{4\times10^{-2}}{0,4}=10\,m.s^{-1}$$

التمرين(15): (بكالوريا 2020 – رياضيات) (التمرين: 076 في بنك التمارين) (**)



الشكل 6

بعد دراسته لموضوع السقوط الشاقولي للأجسام الصلبة، أراد محمد تطبيق ما درسه.

ترك من شرفة منزله كرة مطاطية صغيرة متجانسة حجمها $V=1,13\times10^{-4}m^3$ وكتلتها الحجمية $\rho=88,5\ kg.m^{-3}$.

لتسقط شاقوليا في الهواء عند اللحظة $t=0$ دون سرعة ابتدائية من النقطة O مبدأ الفواصل الواقعة على ارتفاع $h=17,6\ m$ عن سطح الأرض.

معطيات: الكتلة الحجمية للهواء $\rho_0=1,3\ kg.m^{-3}$، شدة الجاذبية الأرضية $g=9,8\ m.s^{-2}$. ولدراسة حركة الكرة اختار معلما خطيا $\left(\overrightarrow{oz}\right)$ محوره شاقولي موجه نحو الأسفل مرتبط بمرجع سطحي أرضي الذي نعتبره عطاليا، أنظر الشكل6، تخضع الكرة أثناء سقوطها لدافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ وكذلك لقوة احتكاك $\vec{f}=-k\vec{v}$ حيث k ثابت موجب، و v سرعة مركز عطالة الكرة.

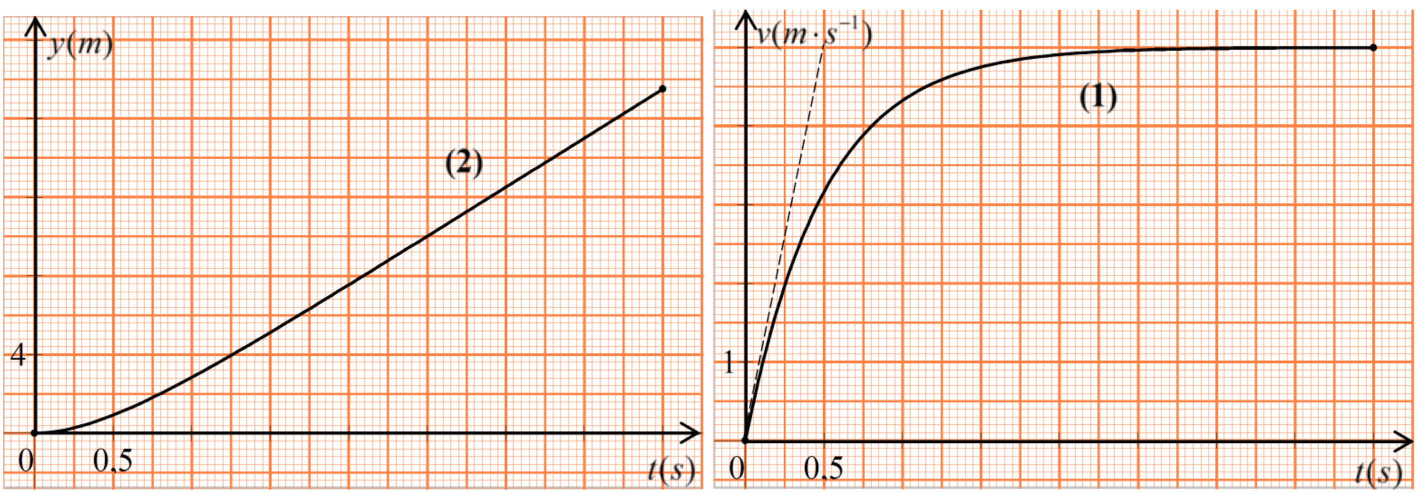
1– احسب النسبة $\frac{P}{\Pi}$ وبين أنه يمكن إهمال الدافعة $\vec{\Pi}$ أمام قوة ثقل الكرية $\vec{P}$.

2– مثل القوى المطبقة على الكرة خلال سقوطها.

3– اكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة v بدلالة: V، ρ، g، k.

4– استنتج عبارة السرعة الحدية للكرة v_{lim}.

5– بواسطة التصوير المتعاقب واستعمال برمجية مناسبة تمكن من الحصول على المنحنيين(1) و(2) الممثلين في الشكل7، التطور الزمني لكل من الفاصلة $y(t)$ وسرعة مركز عطالة الكرة $v(t)$ أثناء السقوط.



الشكل 7

أ- عين بيانيا قيمة السرعة الحدية v_{lim}.

ب- حدد وحدة الثابت k في الجملة الدولية للوحدات. احسب قيمته .

جـ- احسب معامل توجيه المماس للمنحنى(1) في اللحظة $t=0$. وماذا يمثل فيزيائيا؟

د- عين بيانيا المدة الزمنية للسقوط.

هـ- ما هي مدة كل من النظام الانتقالي والنظام الدائم.

و- تأكد من قيمة السرعة الحدية من المنحنى(2).

6- مثل كيفيا منحنى تطور السرعة بدلالة الزمن عند إهمال الاحتكاك أمام ثقل الكرة، وما طبيعة حركة الكرة عندئذ؟

الحل المفصل:

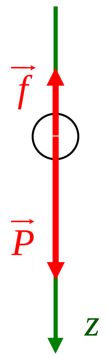
1- حساب النسبة $\frac{P}{\Pi}$ وتبيين أنه يمكن إهمال الدافعة $\vec{\Pi}$ أمام قوة ثقل الكرية $\vec{P}$:

$$\frac{P}{\Pi}=\frac{\rho \cancel{Vg}}{\rho_0 \cancel{Vg}} \Rightarrow \frac{P}{\Pi}=\frac{\rho}{\rho_0} \Rightarrow \frac{P}{\Pi}=\frac{88,5}{1,3}=65 \Rightarrow P=65\Pi$$

نلاحظ أن شدة دافعة أرخميدس صغيرة جدا أمام قوة الثقل إذن يمكن إهمال الدافعة $\vec{\Pi}$ أمام قوة ثقل الكرية $\vec{P}$.

2- تمثيل القوى المطبقة على الكرة خلال سقوطها:

(الشكل)



3- كتابة المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة v بدلالة : V، ρ، g، k:

- الجملة المدروسة: كرة.
- مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{j})$.
- القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum F_{ext}=m.\vec{a}_G$$
$$\vec{P}+\vec{f}=m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$\rho Vg-f=\rho V.a \Rightarrow \rho Vg-kv=\rho V\frac{dv}{dt} \Rightarrow \rho V\frac{dv}{dt}+kv=\rho Vg \Rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{k}{\rho V}v=g$$

4- استنتاج عبارة السرعة الحدية للكرة v_{lim}:

في النظام الدائم أين $v=v_{\lim}$، $\frac{dv}{dt}=0$، نكتب من المعادلة التفاضلية:

$$\frac{k}{\rho V}v_{\lim}=g \Rightarrow v_{\lim}=\frac{\rho V.g}{k}$$

5– أ– تعيين بيانيا قيمة السرعة الحدية v_{lim}:

من البيان (1): $v_{\lim}=5m/s$.

ب– تحديد وحدة الثابت k في الجملة الدولية للوحدات:

$$f=kv \Rightarrow k=\frac{f}{v} \Rightarrow [k]=\frac{[f]}{[v]}$$

حسب القانون الثاني لنيوتن:

$$F=m.a \Rightarrow [F]=[m].[a]$$

و منه:

$$[k]=\frac{[m][a]}{[v]} \Rightarrow [k]=\frac{[m].\frac{[l]}{[s]^2}}{\frac{[l]}{[s]}} \Rightarrow [k]=\frac{[m]}{[s]}$$

إذن وحدة k هي: $kg.s^{-1}$

● حساب قيمة k:

اعتمادا على ما سبق:

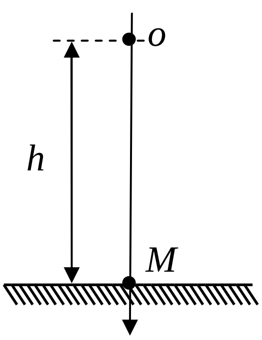
$$v_{\lim}=\frac{\rho Vg}{k} \Rightarrow k=\frac{\rho V.g}{v_{\lim}} \Rightarrow k=\frac{88,5\times1,13\times10^{-4}\times9,8}{5}=5,96\,Kg/s$$

جـ– حساب معامل توجيه المماس للمنحنى (1) في اللحظة $t=0$. وما يمثل فيزيائيا:

من البيان(1):

$$\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_{t=0}=\frac{(5-0)}{(1-0)\times0,5}=10\,m/s^2$$

– يمثل معامل توجيه فيزيائيا، تسارع الحركة عند اللحظة $t=0$.



د– تعيين بيانيا المدة الزمنية للسقوط:

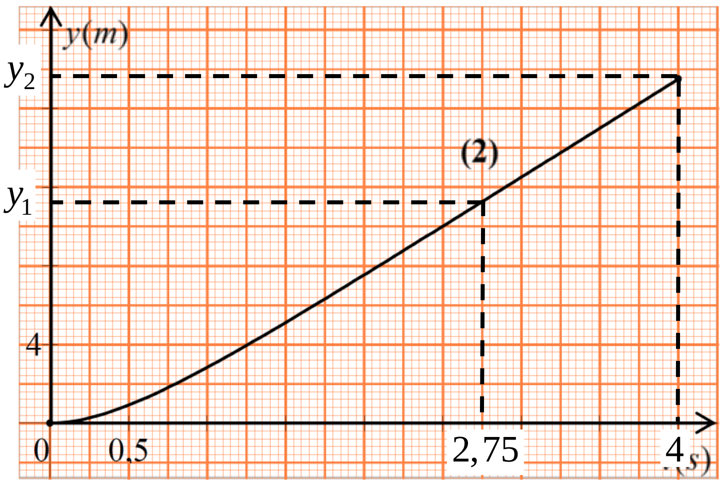
مدة السقوط هي اللحظة التي تقطع فيها الكرة المسافة h وبالتالي عند بلوغ سطح الأرض نهاية السقوط يكون $y=h=17,6\,m$ ، بالإسقاط في البيان(2) نجد: $t=4s$.

هـ– مدة كل من النظام الانتقالي والنظام الدائم:

بالاعتماد على البيان (1):

– بالنسبة للنظام الانتقالي: $\Delta t_1=5,5\times0,5=2,75\,s$

– بالنسبة للنظام الدائم: $\Delta t_2=2,5\times0,5=1,25\,s$

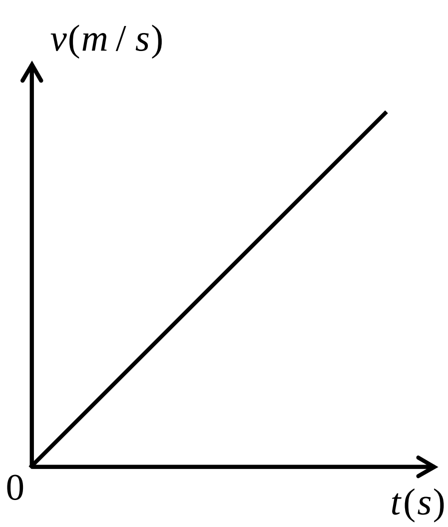


و– <u>التأكد من قيمة السرعة الحدية من المنحنى (2):</u>

قيمة السرعة الحدية تمثل معامل توجيه المنحنى (2) في النظام الدائم أي في المجال الزمني $[2,75s, 4s]$ وعليه بالاعتماد على المنحنى (2) يكون:

- $y_1 = 8,8 \times 4 = 11,2m$
- $y_1 = 4,4 \times 4 = 11,2m$

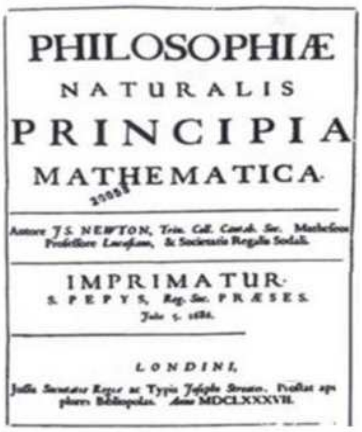
$$v_{\lim} = \frac{y_2 - y_1}{4 - 2,75} = \frac{17,6 - 11,2}{4 - 2,75} \simeq 5m/s$$



6– <u>تمثيل كيفيا منحنى تطور السرعة بدلالة الزمن عند إهمال الاحتكاك أمام ثقل الكرة ، وطبيعة حركة الكرة عندئذ:</u>

في هذه الحالة، تخضع الكرة إلى تأثير ثقلها فقط، أي تصبح في سقوط حر ، وبالتالي تكون حركتها مستقيمة متسارعة بانتظام ومنحنى السرعة يكون مستقيم يشمل المبدأ كون أن الحركة دون سرعة ابتدائية.

<u>التمرين(16):</u> <u>(بكالوريا 2023 – علوم تجريبية)</u> <u>(التمرين : 099 في بنك التمارين)</u> <u>(**)</u>



كتاب المبادئ لنيوتن

نشر نيوتن في 05 جويلية 1686م، كتابه الشهير (المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية) والذي تظمن قوانينه الثلاثة في الميكانيك الكلاسيكي. يقول نيوتن في كتابه: (إن تغيرات الحركة تتناسب مع القوة المحركة وتتم وفق المنحى الذي أثرت فيه هذه القوة). للتحقق من ذلك، نأخذ كنموذج، سقوط جسم صلب متجانس (S) من ارتفاع صغير في الهواء كتلته $m = 15g$ ، بحركة انسحابية شاقولية في لحظة نعتبرها مبدأ للأزمنة $t = 0$ ، دون سرعة ابتدائية من موضع O مبدا لمعلم $(O, \vec{j})$ موجه نحو الأسفل، ومرتبط بمرجع سطحي أرضي نعتبره غاليلي(الشكل1).

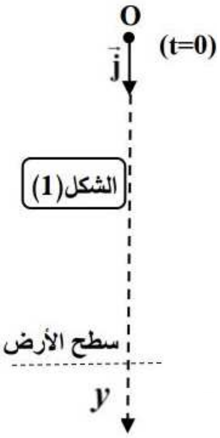
I – المبدأ الأساسي للتحريك:

1. استعمل نيوتن في قوله، المصطلحات الآتية: تغيرات الحركة – القوة المحركة.

– عبر عن كل مصطلح بالمقدار الفيزيائي الموافق.

2. إن القول السابق لنيوتن، هو نص لأحد قوانينه الثلاثة و المعروف باسم المبدأ الأساسي للتحريك.

1.2. ما هو هذا القانون (القانون الأول أم الثاني أم الثالث)؟



2.2. اكتب نصّه، وعبر عنه بعلاقة رياضياتية.

II – خطوات تطبيق المبدأ الأساسي للتحريك:

1. من الشروط الأساسية لتطبيق هذا القانون هو أن يكون مرجع الدراسة غاليليا(عطاليا).

– اشرح كيف يحقق المرجع السطحي الأرضي هذا الشرط، عند دراسة سقوط جسم في الهواء.

2. اذكر خطوات تطبيق هذا القانون.

3. يخضع الجسم (S) سقوطه في الهواء، بالإضافة إلى ثقله $\vec{P}$، إلى:

دافعة أرخميدس $\vec{\Pi} = -\rho_0.V.g.\vec{j}$ (حيث: ρ_0 الكتلة الحجمية للهواء، V حجم الجسم الصلب (S))

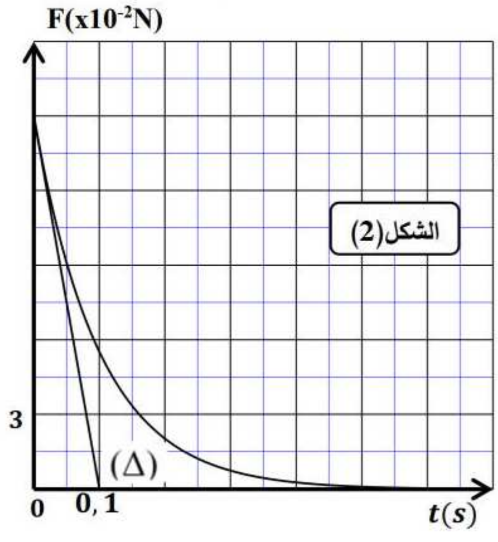
قوة احتكاك الهواء $\vec{f} = -k.v.\vec{j}$ (حيث: k معامل ثابت موجب، v سرعة مركز عطالة (S) في لحظة t)

يعطى: $g = 10\,m.s^{-2}$ شدة تسارع الجاذبية الأرضية.

– مثل على (الشكل1)، بدون سلم، القوى الخارجية المؤثرة على (S) في اللحظة $t = 0$ وفي اللحظة $t > 0$.

III. الدراسة التجريبية لحركة مركز عطالة الجسم (S):

إن تسجيل حركة سقوط الجسم (S) باستعمال آلة تصوير فيديو، ومعالجة شريطه ببرنامج إعلام آلي مناسب، سمح بالحصول على المنحنى البياني الممثل لتطور شدة محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم الصلب (S) بدلالة الزمن $F = \left\|\sum \vec{F}_{ext}\right\|$ (الشكل2).



1. حدد بيانيا قيمة F_0 شدة محصلة القوى الخارجية المؤثرة على (S) في اللحظة $t = 0$، ثم تأكد أن تأثير دافعة أرخميدس مهمل أمام القوى الأخرى.

2. بالاعتماد على قانون نيوتن السابق و منحنى (الشكل2):

– توقع شكل منحنى تغيرات تسارع مركز عطالة الجسم (S) بدلالة الزمن $a_G(t)$ ثم ارسمه على ورقة إجابتك.

3. أثبت المعادلة التفاضلية $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = g$.

حيث τ هو الزمن المميز للحركة و الذي يُطلب إيجاد عبارته.

4. المستقيم (Δ) الموضح في (الشكل2) يمثل مماس المنحنى في اللحظة $t = 0$. أثبت أن المستقيم (Δ) يقطع محور الأزمنة في لحظة $t = \tau$.

5. جِدْ قيمة كل من معامل الاحتكاك k، و السرعة الحدّية $v_{\lim}$ لمركز عطالة الجسم (S).

الحل المفصل:

I – المبدأ الأساسي للتحريك:

1. التعبير عن كل مصطلح بالمقدار الفيزيائي الموافق:

– تغيرات الحركة: شعاع تغير السرعة $\Delta\vec{v}$، أو شعاع التسارع $\vec{a}$.

– القوة المحركة: محصلة القوى الخارجية $\sum \vec{F}_{ext}$.

1.2. القانون (القانون الأول أم الثاني أم الثالث):

هو القانون الثاني لنيوتن.

2.2. نص القانون ، والتعبير عنه بعلاقة رياضياتية:

" في مرجع غاليلي، المجموع الشعاعي للقوى الخارجية المطبقة على جملة مادية، يساوي في كل لحظة، جداؤ كلتها في شعاع تسارع مركز عطالتها"

يعبر عن هذا القانون بالعلاقة الرياضياتية : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$

II – خطوات تطبيق المبدأ الأساسي للتحريك:

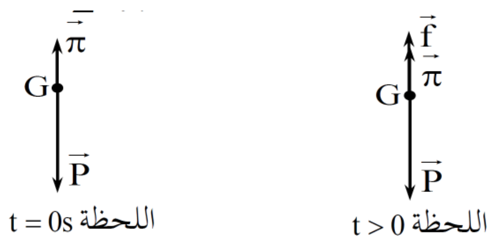
1. شرح كيف يحقق المرجع السطحي الأرضي شرط مرجع غاليلي:

حتى نعتبر المرجع السطحي الأرضي غاليليا، يجب أن تكون مدة دراسة حركة السقوط في الهواء صغيرة جدا مقارنة بمدة دوران الأرض حول نفسها، وهذا ما يتحقق مادام السقوط كان من ارتفاع صغير.

2. خطوات تطبيق هذا القانون:

- اختيار الجملة الميكانيكية المدروسة.
- تحديد مرجع الدراسة، ويجب أن يكون غاليليا ومزودا بمعلم متعامد.
- احصاء وتمثيل القوى الخارجية المطبقة على الجملة المدروسة.
- تطبيق القانون الثاني لنيوتن: $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$

3– تمثيل القوى الخارجية المؤثرة على (S) في اللحظة $t=0$ وفي اللحظة $t>0$:



III. الدراسة التجريبية لحركة مركز عطالة الجسم (S):

1. تحديد بيانيا قيمة F_0 شدة محصلة القوى الخارجية المؤثرة على (S) في اللحظة $t=0$:

من البيان: $F_0 = 14,7\times10^{-2}\ N$

التأكد أن تأثير دافعة أرخميدس مهمل أمام القوى الأخرى:

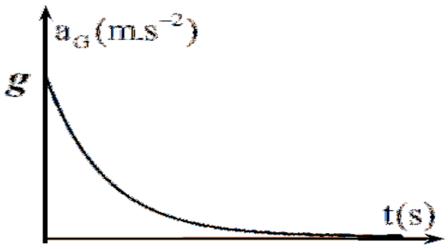
- $P = mg = 15\times10^{-3}\times10 = 15\times10^{-2}\ N$
- $F_0 = P - \Pi \;\Rightarrow\; \Pi = P - F_0 = 15\times10^{-2} - 14,7\times10^{-2} = 0,3\times10^{-2}\ N$

نحسب النسبة $\frac{P}{\Pi}$ فنجد:

$$\frac{P}{\Pi}=\frac{15\times10^{-2}}{0,3\times10^{-2}}=50$$

إذن شدة دافعة أرخميس $\vec{\Pi}$ مهملة أمام شدة قوة الثقل $\vec{P}$.

2. توقع رسم البيان $a_G(t)$:



حسب القانون الثاني للنيوتن $\sum \vec{F}_{ext}=m.\vec{a}_G$، يكون $F=m.a$، هذا يعني أن F شدة محصلة القوى تتناسب طرديا مع قيمة التسارع a، لذلك يكون $F(t)$ و $a(t)$ متمثلين في التطور، وانطلاقا بين البيان $F(t)$ يكون:

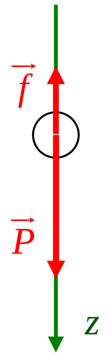
3. أثبات المعادلة التفاضلية $\frac{dv}{dt}+\frac{1}{\tau}v=g$:

– الجملة المدروسة: كرة.

– مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{i})$.

– القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.

– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:



$$\sum F_{ext}=m.\vec{a}_G$$
$$\vec{P}+\vec{f}=m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$P-f=m.a \Rightarrow mg-kv=m\frac{dv}{dt} \Rightarrow m\frac{dv}{dt}+kv=mg \Rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g$$

بالمطابقة مع العلاقة المعطاة نجد: $\tau=\frac{m}{k}$.

4. إثبات أن المستقيم (Δ) يقطع محور الأزمنة في لحظة $t=\tau$:

إذا رمزنا بـ A، للمماس (Δ) عند اللحظة $t=0$ ، نكتب: $A=\left.\frac{dF}{dt}\right|_{t=0}$

– باعتبار t_1 فاصلة نقطة تلامس المماس (Δ) مع محور الأزمنة، يكون من البيان $F(t)$: $A=\frac{F_0}{t_1}$.

– حسب القانون الثاني لنيوتن: $F_0=ma_0$، نكتب:

$$A=-\frac{ma_0}{t_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

من جهة أخرى: $F=P-f_{(t)}$، ومنه:

$$\frac{dF_{(t)}}{dt}=0-k\frac{dv_{(t)}}{dt} \Rightarrow \frac{dF_{(t)}}{dt}=-k\frac{dv_{(t)}}{dt} \Rightarrow \frac{dF_{(t)}}{dt}=-k\,a_{(t)}$$

وحيث أن: $A=\left.\frac{dF}{dt}\right|_{t=0}$ ، نكتب:

$$A=\left.\frac{dF}{dt}\right|_{t=0} \Rightarrow A=-ka_0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) و(2):

$$-\frac{m\cancel{a_0}}{t_1}=-k\cancel{a_0} \Rightarrow t_1=\frac{m}{k}=\tau$$

ملاحظة: يمكن كتابة معادلة المماس والبحث عن فاصلة تقاطعه مع محور الأزمنة.

5. قيمة معامل الاحتكاك k:

$$\tau=\frac{m}{k} \Rightarrow k=\frac{m}{\tau}$$

من البيان $\tau=0,1s$ ، ومنه:

$$k=\frac{15\times10^{-3}}{0,1}=0,15kg.s^{-1}$$

- السرعة الحدّية $v_{\lim}$:

في النظام الدائم أين $v=v_{\lim}$ ، $\frac{dv}{dt}=0$ ، نكتب من المعادلة التفاضلية:

$$\frac{k}{m}v_{\lim}=g \Rightarrow v_{\lim}=\frac{mg}{k}$$

$$v_{\lim}=\frac{15\times10^{-3}\times10}{0,15}=1m.s^{-1}$$

التمرين(17): (بكالوريا 2022 – رياضيات) (التمرين: 110 في بنك التمارين) (**)

في حصة أعمال تطبيقية وبهدف دراسة حركة مركز عطالة كرة في الهواء ونمذجة قوة الاحتكاك، قام التلاميذ بتصوير حركة السقوط الشاقولي في الهواء لكرة كتلتها $m=5,8\,g$ بدون سرعة ابتدائية ومعالجة الصور ببرنامج مناسب فتحصلوا على قيم شدة محصلة القوى F المطبقة على مركز عطالة الكرة في لحظات مختلفة:

$t(s)$	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,25	1,50	1,75
$F(\times10^{-2}N)$	4,00	1,48	0,54	0,20	0,07	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00

1. ارسم بيان تغيرات محصلة القوى بدلالة الزمن $F=f(t)$. باستعمال سلم الرسم التالي:

$$1cm \rightarrow 0,5\times10^{-2}\,N \quad , \quad 1cm \rightarrow 0,2\ s$$

2. اعتماداً على البيان:

1.2. بين كيف تتغير شدة محصلة القوى خلال الزمن وحدد طبيعة حركة مركز عطالة الكرة.

2.2. استنتج قيمة التسارع a_0 في اللحظة $t=0$.

3.2. احسب شدة دافعة أرخميدس إن وُجدت.

4.2. حدد قيمة ثابت الزمن τ لهذه الحركة باستعمال طريقة المماس.

3. مثل أشعة القوى المطبقة على مركز عطالة الكرة في اللحظتين: $t=0,4\,s$ ، $t=1,5\,s$ باستعمال سلم الرسم التالي: $1cm \rightarrow 2\times10^{-2}\,N$.

4. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة الكرة السابقة في مرجع سطحي أرضي نعتبره غاليليا، وباعتبار شدة قوة الاحتكاك مع الهواء تعطى بالعبارة $f=k\,v^n$ ، حيث k معامل الاحتكاك و n عدد طبيعي.

1.4. أثبت أن المعادلة التفاضلية لتطور سرعة مركز عطالة الكرة من الشكل: $\frac{dv}{dt}+Av^n=B$

حيث A و B ثابتان يُطلب تحديد عبارتيهما بدلالة F_0 ، m و k. (F : شدة محصلة القوى في اللحظة $t=0$).

2.4. جِد عبارة $v_{\lim}^n$ بدلالة F_0 و k.

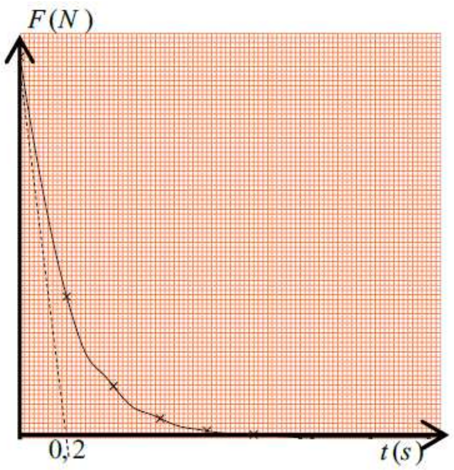
3.4. دلت القياسات التجريبية أن: $v_{\lim}=1,38\,m.s^{-1}$. استنتج قيمة n باعتبار $k=0,029\,SI$.

4.4. اكتب عبارة f المنمذجة لقوة الاحتكاك.

يعطى: $g=9,8\,m.s^{-2}$.

الحل المفصل:

1. رسم بيان تغيرات محصلة القوى بدلالة الزمن $F=f(t)$:



1.2. تبيين كيفة تتغير شدة محصلة القوى خلال الزمن:

في النظام الانتقالي: تتناقص فيه شدة محصلة القوى خلال الزمن من قيمة عظمى حتى تنعدم والحركة خلال هذا النظام مستقيمة متسارعة.

في النظام الدائم: تبقى فيه المحصلة معدومة والحركة مستقيمة منتظمة.

2.2. استنتج قيمة التسارع a_0 في اللحظة $t=0$:

حسب القانون الثاني لنيوتن: $F_0=m\,a_0 \Rightarrow a_0=\frac{F_0}{m}$ ، واعتمادا على البيان:

$$a_0=\frac{4\times10^{-2}}{5,8\times10^{-3}}=6,9\,m.s^{-2}$$

3.2. حساب شدة دافعة أرخميدس:

بما أن $a_0 < g$ توجد دافعة أرخميدس، وحيث أن $F_0 = P - \Pi$ يكون:

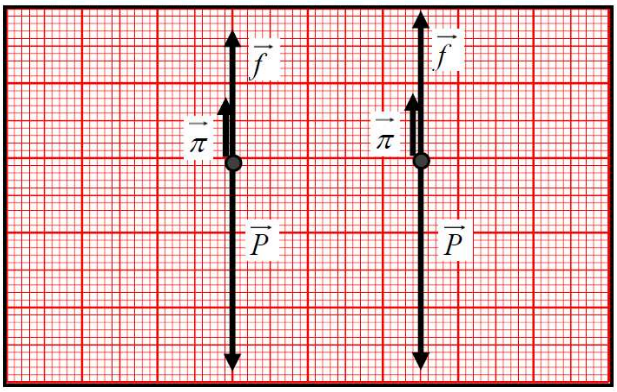
$$\Pi = P - F_0 \Rightarrow \Pi = m.g - F_0$$

$$\Pi = (5,8 \times 10^{-3} \times 10) - 6,9 \times 10^{-2} = 1,68 \times 10^{-2}\ N$$

4.2. تحديد قيمة ثابت الزمن لهذه الحركة باستعمال طريقة المماس:

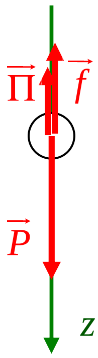
يوافق τ نقطة تقاطع المماس للمنحنى $F(t)$ عند اللحظة $t=0$ مع المحور الأزمنة، ومن البيان: $\tau = 0,2\,s$

3. تمثيل أشعة القوى المطبقة على مركز عطالة الكرة في اللحظتين: $t = 0,4\,s$ ، $t = 1,5\,s$ باستعمال سلم الرسم:



1.4. أثبات أن المعادلة التفاضلية لتطور سرعة مركز عطالة الكرة من الشكل: $\frac{dv}{dt} + Av^n = B$:

- الجملة المدروسة: مظلي وتجهيزه.
- مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{i})$.
- القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$ ، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:



$$\sum F_{ext} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$P - \Pi - f = m.a \Rightarrow mg - \Pi - kv^n = m\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} + kv^n = mg - \Pi \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^n = \frac{mg - \Pi}{m} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^n = \frac{F_0}{m}$$

بالمطابقة مع المعادلة التفاضلية المعطاة: $A = \frac{k}{m}$ ، $B = \frac{F_0}{m}$.

2.4. إيجاد عبارة $v_{\lim}^n$ بدلالة F_0 و k:

في النظام الدائم أين يكون: $v = v_{\lim}$ ، $\frac{dv}{dt} = 0$ ، نكتب من المعادلة التفاضلية:

$$\frac{k}{m}v_{\lim}^n = \frac{F_0}{m} \Rightarrow v_{\lim}^n = \frac{F_0}{k}$$

3.4. استنتاج قيمة n:

طريقة(1):

لدينا: $k=0,029\,SI$ ، $F_0=4\times10^{-2}\,N$ ، $v_{\lim}=1,38\,m/s$ ، بالتعويض في $v_{\lim}^n=\dfrac{F_0}{k}$ نجد:

$$1,38^n=\frac{4\times10^{-2}}{0,029}\Rightarrow 1,38^n=1,38\Rightarrow n=1$$

طريقة (2):

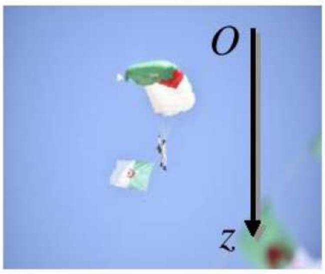
$$v_{\lim}^n=\frac{F_0}{k}\Rightarrow \ln(v_{\lim}^n)=\ln(\frac{F_0}{k})\Rightarrow n\ln(v_{\lim})=\ln(\frac{F_0}{k})\Rightarrow n==\frac{\ln(\frac{F_0}{k})}{\ln(v_{\lim})}\Rightarrow n=\frac{\ln(\frac{4\times10^{-2}}{0,029})}{\ln(1,38)}=1$$

4.4. كتابة عبارة f المنمذجة لقوة الاحتكاك:

لدينا $f=kv^n$ ، وبما أن $n=1$ ، يكون: $f=k.n$

التمرين(18): (التمرين: 136 في بنك التمارين) (**)

تعمل الطائرات المروحية في بعض العمليات العسكرية التي تستدعي إنزال الجنود بالمظلات من أجل تنفيذ مهام قتالية محددة، غير أنها تبقى أهدافا سهلة المنال للدفاعات الأرضية المضادة.



الجزء الأول: سراسة السقوط الشاقولي للمظلي.

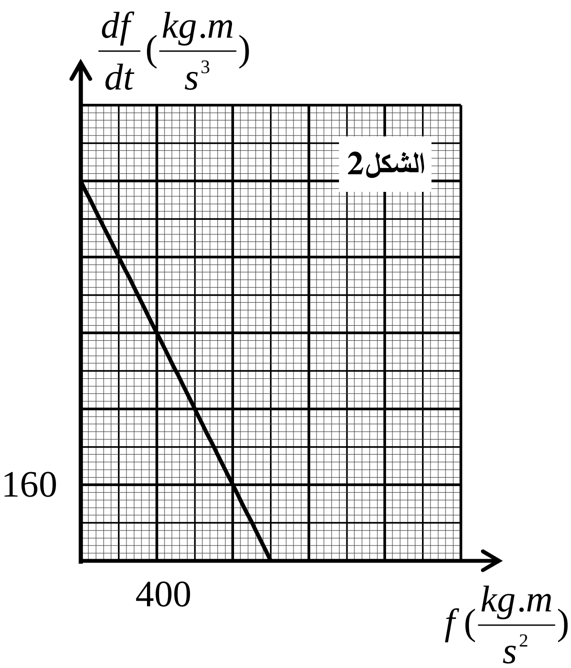
عن اللحظة $t=0$ يسقط مظلي كتلته مع لوازمه $m=100\,kg$ سقوطا شاقوليا دون سرعة ابتدائية من نقطة (O) نعتبرها مبدأ للفواصل. واثناء ذلك يخضع إلى قوة احتكاك عبارتها $\vec{f}=-k\vec{v}$ (نهمل دافعة أرخميدس).

1− مثل القوى المطبقة على المظلي في لحظة t من بداية سقوطه.

2− بتطبيق الثانون الثاني لنيوتن بين أن المعادلة التفاضلية لشدة قوة الاحتكاك تكتب على الشكل: $\dfrac{d\,f(t)}{dt}+\dfrac{1}{\tau}f(t)=\dfrac{f_{\lim}}{\tau}$.

حيث: τ و $f_{\lim}$ ثابتين يطلب كتابة عبارتيهما بدلالة: m ، g ، k .

3− يمثل (الشكل2) منحنى تغيرات $\dfrac{df}{dt}$ مشتق شدة قوة الاحتكاك بالنسبة للزمن بدلالة شدة قوة الاحتكاك: $\dfrac{d\,f}{dt}=g(t)$



– باستغلال البيان جِدْ:

أ– قيمة τ الثابت المميز للسقوط واستنتج k ثابت الاحتكاك.

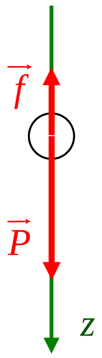
ب– قيمة g شدة تسارع الجاذبية الأرضية.

جـ– قيمة $f_{\lim}$ شدة قوة الاحتكاك في النظام الدائم واستنتج $v_{\lim}$ السرعة الحدية للمظلي.

الحل المفصل:

1– تمثيل القوى المطبقة على المظطلي فب لحظة t من بداية سقوطه:

2– تبيين أن المعادلة التفاضلية لشدة قوة الاحتكاك تكتب على الشكل: $\dfrac{d\,f(t)}{dt}+\dfrac{1}{\tau}f(t)=\dfrac{f_{\lim}}{\tau}$:



– الجملة المدروسة: (مظلي وتجهيزه).

– مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{k})$.

– القوة الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.

– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum F_{ext}=m.\vec{a}_G$$

$$\vec{P}+\vec{f}=m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$P-f=m.a \Rightarrow mg-f=m\frac{dv}{dt}$$

لدينا:

$$f=kv\Rightarrow v=\frac{f}{k}\Rightarrow \frac{dv}{dt}=\frac{1}{k}\frac{df}{dt}$$

ومنه:

$$mg-f=m(\frac{1}{k}\frac{df}{dt})$$

$$mg-f=\frac{m}{k}\frac{df}{dt}\Rightarrow \frac{m}{k}\frac{df}{dt}+f=mg$$

$$\frac{df}{dt}+\frac{k}{m}f=\frac{k}{m}mg \Rightarrow \frac{df}{dt}+\frac{k}{m}f=kg$$

في النظام الدائم أين يكون: $v=v_{\lim}$، $\dfrac{dv}{dt}=0$، نكتب من المعادلة التفاضلية:

$$\frac{k}{m}f_{\lim}=kg \Rightarrow kg=\frac{k}{m}f_{\lim}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد:

$$\frac{df}{dt}+\frac{k}{m}f=\frac{k}{m}f_{\lim}$$

بالمطابقة مع المعادلة التفاضلية المعطاة نجد:

$$\frac{1}{\tau}=\frac{k}{m} \Rightarrow \tau=\frac{m}{k}.$$

مما سبق:

$$\frac{\cancel{k}}{m}f_{\lim}=\cancel{k}g \Rightarrow f_{\lim}=mg$$

3- أ- قيمة τ :

بيانيا:

المنحنى $\frac{df}{dt}=f(t)$ هو مستقيم معادلته من الشكل:

$$\frac{df}{dt}=a\,f+b$$

حيث a معامل توجيه المستقيم، ومن البيان:

$$a=\frac{\Delta f}{\Delta t}=\frac{(0-5)\times 20}{(2,5-0)\times 400}=-10$$

نظريا ومما سبق:

$$\frac{df}{dt}=-\frac{1}{\tau}f+\frac{f_{\lim}}{\tau}$$

بالمطابقة:

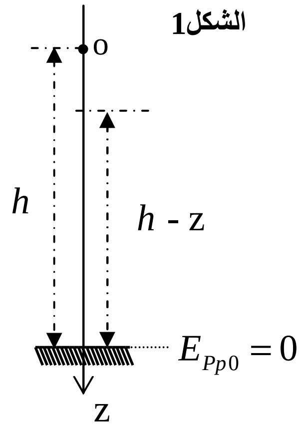
$$a=-\frac{1}{\tau} \Rightarrow \tau=-\frac{1}{a} \Rightarrow \tau=-\frac{1}{-10}=0,1s$$

التمرين(19): (التمرين: 132 في بنك التمارين) (**)

* يعتبر الكثيرون آرسطو أعظم عالم وفيلسوف في اليونان القديمة. يقول أرسطو معتمدا على حدسه: من الطبيعي أن الأجسام الثقيلة تسقط أسرع من الأجسام الخفيفة. أي أن سرعة الجسم خلال السقوط تتعلق بكتلته.

* حوالي عام 1590 في شمال إيطاليا، ومن خلال دراسته التفصيلية لسقوط الأجسام. تفتح عقل غاليلي على الرياضيات والفيزياء مؤكدا أن الطبيعة تجري طبقاً لقوانين يمكن صياغتها رياضياً.

فاعتمد غاليلي على فكرة رمي الأشياء من أعلى الكنيسة في مدينة بادوا، كأن يسقط جسمين لهما نفس الوزن ولكن بأحجام مختلفة مستعملا كرات ذات طبيعة مختلفة (مثل الرصاص والفلين) لكن كان من الصعب تحديد موضع جسم في لحظة معينة لعدم توفر وسائل القياس الدقيقة. لذا لجأ إلى التجارب الذهنية (التجارب التي ترتكز على التحليل المنطقي للملاحظات العيانية والتي تصدقها البراهين الرياضية) فتشكل لديه انطباع بأن كل الكرات تسقط على سطح الأرض في نفس الوقت لو أنه جعلها تسقط تحت نفس الشروط كإهمال الهواء. مما رسخ لديه قناعتين -نظريتين-:



- سرعة الجسم لا تتعلق بكتلته.
- مقاومة الهواء تتدخل في سقوط الأجسام، أي أن شكل الأجسام له تأثير على سرعة سقوطها.

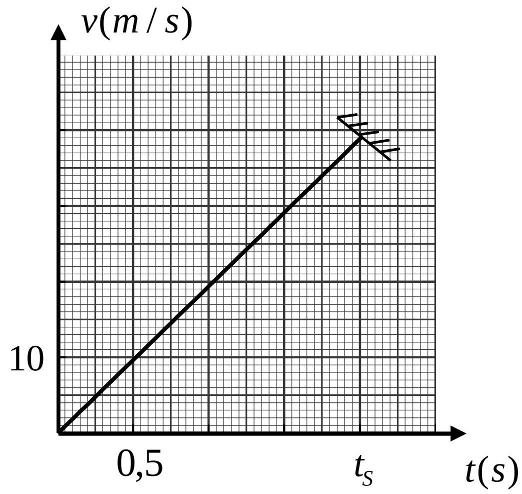
I– من ارتفاع h عن سطح الأرض من السطح العلوي لعمارة (الشكل1) حررنا في اللحظة $t=0$ من نقطة (o) مبدأ المحور $(\overrightarrow{oz})$ كرة معدنية (حجمها صغير) كتلتها $m=500\ g$ دون سرعة ابتدائية، والتي تخضع أثناء حركتها إلى تأثير قوة ثقلها $\overrightarrow{P}$ فقط.

1– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أدرس حركة الكرة ثم اكتب المعادلات الزمنية للسرعة: $v=f(t)$ والحركة $z=f(t)$.

2– بين كيف يمكن لهذه المعادلات أن تحكم على صحة رأي غاليلي دون حدس آرسطو؟

3– سجلنا فيديو لحركة السقوط وعالجناه بواسطة برنامج "$Avistep$"

فتحصلنا على البيان $v=f(t)$ لتطور سرعة مركز عطالة الكرة بدلالة الزمن(الشكل–2).



باعتبار t_s لحظة اصطدام الكرة بسطح الأرض باستغلال البيان ومعادلات الحركة احسب ارتفاع العمارة h.

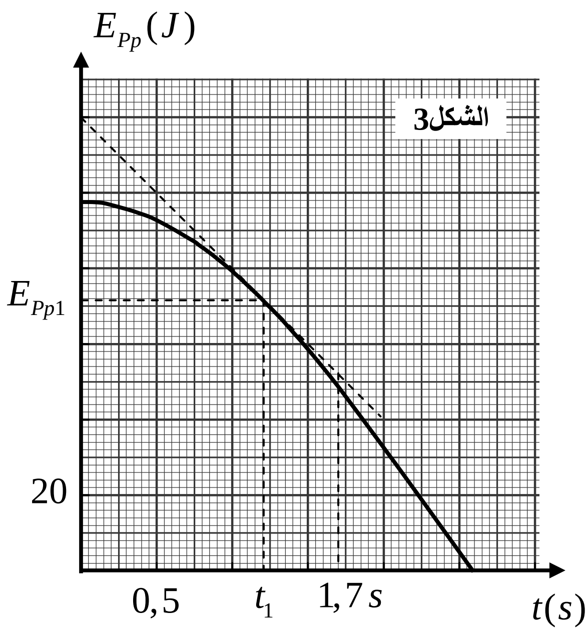
4– أوجد سرعة الكرة v_1 بعد قطعها مسافة $d_1=5\ m$.

II– للوقوف على صحة رأي غاليلي في تأثير مقاومة الهواء على السرعة، حررنا من الارتفاع h للسطح العلوي للعمارة عند اللحظة $t=0$ كرة (S) من البوليستيرين (حجمها كبير) كتلتها $m=500\ g$ دون سرعة ابتدائية، والتي تخضع أثناء حركتها إضافة إلى ثقلها $\overrightarrow{P}$، إلى قوة احتكاك $\overrightarrow{f}$ تعطى عبارتها (حسب هويجنز) بالعلاقة: $f=kv^2$ ، حيث تهمل دافعة ارخميدس.

1– مثل القوى المؤثرة على الكرة في اللحظة t.

2– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن جِدْ المعادلة التفاضلية للسرعة $v(t)$.

3– بإعادة الدراسة التسجيلية تمكنا من رسم بيان (الشكل9) الممثل لتغيرات E_{pp} الطاقة الكامنة الثقالية للجملة (كرة + أرض)، والذي يبرز وجود مرحلتين:



- انتقالية في المجال $0 \leq t \leq 1,7\ s$
- دائمة في المجال $t \geq 1,7\ s$.

أ– بأخذ سطح الأرض كمستوي مرجعي لقياس الطاقة الكامنة الثقالية، بين أن عبارة السرعة في اللحظة (t) خلال المرحلة الأولى تكتب على الشكل: $v(t)=-\dfrac{1}{4,9}\dfrac{dE_{pp}(t)}{dt}$.

ب– عند قطع المسافة $d_1 = 5\ m$ تكون الطاقة الكامنة الثقالية للجملة $E_{pp1} = 71,54\ J$ احسب قيمة السرعة v_1' عندئذ.

ج– قارن قيمتي السرعتين v_1 و v_1'. هل تُصَدِّق النتيجة توقع غاليلي؟

4– باستغلال بيانات (الشكل3) في النظام الدائم، جِدْ قيمة السرعة الحدية $v_{\lim}$.

5– مستعينا بالمعادلة التفاضلية في هذه المرحلة احسب معامل الاحتكاك k.

الحل المفصل:

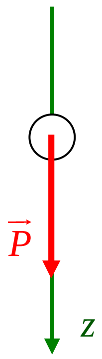
I– دراسة حركة الكرة:

– الجملة المدروسة: كرة.

– مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o, \vec{j})$.

– القوة الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$.

– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:



$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{P} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$P = m.a \Rightarrow \cancel{m}.g = \cancel{m}a \Rightarrow a = g$$

g ثابت ومنه a، وكون أن المسار مستقيم في الاتجاه الموجب، فحركة مركز عطالة الكرة مستقيمة متسارعة بانتظام.

• كتابة المعادلات الزمنية للسرعة $v = f(t)$ والحركة $z = f(t)$:

مما سبق:

$$a = g \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} = g$$

بالتكامل نجد:

$$v = gt + v_0$$

من الشروط الابتدائية، $v_0 = 0$ ومنه تكون المعادلة الزمنية للسرعة:

$$v = gt$$

ونكتب أيضا:

$$\frac{dz}{dt} = g\,t$$

بالتكامل نجد:

$$z = \frac{1}{2}gt^2 + z_0$$

من الشروط الابتدائية $z_0 = 0$ ومنه تكون المعادلة:

$$z = \frac{1}{2}gt^2$$

2- تبيين كيف يمكن لهذه المعادلات أن تحكم على صحة رأي غاليلي دون حدس آرسطو:

المعادلتين الزمنيتين $v(t)$ و $z(t)$ ، تبينان أن السرعة الفاصلة لا يتعلقان بالكتلة m وهي بالتالي تؤكد صحة رأي غاليلي وعدم صحة حدس أريسطو.

3- حساب ارتفاع العمارة h:

من بيان (الشكل2)، تبلغ الكرة سطح الأرض عند اللحظة:

$$t_S = 4 \times 0,5 = 2\,s$$

وعند هذه اللحظة يكون: $z = h$ ، بالتعويض في المعادلة $z(t)$ يكون:

$$h = \frac{1}{2}g\,t_S^2 \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2} \times 9,8 \times (2)^2 = 19,6\,m$$

4- إيجاد سرعة الكرة v_1 بعد قطعها مسافة $d_1 = 5\,m$:

– نحدد أولا قيمة t_1 لحظة بلوغ الكرة الفاصلة $z_1 = 5m$ ، بالتعويض في المعادلة $z(t)$ ، فيكون:

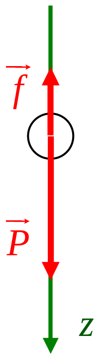
$$d_1 = \frac{1}{2}g.t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2d_1}{g}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2\times 5}{9,8}} = 1,01\,s$$

بالتعويض في المعادلة $z(t)$:

$$v_1 = g\,t_1 \Rightarrow v_1 = 9,8 \times 1,01 = 9,90\,m/s$$

II- 1- تمثيل القوى المؤثرة على الكرة في اللحظة t:

(الشكل)



2- إيجاد المعادلة التفاضلية للسرعة $v(t)$:

– الجملة المدروسة : كرة (S)

– مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{k})$.

– القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$ ، قوى الاحتكاك $\vec{f}$.

– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{f} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$P - f = m.a \Rightarrow mg - kv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} + kv^2 = mg \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g$$

3– أ– إثبات أن عبارة السرعة في اللحظة (t) خلال المرحلة الأولى هي $v(t)=\frac{dz(t)}{dt}=-\frac{1}{4,9}\frac{dE_{pp}(t)}{dt}$:

$$v(t)=\frac{dz(t)}{dt}$$

اعتمادا على (الشكل1):

$$E_{Pp}(t)=mg\,(h-z(t)) \Rightarrow E_{Pp}(t)=mg\,h-mg\,z(t) \Rightarrow mg\,z(t)=mg\,h-E_{Pp}(t)$$

بقسمة الطرفين على mg، نجد:

$$z(t)=h-\frac{E_{Pp}(t)}{mg}$$

بالتعويض في عبارة السرعة:

$$v(t)=\frac{d}{dt}\left(h-\frac{E_{Pp}(t)}{mg}\right) \Rightarrow v(t)=0-\frac{1}{mg}\frac{dE_{Pp}(t)}{dt} \Rightarrow v(t)=-\frac{1}{mg}\frac{dE_{Pp}(t)}{dt}$$

$$v(t)=-\frac{1}{0,5\times 9,8}\frac{dE_{Pp}(t)}{dt} \Rightarrow v(t)=-\frac{1}{4,9}\frac{dE_{Pp}(t)}{dt}$$

ب– حساب قيمة السرعة v_1' عند قطع المسافة $z=5\ m$ أين تكون الطاقة الكامنة الثقالية للجملة $E_{pp1}=71,54\ J$:

من عبارة السرعة الأخيرة، نكتب عند اللحظة t_1:

$$v_1'=-\frac{1}{4,9}\left(\frac{dE_{Pp}(t)}{dt}\right)_{t_1}$$

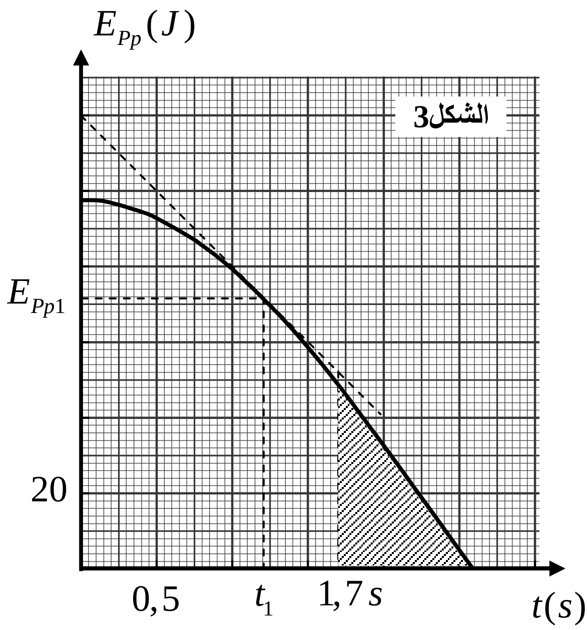
تمثل $\left(\frac{dE_{Pp}(t)}{dt}\right)_{t_1}$، ميل مماس المنحنى في بيان (الشكل3)، واعتمادا على هذا البيان يكون:

$$v_1'=-\frac{1}{4,9}\times\frac{(3,6-6)\times 20}{(2,4-0)\times 0,5}=8,16\,m/s$$

ج– المقارنة قيمتي السرعتين v_1 و v_1'. وهل النتيجة تصدق توقع غاليلي أم لا:

- عندما اهملت قوة الاحتكاك وجدنا $v_1=9,9\,m/s$
- عندما لم تهمل قوة الاحتكاك وجدنا $v_1'=8,16\,m/s$

نلاحظ أن $v_1'<v_1$، وسبب الاختلاف في النتيجة هو وجود قوة الاحتكاك، نستنتج أن هذه النتيجة تصدق توقع غاليلي الذي اعتبر حسب النص أن مقاومة الهواء تتدخل في سقوط الأجسام.



4- حساب قيمة السرعة الحدية v_ℓ:

في النظام الدائم $(t \geq 1,7\,s)$، يبلغ ميل المنحنى قيمة حدية يثبت عندها، ما يعني أن السرعة تبلغ قيمة حدية $v_{\lim}$، يمكن استنتاج عبارتها بالاعتماد على العبارة $v(t) = -\frac{1}{4,9}\frac{dE_{Pp}(t)}{dt}$، حيث في المجال $(t \geq 1,7\,s)$، نكتب:

$$v_{\lim} = -\frac{1}{4,9}\left(\frac{dE_{Pp}(t)}{dt}\right)_{t\geq 1,8}$$

وبالاعتماد على بيان (الشكل3) يكون:

$$v_{\lim} = -\frac{1}{4,9}\frac{(0-2,4)\times 20}{(5,2-3,4)\times 0,5} = 10,88\,m/s$$

5- حساب معامل الاحتكاك k:

لدينا سابقا:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g$$

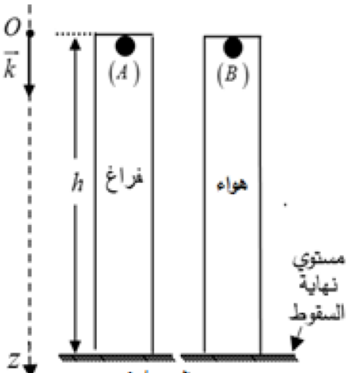
في النظام الدائم، أين $v = v_{\lim}$ ، $\frac{dv}{dt} = 0$ ، نكتب من المعادلة التفاضلية:

$$\frac{k}{m}v_{\lim}^2 = g \;\Rightarrow\; k = \frac{mg}{v_{\lim}^2} \;\Rightarrow\; k = \frac{0,5\times 9,8}{(10,88)^2} = 1,14\times 10^{-2}\,kg/m$$

التمرين(20): مقترح (بكالوريا 2020 - رياضيات) (الحل المفصل – التمرين: 031 في بنك التمارين) (**)

إحدى فرضيات الميكانيك " **لجميع الأجسام نفس حركة السقوط الشاقولي في الفراغ مهما كانت كتلتها** " .

للتحقق من هذه الفرضية أُنجزت عدة تجارب و كانت نتائجها أن: **القوى الناتجة عن الموائع هي سبب اختلاف سرعات سقوط الأجسام نحو الأرض .**



الشكل4

أراد فوجان من المتعلمين أن يُنجزا تجربتين للتحقق من هذه النتيجة، ولهذا الغرض استعملا أنبوبين زجاجيين لهما الطول نفسه وكرتين (A) و (B) متماثلتين في الحجم V_S و الكتلة m (الشكل4).

معطيات :

- حجم كل كرة : $V_S = 2,57\times10^{-6}\ m^3$ و كتلة كل كرة: $m = 6,0\times10^{-3} kg$.
- الكتلة الحجمية للهواء: $\rho_{air} = 1,3\ g.L^{-1}$.
- شدة حقل الجاذبية الأرضية: $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

الفوج الأول : ترك أحد المتعلمين الكُرية (A) تسقط شاقوليا من ارتفاع h في الأنبوب الزجاجي بعد تفريغه من الهواء في لحظة نعتبرها مبدأ لقياس الأزمنة $t=0$ وقيست بميقاتية مدة السقوط $t_A = 0,40\ s$.

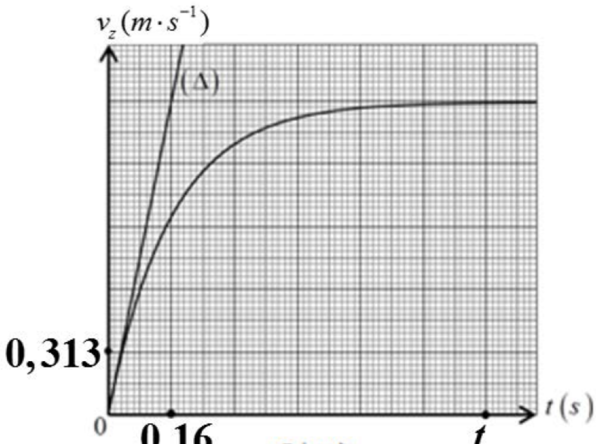
1– مثل القوى الخارجية المطبقة على G مركز عطالة الكرية (A) أثناء سقوطها الشاقولي.

2– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، جِد المعادلة التفاضلية للسرعة $v(t)$ واستنتج طبيعة الحركة.

3– احسب الارتفاع h.

4– ناقش صحة الفرضة " **لجميع الأجسام نفس حركة السقوط الشاقولي في الفراغ مهما كانت كتلتها**"

الفوج الثاني: ترك أحد المتعلمين الكرية (B) تسقط شاقوليا من الارتفاع h في الأنبوب الزجاجي المملوء بالهواء فكانت مدة السقوط $t_B = 1,1\ s$. بتجهيز مناسب تم تسجيل تطور سرعة الكرية خلال الزمن فتحصل على البيان $v_Z = f(t)$.



الشكل5

1– مثل القوى الخارجية المطبقة على G مركز عطالة الكرية في اللحظات: $t_0 = 0$، $t_1 = 0,16\ s$ و t_6.

2– جِد المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة الكرية $v_Z(t)$ باعتبار قوة الاحتكاك مع الهواء من الشكل: $\vec{f} = -k\,\vec{v}_z$ حيث k معامل الاحتكاك.

3– احسب التسارع النظري a_{th} لمركز عطالة الكرية في اللحظة $t=0$، ثم تحقق أن قيمة a_{th} تتوافق مع القيمة التجريبية للتسارع a_{exp} في اللحظة نفسها.

4– اعتمادا على المعادلة التفاضلية والبيان، جِد قيمة معامل الاحتكاك k.

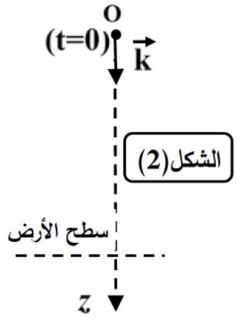
5– فسِر الفارق الزمني بين لحظتي وصول الكرتين t_A و t_B إلى مستوي نهاية السقوط

التمرين(21): مقترح (بكالوريا 2023 – رياضيات) (الحل المفصل – التمرين: 050 في بنك التمارين) (**)

تتعدد أنواع الحركات التي تخضع لها الجمل الميكانيكية، وترتبط بالشروط الابتدائية وبالقوى الخارجية المؤثرة عليها. حيث تُمكن قوانين نيوتن من دراسة تطور بعض المقادير التحريكية والحركية المميزة لها.

يهدف التمرين إلى دراسة حركة انسحابية شاقولية لجملة ميكانيكية S ممثلة في مظلي و لوازمه، مركز عطالتها G.

يسقط مظلي مصحوبا بلوازمه بدون سرعة ابتدائية من طائرة مروحية متوقفة على ارتفاع $h=1000m$ من سطح الأرض، سقوطا شاقوليا. ندرس حركة مركز عطالة الجملة S في معلم $(o,\vec{k})$، نعتبره غاليليا، مرتبط بسطح الأرض شاقوليا وموجّه نحو الأسفل، في لحظة نعتبرها مبدأ للأزمنة $t=0$ (الشكل2).



معطيات: – كتلة الجملة المدروسة (المظلي ولوازمه) $m=80\,kg$

– نعتبر تسارع الجاذبية الأرضية ثابت $g=9,8\,m.s^{-2}$

– تأثير دافعة أرخميدس مهمل أمام القوى الأخرى.

* بفرض اهمال مقاومة الهواء $\vec{f}$ المؤثرة على الجملة S، أمام ثقل المظلي ولوازمه $\vec{P}$.

1. ماذا نسمي هذا السقوط؟
2. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، حدد طبيعة حركة مركز عطالة الجملة S.
3. احسب عندئذ سرعة مركز العطالة G، لحظة اصطدام المظلّي بسطح الأرض بوحدة $km.h^{-1}$. علق على القيمة.

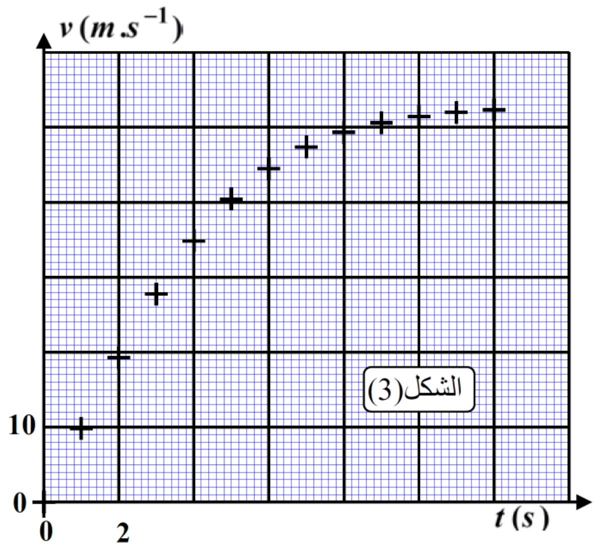
* في الحقيقة تخضع الجملة أثناء السّقوط إضافة إلى ثقلها $\vec{P}$، إلى مقاومة الهواء، وتتم حركة سقوطها في مرحلتين:

I – المرحلة الأولى:

خلال المرحلة الأولى، لا يفتح المظلي مظلته. فتخضع الجملة S إلى قوة مقاومة الهواء التي ننمذجها بالعبارة $f=kv^2$ (حيث k معامل ثابت قيمته $k=0,28\,kg.m^{-1}$، و v سرعة مركز العطالة G).

1. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، جِدْ المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة مركز عطالة الجملة بدلالة الزمن.
2. استنتج عبارة السّرعة الحدية $v_{\lim}$ لمركز العطالة G، ثم استنتج قيمتها.
3. إن بيان تغير سرعة مركز عطالة الجملة بدلالة الزمن خلال هذه المرحلة، ممثل في (الشكل3).

– كم من نظام يُظهره البيام؟ حدد طبيعة الحركة عندئذ.



II – المرحلة الثانية:

خلال المرحلة الثانية من السقوط، يفتح المظلي مظلته عند اللحظة $t=12\,s$، لكبح حركته حتى يتمكن من الوصول إلى سطح الأرض بسلام، فتنخفض السرعة حتى تثبت عند قيمتها الحدية $v'_{\lim}=4,5\,m.s^{-1}$ بعد مدة قدرها $\Delta t=4s$ من فتح المظلة.

1. إن فتح المظلة يغير قوة الاحتكاك المطبقة من طرف الهواء فتصبح من الشكل $f'=k'.v^2$.

– بالاستعانة بالعبارة الحرفية للسّرعة الحديّة، حدد قيمة k'.

2. مثل بشكل كيفي على (الشكل3)، الذي يجب أن يرفق بورقة الإجابة، تطور سرعة مركز عطالة الجملة خلال الزمن لكامل السقوط.

التمرين(22): مقترح (بكالوريا 2008 – علوم تجريبية) (الحل المفصل – التمرين : 041 في بنك التمارين) (**)

هذا النص مأخوذ من مذكرات العالم هويجنز سنة 1690 " .. في البداية كنت أضن أن قوة الاحتكاك في مائع (غاز أو سائل) تتناسب طردا مع السرعة ، و لكن التجارب التي حققتها في باريس ، بينت لي أن قوة الاحتكاك ، يمكن أيضا أن تتناسب طردا مع مربع السرعة . وهذا يعني أنه إذا تحرك متحرك بسرعة ضعف ما كان عليه ، يصطدم بكمية مادة من المائع تساوي مرتين ولها سرعة ضعف ما كانت لها .... "

1- يشير النص إلى فرضيتي هويغنز حول قوة الاحتكاك في الموائع ، يعبر عنهما رياضيا بالعلاقتين:

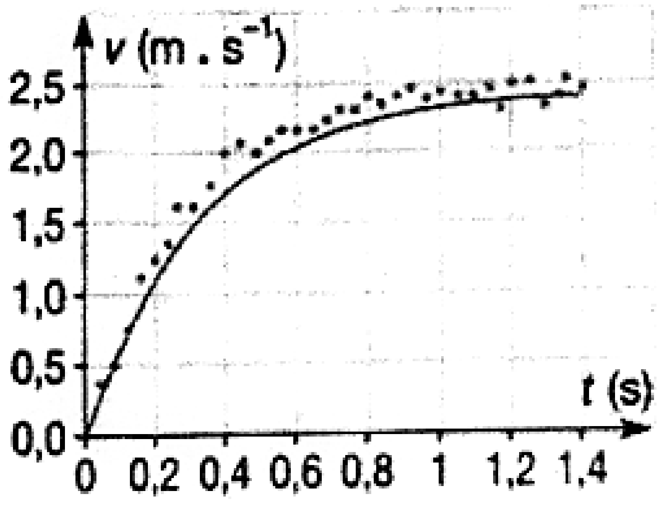
$$f = k\,v \quad .... \quad (1)$$

$$f = k'v^2 \quad .... \quad (2)$$

حيث : f قوة الاحتكاك ، v سرعة مركز عطالة المتحرك k ، k' ثابتان موجبان.

أرفق بكل علاقة التعبير المناسب من النص عن كل فرضية.

2- للتأكد من صحة الفرضيتين ، تم تسجيل حركة بالونة تسقط في الهواء، سمح التسجيل بالحصول على سحابة من النقاط تمثل تطور سرعة مركز عطالة البالونة ، في لحظات زمنية معينة (الشكل-1).



الشكل-1

أ) بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، و اعتماد الفرضية المعبر عنها بالعلاقة ($f = k\,v$) ، أكتب المعادلة التفاضلية لحركة سقوط البالونة بدلالة:

- الكتلة الحجمية للهواء (ρ_0).
- الكتلة الحجمية للبالونة (ρ).
- كتلة البالونة (m).
- تسارع الجاذبية الأرضية (g).
- ثابت التناسب (k).

ب) بين أن المعادلة التفاضلية يمكن كتابتها على الشكل: $\frac{dv}{dt} + Bv = A$ حيث A و B ثابتان.

جـ) اعتمادا على البيان (الشكل-1) . ناقش تطور السرعة (v) واستنتج قيمتها الحدية (v_m). ماذا يمكن القول عن حركة مركز عطالة البالونة خلال هذا التطور؟

د) أحسب قيمتي A و B.

3) رسم على نفس المخطط السابق المنحنى $v = f(t)$ وفق قيمتي A و B (المنحنى الممثل بالخط المستمر في الشكل1). ناقش صحة الفرضية الأولى.

يعطى : $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$ ، $\rho_0 = 1{,}3\ kg.m^{-3}$ ، $\rho = 4{,}1\ kg.m^{-3}$.

التمرين(23): مقترح (بكالوريا 2024 – رياضيات) (الحل المفصل – التمرين: 041 في بنك التمارين) (**)

جامع الجزائر

يُعَدُّ جامع الجزائر من أهمّ المنشآت المعماريّة في الجزائر، فهو ثالث أكبر مسجد في العالم، يتّسع لأكثر من **120** ألف مُصَلٍّ ومن معالمه المميّزة مئذنته (صومعته) الّتي تُعَدُّ الأعلى في العالم.

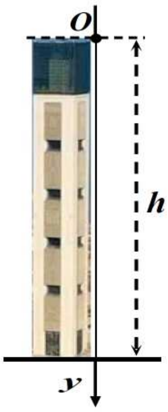
يهدف هذا التّمرين إلى تحديد ارتفاع مِئْذَنَةِ جامع الجزائر بطريقتين.

بعد زيارة مدرسيّة لجامع الجزائر، طلب الأستاذ عند عودة تلاميذه إلى الثّانوية تحديد ارتفاع مئذنة جامع الجزائر بطريقتين مختلفتين حسب ما درسوه في وحدة تطوّر جملة ميكانيكيّة.

معطيات:

- نهمل تأثير دافعة أرخميدس وقوى الاحتكاك مع الهواء؛
- نعتبر الكريّة المعدنيّة نقطة ماديّة؛
- شدّة شعاع حقل الجاذبيّة الأرضيّة: $g = 9{,}80\,m \cdot s^{-2}$

الطّريقة الأولى:



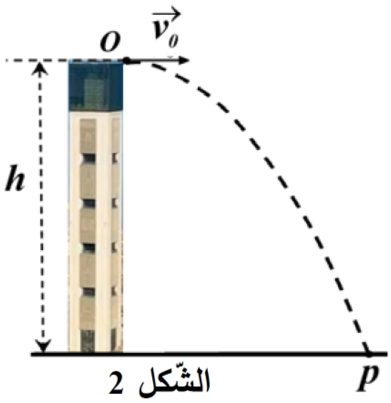
الشّكل 1

تُتْرَكُ كُرِيّة معدنيّة كتلتها m لتسقط في الهواء شاقوليّا في لحظة $t = 0$ نعتبرها مبدأ للأزمنة وبدون سرعة ابتدائيّة من النّقطة O أَعْلَى المئذنة والّتي تمثّل مبدأ المحور (Oy) الموجّه نحو الأسفل والمرتبط بمرجع الدّراسة كما في **الشّكل 1**.

1. ما نوع هذا السّقوط؟ برّر إجابتك.
2. بتطبيق القانون الثّاني لنيوتن، جِدْ المعادلة التّفاضليّة الّتي تحقّقها الفاصلة $y(t)$ لموضع الكريّة.
3. علما أنّ سرعة ارتطام الكريّة بسطح الأرض تساوي $72{,}11\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
   جد h ارتفاع المئذنة.

الطّريقة الثّانية:

تُقْذَفُ الكُريّة السّابقة في لحظة $t=0$ نعتبرها مبدأ للأزمنة وبسرعة ابتدائيّة أفقيّة $\vec{v}_0$ من النّقطة O أَعْلَى المئذنة لترتطم بسطح الأرض في نقطة P (**الشّكل 2**).



الشّكل 2

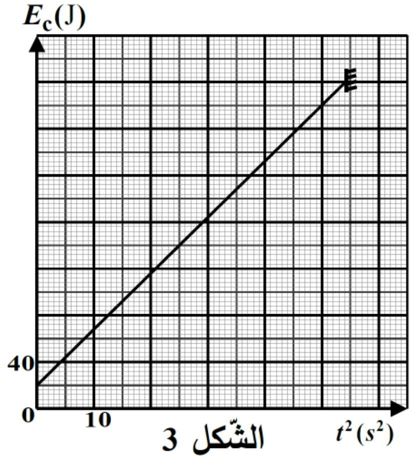
المنحنى البياني $E_C = f(t^2)$ (**الشّكل 3**) يمثّل تطوّر الطّاقة الحركيّة للكريّة بدلالة مربّع الزّمن بين لحظتي قذف الكريّة وارتطامها بسطح الأرض.

1. تُعْطَى العبارة اللحظيّة للطّاقة الحركيّة $E_C(t)$ للكريّة:

$$E_c(t)=\frac{1}{2}m\,g^2\,t^2+\frac{1}{2}m\,v_0^2$$

باستغلال المنحنى البياني (**الشّكل 3**)، تَحَقَّقْ أنّ: كتلة الكريّة $m=100\,g$

2. بتطبيق مبدأ انحفاظ الطّاقة على الجملة (كريّة) بين الموضعين O و P، واستغلال المنحنى البياني (**الشّكل 3**)، استنتج ارتفاع مِئْذَنة جامع الجزائر (h).



الشّكل 3

التمرين(24): مقترح (الحل المفصل – التمرين: 048 في بنك التمارين) (**)

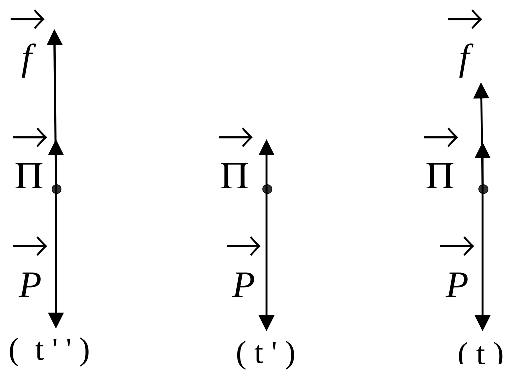
المعطيات :

$g=9,8\ m.s^{-2}$	التسارع الأرضي	$m=2,3g$	كتلة الكرية
$\rho=1,3kg.m^{-3}$	الكتلة الحجمية للهواء	$r=1,9\ cm$	نصف قطرها
$f=K.v^2$	قوة الاحتكاك	$V=\frac{4}{3}.\pi.r^3$	حجم الكرة

1- يعطى فيما يلي (الشكل 1) التمثيل الشعاعي للقوى المطبقة على كرية أثناء حركة سقوطها في الهواء. رتب هذه الأشكال حسب التزايد الزمني اثناء الحركة. علل .

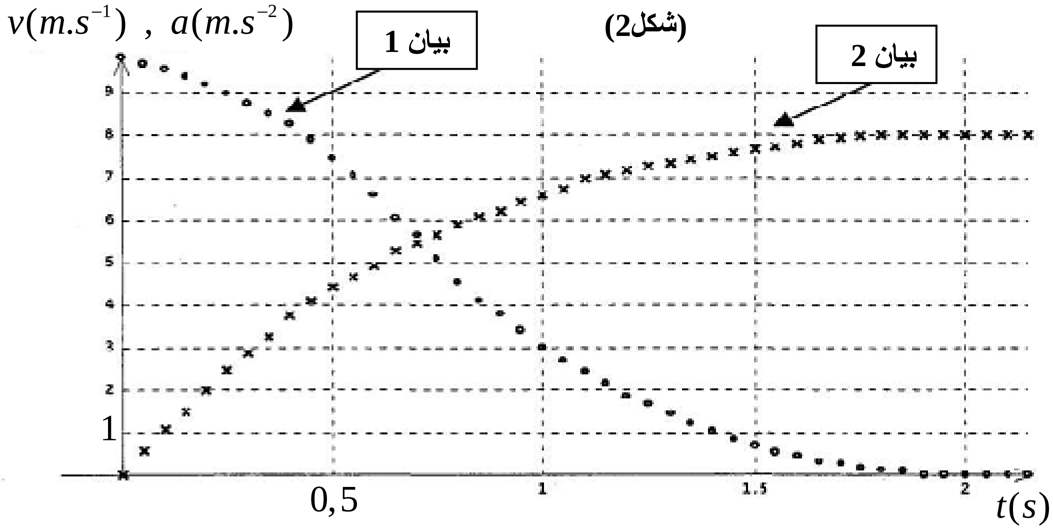
2- قارن بين قيمة كل من قوة الثقل ودافعة ارخميدس. ماذا تستنتج؟

3- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة الكرية.



شكل-1-

4– إن المتابعة الزمنية لحركة الكرية مكنت من رسم بياني السرعة والتسارع المبينين في (الشكل2)، انسب كل منحني بياني لمقداره الموافق.علل.



5– حدد بيانيا:

أ– قيمة السرعة الحدية v_ℓ.

ب– القيمة التجريبية للثابت k.

جـ– قيمة تسارع الحركة عند اللحظة $t = 0$.

6– في حالة كرة نصف قطرها r تنتقل داخل مائع تعطى العبارة النظرية لثابت الاحتكاك بالعلاقة: $k_t = 0,22.\pi.\rho.\ r^2$

– أحسب k_t ثم قارنه مع القيمة التجريبية k السابقة.

7– اثبت أن العبارة التجريبية للسرعة اللحظية للكرية تعطى بدلالة تسارع الحركة بالعلاقة التالية:

$$v(t) = \sqrt{64,4 - 6,6\,a(t)}$$

تمارين محلولة 3

التمارين ذات درجة ثالثة من الصعوبة

التمرين(25): (التمرين: 100 في بنك التمارين) (***)

كرة مطاطية مملوء بغاز ثنائي أكسيد الكربون كتلتها (m) ونصف قطرها $r = 10\,cm$ ، نهمل كتلة المطاط أمام كتلة الغاز.

نترك هذه الكرة تسقط عند اللحظة $t = 0$ دون سرعة ابتدائية شاقوليا من ارتفاع h عن سطح الأرض في جو هادئ.

تخضع الكرة أثناء سقوطها لتأثير الهواء الذي نُنَمذجه بقوة احتكاك مائع شدتها $f = kv^2$ ، وشعاعها معاكس لشعاع السرعة ودافعة أرخميدس $F_A = m_0 g$ حيث m_0 هي كتلة الهواء المُزاح من طرف الكرة. ننسب حركة الكرة لمرجع سطحي أرضي نعتبره غاليليا مرتبط بمحور شاقولي موجه نحو الأسفل $(Z'Z)$.

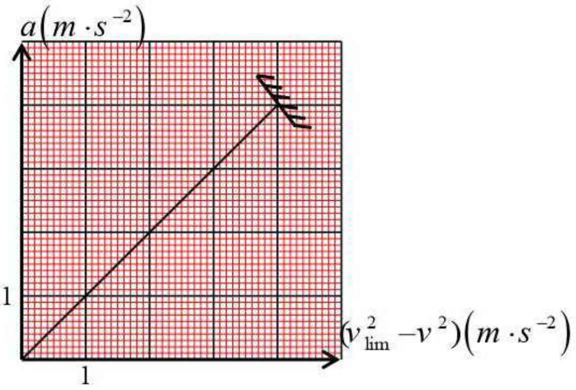
المعطيات:

- حجم الكرة: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ، $g = 10\,m.s^{-2}$
- الكتلة الحجمية للهواء: $\rho_a = 1{,}12\,kg/m^3$
- الكتلة الحجمية لغاز ثنائي أكسيد الكربون $\rho_{CO_2} = 1{,}87\,kg.m^{-3}$.
- الكتلة الحجمية لغاز الهيليوم $\rho_{He} = 0{,}17\,kg.m^{-3}$.

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بين أن المعادلة التفاضلية لسرعة الكرة تكتب بالشكل: $\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}v^2(t) = \frac{k}{m}v_{\lim}^2$.

2- أثناء سقوط الكرة قيمة تسارعها تتناقص، فسر ذلك.

3- بواسطة تجهيز خاص وبرنامج معلوماتي تمكنا من تحديد سرعة الكرة في لحظات مختلفة وقيمة مشتق السرعة بالنسبة للزمن في تلك اللحظات، ثم مثلنا بيانيا $a = f(v_{\lim}^2 - v^2)$ ، حيث a هو التسارع اللحظي للكرة (الشكل4).



الشكل (04)

أ- حساب m كتلة الكرة و m_0 كتلة الهواء المزاح.

ب- اعتمادا على البيان، احسب: ثابت الاحتكاك k والتسارع الابتدائي a_0 للكرة.

جـ- تكتسب الكرة في اللحظة $t = 1{,}5\,s$ سرعة حدية $(v_{\lim})$. احسب قيمة $v_{\lim}$.

4- احسب سرعة الكرة في اللحظة $t = 1{,}5\,s$ لو سقطت في الفراغ.

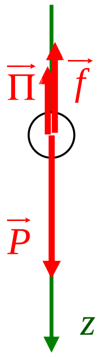
5- نعيد نفس التجربة في نفس الشروط بكرة لها نفي الحجم مملوءة بغاز الهيليوم.

أ- احسب شدة دافعة أرخميدس المؤثرة على الكرة ثم احسب ثقل الكرة.

ب- مثل القوى المؤثرة على الكرة عند اللحظة $t = 0$ ، ثم بعد انطلاقها.

الحل المفصل:

1– تبيين أن المعادلة التفاضلية لسرعة الكرة تكتب بالشكل: $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{k}{m}v^2(t)=\frac{k}{m}v_{\lim}^2$:



– الجملة المدروسة: كرة مطاطية.

– مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{k})$.

– القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.

– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum F_{ext}=m.\vec{a}_G \Rightarrow \vec{P}+\vec{\Pi}+\vec{f}=m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$P-\Pi-f=m.a \Rightarrow mg-m_0g-kv^2(t)=m\frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow m\frac{dv(t)}{dt}+kv^2(t)=mg-m_0g$$

$$\frac{dv(t)}{dt}+\frac{k}{m}v^2(t)=g-\frac{m_0g}{m}$$

$$\frac{dv(t)}{dt}+\frac{k}{m}v^2(t)=g\left(1-\frac{m_0}{m}\right) \quad .... \quad (1)$$

في النظام الدائم أين يكون $v=v_{\lim}$، $\frac{dv}{dt}=0$، نكتب:

$$\frac{k}{m}v_{\lim}^2=g\left(1-\frac{m_0}{m}\right) \quad .... \quad (2)$$

من (1) و (2) يكون:

$$\frac{dv(t)}{dt}+\frac{k}{m}v^2(t)=\frac{k}{m}v_{\lim}^2$$

2– تفسير تناقص التسارع:

عند اللحظة $t=0$، تخضع الكرية لتأثير ثقلها $\vec{P}$ ودافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$، جهة محصلتهما $\left(\vec{P}+\vec{\Pi}\right)$ تكون نحو الأسفل كون أن حركة الكرة كانت نحو الأسفل عند تركها، وأثناء ذلك تخضع الكرة إلى قوة ثالثة هي قوة الاحتكاك شدتها متزايدة $(f=kv^2)$ ومعاكسة لجهة الحركة، ما يجعل محصلة القوى الثلاث $\left(\vec{F}=\vec{P}+\vec{\Pi}+\vec{f}\right)$ تتناقص بمرور الزمن وبالتالي تتناقص قيمة التسارع $a=\frac{F}{m}$ حتى ينعدم كل منهما في النظام الدائم.

3– أ– حساب m كتلة الكرة و m_0 كتلة الهواء المزاح:

- $m=\rho_{CO_2}.V \Rightarrow m=\rho_{CO_2}.\frac{4}{3}.\pi.r^3 \Rightarrow m=1{,}87\times\frac{4}{3}\times\pi\times(0{,}1)^3=7{,}83\times10^{-3}\,kg$.
- $m_a=\rho_a.V \Rightarrow m_0=\rho_a.\frac{4}{3}.\pi.r^3 \Rightarrow m=1{,}12\times\frac{4}{3}\times\pi\times(0{,}1)^3=4{,}69\times10^{-3}\,kg$

ب- حساب ثابت الاحتكاك k:

بيانيا:

المنحنى $a = f(v_{\lim}^2 - v^2)$ هو مستقيم معادلته من الشكل:

$$a = \alpha(v_{\lim}^2 - v^2)$$

حيث α هو ميل المستقيم (معامل التوجيه)، ومن البيان:

$$\alpha = \frac{(4-0)}{(4-0)} = 1$$

ومنه المعادلة الرياضية تصبح: $a = (v_{\lim}^2 - v^2)$.

نظريا ومما سبق:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}v^2(t) = \frac{k}{m}v_{\lim}^2 \Rightarrow a(t) = \frac{k}{m}v_{\lim}^2 - \frac{k}{m}v^2(t) \Rightarrow a(t) = \frac{k}{m}\left(v_{\lim}^2 - v^2(t)\right)$$

بمطابقة العلاقة النظرية بالعلاقة الرياضية نجد:

$$\frac{k}{m} = \alpha \Rightarrow k = \alpha.m \Rightarrow k = 1\times 7,73\times 10^{-3} = 7,73\times 10^{-3}\, Kg/m$$

- حساب التسارع الابتدائي a_0 للكرة:

التسارع يتناقص وبالتالي أكبر قيمة للتسارع هي التسارع الابتدائي a_0، ومن البيان: $a_0 = 4\, m/s^2$.

جـ- حساب قيمة السرعة الحدية $v_{\lim}$ للكرة:

مما سبق وجدنا بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$mg - m_0 g - f(t) = m.a(t) \Rightarrow (m - m_0)g - k.v^2(t) = m.a(t)$$

في النظام الدائم أين: $v = v_{\lim}$، $a = 0$، نكتب:

$$(m - m_0)g - k.v_{\lim}^2 = 0 \Rightarrow (m - m_0)g = k.v_{\lim}^2 \Rightarrow v_{\lim} = \sqrt{\frac{(m - m_0)g}{k}}$$

$$v_{\lim} = \sqrt{\frac{(7,83\times 10^{-3} - 4,60\times 10^{-3})\times 10}{7,73\times 10^{-3}}} \simeq 2\, m/s$$

4- حساب سرعة الكرة في اللحظة $t = 1,5\, s$ لو سقطت في الفراغ:

سقوط الكرة في الفراغ معناه $a = g = 0$، ومنه:

$$\frac{dv}{dt} = 10\, m/s^2 \Rightarrow v = 10t + v_0$$

من الشروط الابتدائية لما $t = 0$ يكون $v_0 = 0$، ومنه:

$$v = 10t$$

عند اللحظة $t = 1,5\, s$، نجد:

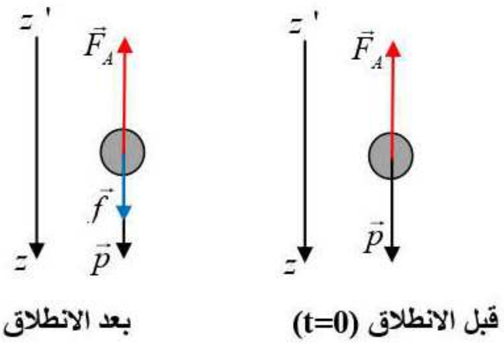
$$v = 10\times 1,5 = 15\, m/s$$

5– أ– حساب شدة دافعة أرخميدس المؤثرة ثقل الكرة:

- $\Pi = m_0 g = \rho_a.V.g \Rightarrow m_0 = \rho_a.\frac{4}{3}.\pi.r^3.g \Rightarrow m = 1{,}12\times\frac{4}{3}\times\pi\times(0{,}1)^3.10 = 4{,}69\times10^{-2}\,kg$
- $m = \rho_{He}.V \Rightarrow m = \rho_{He}.\frac{4}{3}.\pi.r^3 \Rightarrow m = 0{,}17\times\frac{4}{3}\times\pi\times(0{,}1)^3 = 7{,}12\times10^{-3}\,kg$.

ب– تمثيل القوى المؤثرة على الكرة عند اللحظة $t=0$، ثم بعد انطلاقها:

في هذه الحالة شدة دافعة أرخميدس أكبر من شدة قوة الثقل، إذن الكرة تصعد شاقوليا. وجهة قوة الاحتكاك أثناء الصعود تكون نحو الأسفل، وعليه يكون تمثيل القوى عند اللحظة $t=0$، وبعد انطلاق الكرة المطاطية كما يلي:



التمرين (26) : (التمرين : 101 في بنك التمارين) (***)

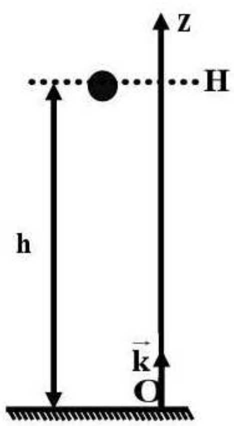
اهتم العالم الإيطالي غاليلي بدراسة حركة سقوط أجسام مختلفة، وقد تمت هذه الدراسة حسب بعض المصادر بتحرير أجسام من فوق برج بيزا $(tour\ de\ Pise)$.

للتحقق من بعض النتائج المتوصل إليها، سندرس في هذا الجزء السقوط في الهواء لكرتين لهما نفس القطر وكتلتان حجميتان مختلفتان.

– ندرس حركة كل كرة في المعلم $(O\vec{k})$ الموجه شاقوليا نحو الأعلى والمرتبط بسطح الأرض والذي نعتبره غاليليا.

– يطبق الهواء على كل كرة قوة ننمذجها بقوة احتكاك $\vec{f}$، (نهمل دافعة أرخميدس)

– نقبل أن شدة الاحتكاك تكتب على الشكل: $f = 0{,}22\cdot\rho_{air}\cdot\pi.R^2\cdot v^2$ حيث ρ_{air} الكتلة الحجمية للهواء، R قطر الكرة و v قيمة سرعتها.



الشكل 06

– لدراسة هاتين الحركتين تم استعمال كرتين متجانستين (a) و (b) دون سرعة ابتدائية من نفس القطر $R = 6\,cm$، وكتلتان حجميتان على التوالي: $\rho_{(a)} = 1{,}14\times10^4\,kg/m^3$ ، $\rho_{(b)} = 94\,kg/m^3$.

– عند نفس اللحظة $t=0$ تم تحرير الكرتين (a) و (b) دون سرعة ابتدائية من نفس المستوى الأفقي الذي تنتمي إلى النقطة H .

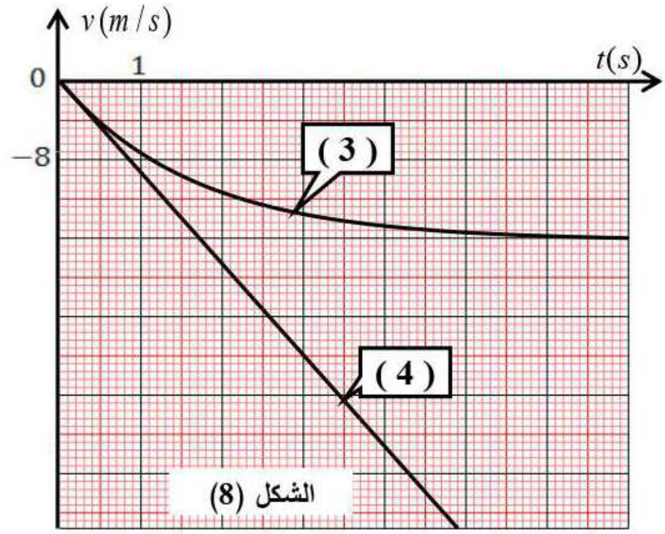
– يوجد هذا المستوى على ارتفاع $h = 69\,m$ من سطح الأرض (الشكل6).

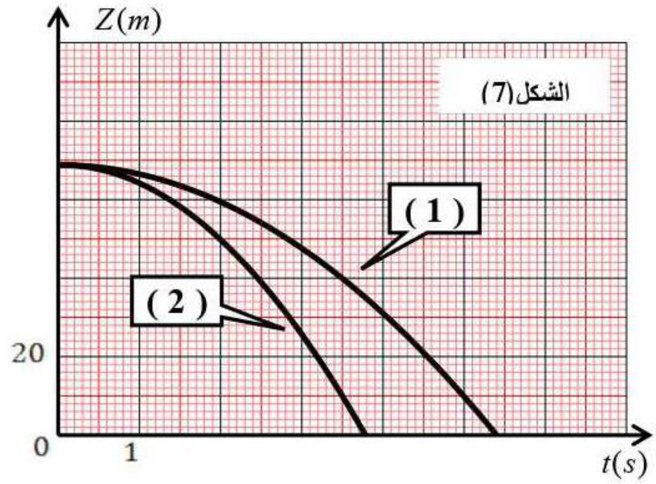
1– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، بين أن المعادلة التفاضلية لسرعة الكرة تكتب بالشكل: $\frac{dv(t)}{dt} = -g + 0{,}165\frac{\rho_{air}}{R.\rho_i}$.

حيث ρ_i الكتلة الحجمية للكرة (a) أو (b).

2– استنتج عبارة السرعة الحدية $v_{\lim}$ لحركة الكرة.

3– تمثل بيانات الشكلين (7) و (8) تغيرات كل من الفاصلة $z(t)$ والسرعة $v(t)$ بدلالة الزمن t.





أ– اعتمادا على عبارة السرعة الحدية، بين أن المنحنى (3) يوافق تغيرات سرعة الكرة (b).

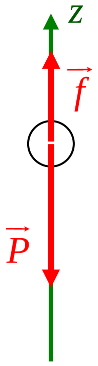
ب– فسر لماذا يوافق المنحنى (2) تغيرات فاصلة الكرة (a).

4– اعتمادا على المنحنى (4)، حدد طبيعة حركة الكرة (a) واكتب معادلتها الزمنية $z(t)$.

5– حدد قيمة الارتفاع بين مركزي الكرتين لحظة وصول الكرة الأولى سطح الأرض.

معطيات: حجم الكرة $V = \frac{4}{3}.\pi.R^3$، $g = 9{,}8\,m.s^{-2}$، $\rho_{air} = 1{,}3\,kg.m^{-3}$.

الحل المفصل:



1– تبيين بأن المعادلة التفاضلية لسرعة الكرة تكتب بالشكل: $\frac{dv(t)}{dt} = -g + 0{,}165\frac{\rho_{air}}{R.\rho_i}$:

– الجملة المدروسة: كرة.

– مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{k})$.

– القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.

– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{f} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$-P+f(t)=m.a(t)\ \Rightarrow\ -mg+0,22\cdot\rho_{air}\cdot\pi.R^2\cdot v^2(t)=m.\frac{dv(t)}{dt}$$

$$m.\frac{dv(t)}{dt}=-mg+0,22\cdot\rho_{air}\cdot\pi.R^2\cdot v^2(t)\ \Rightarrow\ \frac{dv(t)}{dt}=-g+\frac{0,22\cdot\rho_{air}\cdot\pi.R^2)}{m}\cdot v^2(t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt}=-g+\frac{0,22\cdot\rho_{air}\cdot\pi.R^2}{\rho_i V}\cdot v^2(t)\ \Rightarrow\ \frac{dv(t)}{dt}=-g+\frac{0,22\cdot\rho_{air}\cdot\cancel{\pi}.\cancel{R^2}}{\rho_i\cdot\frac{4}{3}.\cancel{\pi}.R^{\cancel{3}}}\cdot v^2(t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt}=-g+0,165.\frac{\rho_{air}}{R\rho_i}\cdot v^2(t)$$

<u>2– استنتج عبارة السرعة الحدية $v_{\lim}$ لحركة الكرة:</u>

عند النظام الدائم أين $v(\infty)=v_{\lim}$، $\frac{dv(\infty)}{dt}=0$، نكتب:

$$0=-g+0,165.\frac{\rho_{air}}{R\rho_i}.v_{\lim}^2\ \Rightarrow\ g=0,165.\frac{\rho_{air}}{R\rho_i}.v_{\lim}^2\ \Rightarrow\ v_{\lim}=\sqrt{\frac{g.R.\rho_i}{0,165.\rho_{air}}}$$

<u>3– أ– تبيين أن المنحنى (3) يوافق تغيرات سرعة الكرة (b):</u>

من المنحنى(3) توجد سرعة قيمة حدية لسرعة الكرية (b) قيمتها $v_{\lim}=-16\,m/s$، نتأكد من هذه القيمة حسابيا اعتمادا على عبارة السرعة الحدية السابقة:

$$v_{\lim}=\sqrt{\frac{9,8\times6\times10^{-1}\times94}{0,165\times1,3}}=16\,m/s$$

وبما أن سقوط الكرة معاكس للمحور الموجه (oz)، نكتب: $v_{\lim}=-16\,m/s$، وهي نفس قيمة السرعة الحدية المتحصل عليها من المنحنى (3)، إذ المنحنى (3) يوافق تغيرات سرعة الكرة (b).

<u>ب– تفسير لماذا يوافق المنحنى (2) تغيرات فاصلة الكرة (a):</u>

بمقارنة الكتلة الحجمية للكرتين، نلاحظ:

$$\rho_{(a)}>\rho_{(b)}\ \Rightarrow\ m_{(a)}>m_{(b)}$$

أثناء السقوط الكرة الأثقل هي التي تستغرق زمن أقل للوصول إلى الأرض، ومنه: المنحنى (2) الذي يقطع محور الأزمنة في زمن أقل هو الموافق لتغيرات فاصلة الكرية (a).

<u>4– تحديد طبيعة حركة الكرة (a):</u>

المنحنى (4) الموافق لحركة الكرة (a) هو خط مستقيم يشمل المبدأ معادلته من الشكل: $v=\alpha t$، حيث $\alpha<0$ يمثل فيزيائيا تسارع الحركة للكرة، وكون أن سقوط الكرة معاكس للمحور الموجه (oz) أي $v<0$ يصبح $av>0$، وتكون حركة الكرة مستقيمة متسارعة بانتظام.

● كتابة المعادلة الزمنية $z(t)$ لحركة الكرة (a):

حركة الكرة (a) مستقيمة متسارعة بانتظام تسارعها a ثابت، نحسب قيمته من المنحنى (4):

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{(0-5,7)\times 8}{(4,9-0)} = -9,3 m/s^2$$

ونكتب أيضا:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -9,3 m/s^2$$

بالتكامل نجد:

$$v(t) = -9,3t + v_0$$

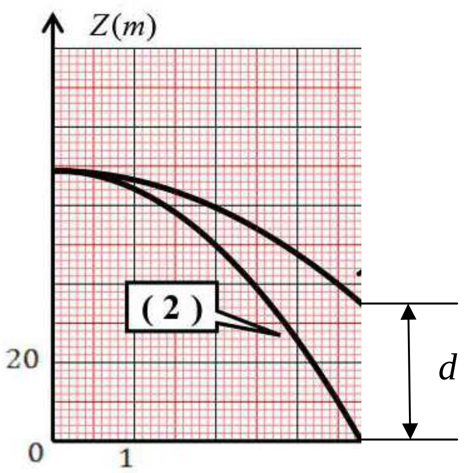
من الشروط الابتدائية لما $t=0$ يكون $v_0 = 0$، ومنه:

$$v(t) = -9,3t$$

ونكتب أيضا:

$$\frac{dz(t)}{dt} = -9,3t$$

بالتكامل نجد:



$$z(t) = -4,65t^2 + z_0$$

من الشروط الابتدائية واعتمادا على المنحنى $z(t)$، لدينا $z_0 = 0$، ومنه:

$$z(t) = -4,65t^2 + z_0$$

5– تحديد قيمة الارتفاع بين مركزي الكرتين لحظة وصول الكرة الأولى سطح الأرض:

تصل الكرة (a) إلى سطح الأرض عند اللحظة $t = 3,8s$، عند هذه اللحظة تكون الكرة (a) على ارتفاع قدره:

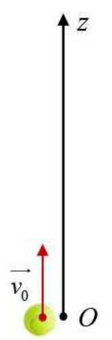
$$d = 1,7 \times 10 = 34 m$$

التمرين(27): (التمرين: 098 في بنك التمارين) (***)

خلال حصة الأعمال المخبرية قام أحد التلاميذ، بقذف كرة تنس شاقوليا نحو الأعلى في اللحظة $t=0$ بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ من نقطة O نعتبرها مبدأ لمعلم شاقولي $(O,\vec{k})$ موجه نحو الأعلى ومرتبط بمرجع عطالي مناسب (الشكل1).

تخضع الكرة خلال حركتها الشاقولية لثقلها $\vec{P}$ وقوة احتكاك $\vec{f}$ عبارتها من الشكل: $\vec{f} = -k\vec{v}$.

1. ما هو المرجع المناسب لدراسة حركة الكرة، وما هو الشرط اللازم ليكون عطاليا.
2. بين أن دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ مهملة أمام الثقل $\vec{P}$.



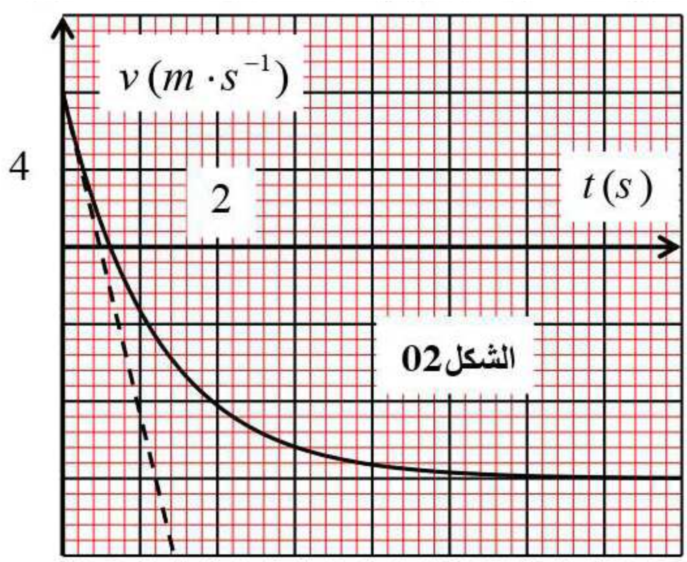
الشكل –01

3. مثل القوى الخارجية المؤثرة على الكرة خلال مرحلة الصعود.

4. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، جِد المعادلة التفاضلية المميزة لحركة مركز عطالة الكرة بدلالة سرعتها $v(t)$.

5. جِد عبارة السرعة الحدية $v_{\lim}$ التي تبلغها الكرة خلال حركتها بدلالة k، g و m.

6. الدراسة التجريبية لحركة مركز عطالة الكرة مكنت من الحصول على المنحنى البياني $v(t)$ الممثل لتطور سرعة الكرة بدلالة الزمن(الشكل2).



– باستغلال البيان:

أ. جِد اللحظة t_1 التي تغير عندها الكرة جهة حركتها، ثم استنتج قيمة تسارعها عند هذه اللحظة.

ب.عَدّدْ أطوار الحركة محدد طبيعتها في كل طور.

ج. حدد قيمة ثابت الزمن τ، ثم استنتج قيمة ثابت الاحتكاك k.

د. جِدْ قيمة كل من $v_{\lim}$، والتسارع الابتدائي a_0.

هـ. جِدْ اللحظة t_2 التي يصبح عندها تسارع الكرة $a=-1,3m.s^{-2}$.

7. مثل بشكل تقريبي منحنى تطور تسارع حركة مركز عطالة الكرة بدلالة الزمن.

8. نملأ الكرة بالماء ثم نعيد التجربة بنفس الشروط. مثل بشكل كيفي مع المنحنى السابق بيان تطور سرعة الكرة في هذه الحالة. مع التعليل.

معطيات: – كتلة الكرة $m=58\,g$، الكتلة الحجمية للهواء $\rho_{air}=1,29\,kg.m^{-3}$، حجم الكرة $V=143,8\,cm^3$ ، تسارع الجاذبية الأرضية $g=10\,m.s^{-2}$.

<u>الحل المفصل:</u>

<u>1. المرجع المناسب لدراسة حركة الكرة والشرط اللازم ليكون عطاليا:</u>

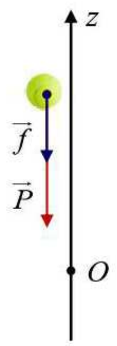
المرجع السطحي الأرضي، والشرط اللازم ليكون عطاليا هو مدة دراسة الحركة قصيرة أمام دور الأرض حول محورها.

<u>2. تبيين أن دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ مهملة أمام الثقل $\vec{P}$:</u>

$$\frac{P}{\Pi}=\frac{m.\cancel{g}}{\rho_{air}.V.\cancel{g}}\Rightarrow\frac{P}{\Pi}=\frac{m}{\rho_{air}.V}\Rightarrow\frac{P}{\Pi}=\frac{58\times10^{-3}}{1,29\times143,8\times10^{-6}}=312,7$$

$$\Rightarrow P=312,7\times\Pi$$

نلاحظ شدة قو الثقل أكبر بكثير من شدة دافعة أرخميدس ومنه دافعة أرخميدس مهملة أمام الثقل.



3. تمثيل القوى الخارجية المؤثرة على الكرة خلال مرحلة الصعود:

(الشكل)

4. إيجاد المعادلة التفاضلية المميزة لحركة مركز عطالة الكرة بدلالة سرعتها $v(t)$:

– الجملة المدروسة: كرة.

– مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{k})$.

– القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.

– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum F_{ext} = m.\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{f} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$-P - f = m.a \Rightarrow -m.g - k.v(t) = m\frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow m\frac{dv(t)}{dt} + k.v(t) = -m.g$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}v(t) = -g$$

5. إيجاد عبارة السرعة الحدية $v_{\lim}$ التي تبلغها الكرة خلال حركتها بدلالة k، g و m:

في النظام الدائم أين: $v = v_{\lim}$، $\frac{dv}{dt} = 0$، نكتب:

$$\frac{k}{m}v_{\lim} = -g \Rightarrow v_{\lim} = -\frac{mg}{k}$$

6. أ. إيجاد اللحظة t_1 التي تغير عندها الكرة جهة حركتها:

عند بلوغ أقصى ارتفاع تغير الكرة جهة حركتها وتنعدم سرعتها، ومن البيان لحظة انعدام السرعة والتي نفسها التي غيرت فيها الكرة جهة حركتها هي:

$$t_1 = 0,6 \times \left(\frac{2}{2}\right) = 0,6\,s$$

● استنتاج قيمة تسارعها عند هذه اللحظة:

اعتمادا على ما سبق نكتب:

$$m\frac{dv(t)}{dt} + k.v(t) = -m.g \Rightarrow m.a(t_1) + k.v(t_1) = -m.g$$

تبلغ الكرية أقصى عند اللحظة $t_1 = 0,6\,s$ وتكون السرعة عندئذ معدومة $v(t_1) = 0$، بالتعويض نجد:

$$m.a(t_1) = -m.g \Rightarrow a(t_1) = -g \Rightarrow a(t_1) = -10\,m/s^2$$

ملاحظة:

يمكن حساب التسارع عند اللحظة t_1 بحساب ميل المماس عند هذه اللحظة.

ب. تحديد أطوار الحركة وطبيعتها في كل طور:

▪ الطور الأول $(0 \leq t \leq 0,6\,s)$:

المنحنى $v(t)$ هو خط منحني غير مستقيم، وكون أن $v > 0$ ، $a < 0$ (الميل سالب)، يكون $a.v < 0$ ، فالحركة في هذا الطور مستقيمة متباطئة (دون انتظام).

▪ الطور الثاني $(0,6 \leq t \leq 6\,s)$:

المنحنى $v(t)$ هو خط منحني غير مستقيم، وكون أن $v < 0$ ، $a < 0$ (الميل سالب)، يكون $a.v < 0$ ، فالحركة في هذا الطور مستقيمة متسارعة (دون انتظام).

▪ الطور الثالث $(t \geq 6\,s)$:

المنحنى $v(t)$ هو خط مستقيم يوازي محور الأزمنة ما يعني أن السرعة ثابتة، وبالتالي فالحركة في هذا الطور مستقيمة منتظمة.

ج. تحديد قيمة ثابت الزمن τ:

بالاعتماد على مماس المنحنى $v(t)$ عند اللحظة $t = 0$ ، نجد $\tau = 1,2\,s$.

● استنتاج قيمة ثابت الاحتكاك k:

$$\tau = \frac{m}{k} \Rightarrow k = \frac{m}{\tau} \Rightarrow k = \frac{58\times10^{-3}}{1,2} = 4,83\times10^{-2}\,kg/s$$

د. إيجاد قيمة $v_{\lim}$:

من البيان عند بلوغ النظام الدائم يكون: $v_{\lim} = -12\,m/s$.

● إيجاد قيمة التسارع الابتدائي a_0:

$a = \frac{dv}{dt}$ ، ومنه التسارع يمثل ميل مماس البيان عند اللحظة المعتبرة، وعند اللحظة $t = 0$ يكون من البيان:

$$a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_0 = \frac{(-3-2)\times4}{(1,2-0)} = -16,67\,m/s^2$$

هـ. إيجاد اللحظة t_2 التي يصبح عندها تسارع الكرة $a = -1,3\,m.s^{-2}$:

نحسب أولا سرعة الكرة عند اللحظة t_1، واعتمادا على ما سبق نكتب:

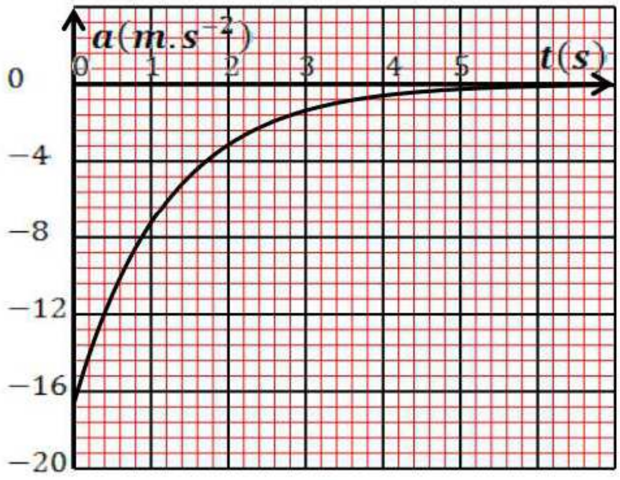
$$m\frac{dv(t_2)}{dt} + k.v(t_2) = -m.g \Rightarrow m.a(t_1) + k.v(t_1) = -m.g$$

$$v(t_1) = \frac{-m.g - m.a(t_1)}{k} \Rightarrow v(t_1) = \frac{-m\left(g - a(t_1)\right)}{k}$$

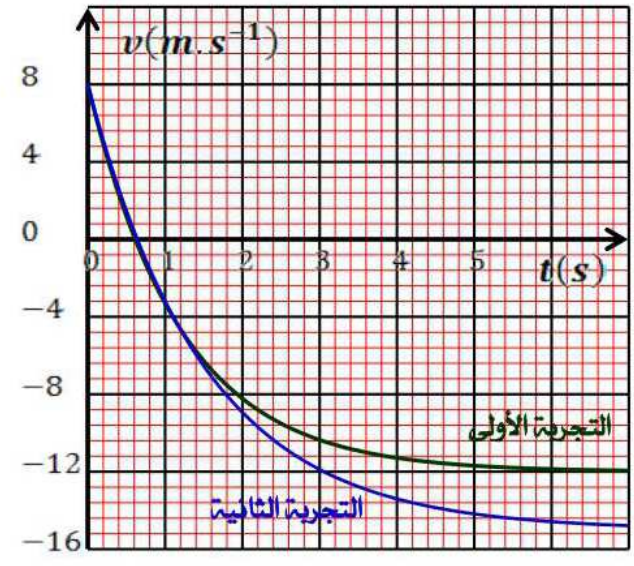
$$v(t_1) = \frac{-58\times10^{-3}\left(10-1,3\right)}{4,83\times10^{-2}} = -10,45\,m/s$$

بالإسقاط في البيان مع أخذ سلم الرسم بعين الاعتبار، نجد: $t_2 = 3s$.

7. تمثيل تقريبي لمنحنى تطور تسارع حركة مركز عطالة الكرة بدلالة الزمن:



8. تمثيل كيفي مع المنحنى السابق بيان تطور سرعة الكرة:



في حالة ملء الكرة بالماء تزيد كتلتها ولا يتغير ثابت الاحتكاك لعدم تغير سطح التلامس، وبالتالي:

– يزداد ثابت الزمن $\tau = \dfrac{m}{k}$.

– وتزداد السرعة الحدية $v_{\lim} = \dfrac{m.g}{k}$.

– وتقل قيمة التسارع الابتدائي، لأن: $\dfrac{dv(t)}{dt} + \dfrac{k}{m}v(t) = -g$ ،

وعند اللحظة $t = 0$، يكون:

$$a_0 + \frac{k}{m}v_{\lim} = -g \;\Rightarrow\; a_0 = -g - \frac{k}{m}v_{\lim}$$

وكان سابقا $a_0 = -g$ لأن دافعة أرخميدس مهملة.

المنجد
للعلوم الفيزيائية
رفيقك إلى البكالوريا

facebook.com/faresfergani25
www.sites.google.com/site/faresfergani