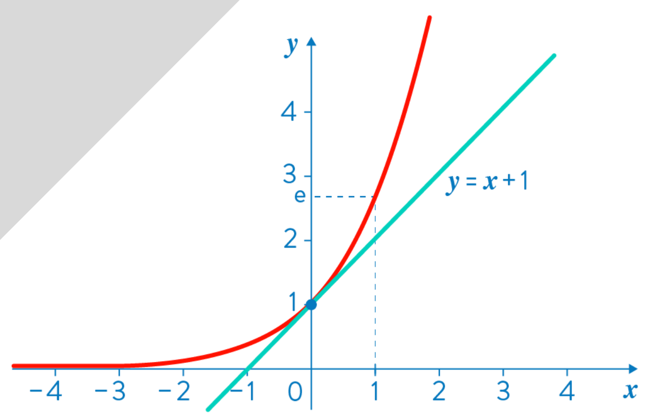
مجلة الدالة الأسية

الأستاذ سوايسية هشام



x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(\exp)'(x)$		$+$	1	$+$	e	$+$	
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

17 تمرين شامل في الدالة الأسية مرفقة بالحل

شعبة علوم تجريبية+تقني+رياضيات

تمرين 01

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g\left(x\right)=-x+2+e^{x}$

❶ ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g\left(x\right)$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f\left(x\right)=x+\left(x-1\right)e^{-x}$

$\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$

❶ احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$

❷ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'\left(x\right)=e^{-x}g\left(x\right)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

❸ بين أن المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا $\left(\Delta\right)$ بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$.

❹ ادرس الوضع النسبي لـ $\left(C_f\right)$ والمستقيم $\left(\Delta\right)$

❺ تحقق أن المعادلة $f\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.3<\alpha<0.5$

❻ أ) بين أن $\left(C_f\right)$ يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياها.

ب) اكتب معادلة المماس $\left(T\right)$ لـ $\left(C_f\right)$ عند النقطة A.

❼ أنشئ $\left(C_f\right)$ و $\left(\Delta\right)$.

تمرين 02

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f\left(x\right)=x-\left(x^2+1\right)e^{-x+1}$

$\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$

❶ أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)$ ثم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$

ب) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'\left(x\right)=1+\left(x-1\right)^2e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

❷ أ) بين أن المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا $\left(\Delta\right)$ معادلته $y=x$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ $\left(C_f\right)$ والمستقيم $\left(\Delta\right)$

❸ بين أن المعادلة $f\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.8<\alpha<1.9$

❹ أ) اكتب معادلة المماس $\left(T\right)$ لـ $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1

ب) بين أن $\left(C_f\right)$ يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثياها.

❺ احسب $f\left(3\right)$ ، $f\left(0\right)$ ثم أنشئ $\left(\Delta\right)$ ، $\left(T\right)$ ثم $\left(C_f\right)$

❻ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$

تمرين 03

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$

❶ عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يقبل المنحنى (C_f) عند النقطة $A(0;-3)$ مماسا معامل توجيهه 3 والعدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$

❷ نضع $a = 1$ ، $b = 0$ ، $c = -3$

أ) احسب كلّا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

ج) اكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0. ثم عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

❸ أرسم (T) و (C_f).

❹ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$

تمرين 04

نعتبر في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $y' + 3y = 2e^{-x}...(E)$

❶ عين قيمة العدد الحقيقي a بحيث تكون الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = a \times e^{-x}$ حل للمعادلة (E)

❷ نعتبر المعادلة التفاضلية $y' + 3y = 0...(E')$

✯ حل المعادلة (E')

❸ بين أن الدالة f حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $f - g$ حلا للمعادلة (E')

❹ استنتج حلول المعادلة (E).

❺ عين حلا خاصا f للمعادلة (E) بحيث يكون معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f في النقطة ذات الفاصلة 0 يساوي -4.

تمرين 05

✫ لكل سؤال مما يلي إجابة واحدة حددها مع التعليل.

إذا كان $\lim_{x\to1} v(x)=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty} v\left(e^{-3x}+1\right)$ تساوي:	$+\infty$	1	0
إذا كانت h دالة تحقق من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $e^{-x}\le h(x)\le 2e^{-x}$ دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=xe^{x}h(x)$ فإن:	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند 2 فإن $\lim_{h\to0}\frac{f(2)-f(2-2h)}{2h}$ تساوي:	$f'(2)$	$-f'(2)$	$+\infty$
حل المعادلة التفاضلية $y'+2y-2=0$ والذي يحقق $f(0)=0$ هو f حيث:	$f(x)=e^{-2x}-1$	$f(x)=-e^{-2x}-1$	$f(x)=-e^{-2x}+1$
مجموعة حلول المتراجحة $e^{x}-e^{-x}$ هي:	$]-\infty;0]$	$[1;+\infty[$	$\mathbb{R}$

تمرين 06

✫ لكل سؤال مما يلي إجابة واحدة حددها مع التعليل.

إذا كان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{e^{x}}\right)$ تساوي:	$+\infty$	$-\infty$	0
إذا كانت h دالة تحقق من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $x\le f(x)\le x^2$ و g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{f(x)}{e^{x}}$ فإن:	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند 1 فإن $\lim_{h\to0}\frac{f(1)-f(1+2h)}{2h}$ تساوي:	$f'(1)$	$-f'(1)$	$+\infty$
حل المعادلة التفاضلية $y'=2y-2$ والذي يحقق $u(0)=0$ هو u حيث:	$u(x)=-e^{-2x}-1$	$u(x)=-e^{-2x}+1$	$u(x)=e^{-2x}+1$
مجموعة حلول المتراجحة $e^{-3x+2}\le 1$ هي:	$]-\infty;\frac{2}{3}]$	$[\frac{2}{3};+\infty[$	$\mathbb{R}$

تمرين 07

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=2x+1+e^{2x}$

❶ ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.7;-0.6[$ $0.3<\alpha<0.5$

❸ استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=1-x+(x+1)e^{-2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$

❶ أ) احسب كلا من $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

ب) بين أن المنحنى (C_f) يبقل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

ج) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ)

❷ أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = -g(x)\,e^{-2x}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث: $-1.2 < x_1 < -1.1$ و $1.1 < x_2 < 1.2$

❸ عين دون حساب: $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

❹ أنشئ (C_f) و (Δ) (يعطى $f(\alpha) = 2.9$).

تمرين 08

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = 1 - x + e^{x}$

❶ ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$

❶ احسب كلا من $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

❷ أ) بين أن المنحنى (C_f) يبقل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x + 1$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ)

❸ أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = -g(x)\,e^{-x}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

ج) بين أن منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-0.5 < \alpha < -0.4$

❹ اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (T)

❺ أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f).

❻ عين حسب قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = mx + 1$ حلين متمايزين.

تمرين 09

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = (x+1)e^x - e$

❶ ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $0.5 < \alpha < 0.6$

❸ استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^x - ex + e - 2$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$

❶ احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -ex + e - 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ).

ج) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ)، يطلب تعيين معادلته.

❹ أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) يعطى $f(\alpha) \approx 0.2$.

❺ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $(m+2-e)e^{-x} = x$.

III) h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = e\left[(x+1)e^x - x\right]$

(C_h) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$

❶ عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x: $h(x) = f(x+a) + b$

❷ اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

تمرين 10

I) k دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $k(x) = (-x+1)e^x - 1$

جدول تغيراتها موضح في الشكل المقابل:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(x)$			0		
$k(x)$	-1	↗	0	↘	$-\infty$

❶ شكل جدول تغيرات الدالة k.

❷ استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x $k(x) \leq 0$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (-x+2)(e^x+1)$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$

❶ احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷ بين انه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = k(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

❸ أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)-(-x+2)=(-x+2)e^{x}$

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذي $y=-x+2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ (يعطى $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$).

ج) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ).

❹ أ) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) معامل توجيهه -1

ب) اكتب معادلة للمماسين (T) و (T') للمنحنى (C_f) عند النقطتين ذواتي الفاصلتين 0 و 1 على الترتيب.

❻ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

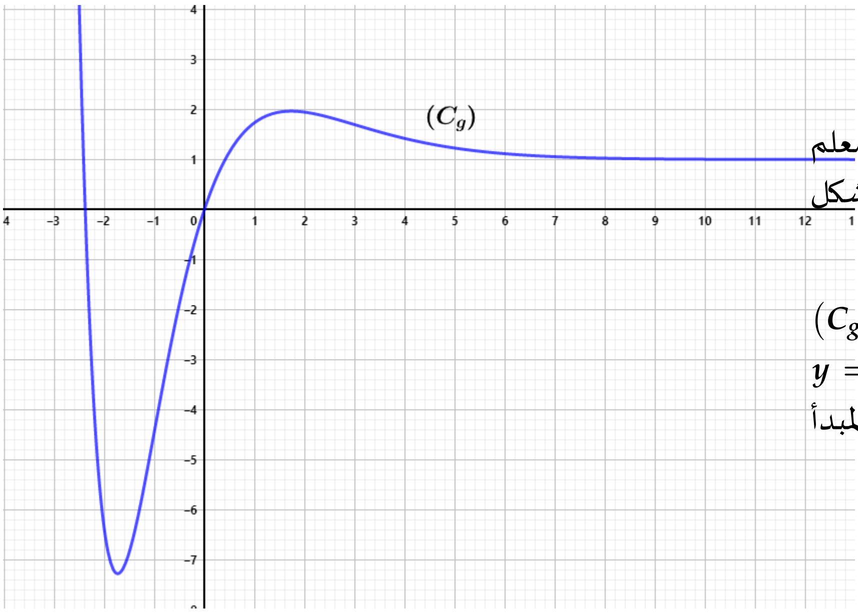
❻ ارسم (Δ) ، (T) ، (T') و (C_f) يعطى.

❺ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المعادلة $f(x)=-x+m$.

تمرين 11

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=a+\left(x^{2}+2x-b\right)e^{-x}$

(C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$ (الشكل المقابل):



❶ عين كلا من a و b إذا علمت أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=1$ بجوار $(+\infty)$ ويقبل مماسا عند المبدأ معامل توجيهه 3.

❷ فيما يلي نضع: $a=b=1$

أ) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $-2.5<\alpha<-2$.

ب) استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dots$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$

❶ احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷ أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=g(x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ بين ان منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في ثلاث نقاط يطلب تعيينها.

❹ أ) بين أن المستقيم (Δ) ذي $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ).

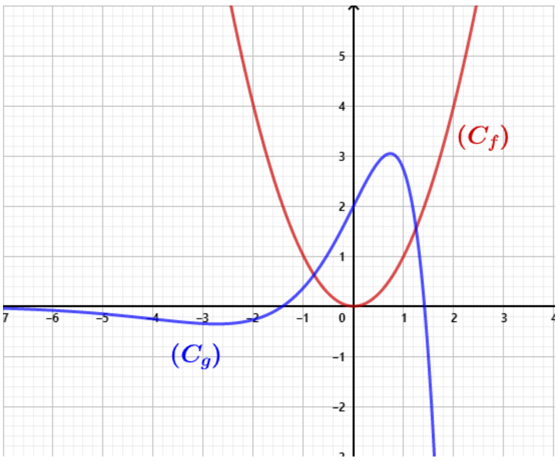
❻ ارسم (Δ) و (C_f)

تمرين 12

I) g و h دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$ بـ

$$\begin{cases} g(x) = (2 - x^2)\, e^x \\ h(x) = x^2 \end{cases}$$

(C_g) و (C_h) تمثيلهما البيانيين في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ (الشكل المقابل).



نقبل أن المعادلة $g(x) = h(x)$ تقبل حلين متمايزين α ، β بحيث: $-0.7 < \alpha < -0.8$ ، $1.2 < \beta < 1.3$،

اعتمادا على الشكل المقابل:

❶ ادرس الوضع النسبي لـ (C_g) و (C_h).

❷ استنتج إشارة $g(x) - h(x)$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{e^x + x^2 + x}{e^x - x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

❶ احسب كلا من $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا.

❷ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = \frac{g(x) - h(x)}{(e^x - x)^2}$

❸ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❹ أنشئ (C_f) يعطى $f(\alpha) \approx 0.23$ ، $f(\beta) \approx 2.81$.

❺ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المعادلة $f(x) = -x + m$.

تمرين 13

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=(2x+1)e^{x}-1$

❶ ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ احسب $g(0)=0$ ثم استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x(e^{x}-1)^{2}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$

❶ احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

❷ أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=(e^{x}-1)g(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) المار بمبدأ المعلم.

❸ أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ).

❹ أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f).

❺ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=mx$.

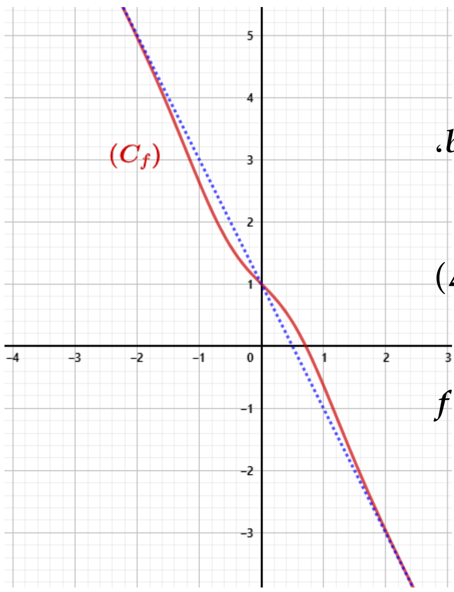
III) h دالة معرفة على $\mathbb{R}^{*}$ بـ: $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

(C_h) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$

❶ دون حساب عبارة $h(x)$ حدد اتجاه تغير الدالة h على مجموعة تعريفها.

تمرين 14

I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=xe^{-x^{2}}+ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان مع $a\neq0$ و (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) (الشكل المقابل).



❶ اكتب معادلة للمستقيم (Δ) ثم استنتج أن $a=-2$ و $b=1$.

إذا علمت أن $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x^{2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x^{2}}=0$

❷ اثبت أن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين للمستقيم (Δ)

يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

❸ عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=-2x+m$ حلين سالبين.

II) h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

(C_h) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$

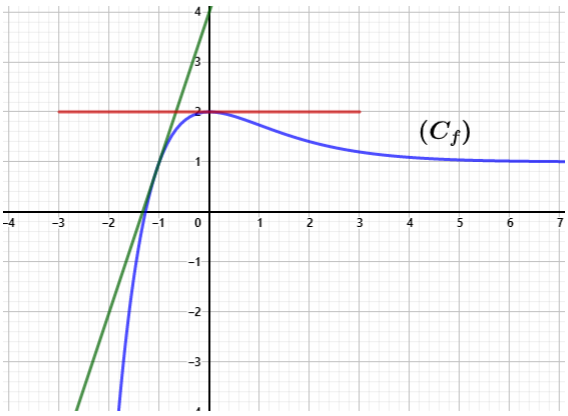
❶ احسب نهايات الدالة h عند أطراف مجموعة تعريفها.

❷ احسب $h'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h على مجموعة تعريفها.

تمرين 15

I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$ حيث a و b عددان حقيقيان، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$ (الشكل المقابل).

❶ بقراءة بيانية



أ) عين كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر هذه الأخيرة بيانيا.

ب) عين كلا من $f(0)$ ، $f(-1)$ ، $f'(0)$ ، $f'(-1)$

ج) اعتمادا على ما سبق جد قيمة كلا من a و b ثم استنتج عبارة $f(x)$

❷ أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1.4 < \alpha < -1.2$.

ب) استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

❸ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(|x|+1)e^{-x} + 1$

أ) احسب كلّا من: $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{h(x)-2}{x}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{h(x)-2}{x}$ ثم فسر النتيجة بيانيا، (نقبل أن $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{x} = -1$)

II) نضع فيما يلي: $f(x) = (x+1)e^{-x} + 1$ ونعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x - \frac{x+2}{e^x}$

(C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$ $\left(\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1cm\right)$

❶ أ) احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_g) بجوار $+\infty$

❷ أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $g'(x) = f(x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_g) في النقطة التي فاصلتها -1.

❹ بين أنّ $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha+1}$ ثم استنتج إشارة $g(\alpha)$.

❹ أ) احسب $g(0)$ ثم أنشئ كلا من (Δ) ، (C_f) والمنحنى (C_g).

ب) m وسيط حقيقي، ناقش حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $g(x) = x + m$.

تمرين 16

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^2e^{x-1}-\frac{x^2}{2}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$

❶ احسب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم عبر عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ حيث g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x+2)\,e^{x-1}-1$

❷ دراسة إشارة $g(x)$

أ) احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تأكد أن: $0.20<\alpha<0.21$

د) عين إشارة $g(x)=0$ على $\mathbb{R}$.

❸ احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

❹ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❺ بين أنّ: $f(\alpha)=\frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

❻ نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $h(x)=\frac{-x^3}{2(x+2)}$

أ) احسب $h'(x)$ ثم عين اتجاه تغير الدالة h على المجال $[0;1]$

ب) استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

❼ عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات.

تمرين 17

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=(x+a)\,e^x+b$ حيث a و b عددان حقيقيان، (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$

❶ عين قيميتي كلا من a و b علما أن (C_g) يقبل مماسيا في النقطة التي فاصلتها 1 موازيا لحامل محور الفواصل ويشمل $A(0;-1)$.

❷ نضع فيما يلي: $g(x)=(x-2)\,e^x+1$

أ) احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $-1.3<\alpha<-1.2$ و $1.8<\beta<1.9$

ب) استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$.

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ: $f(x)=\frac{x-1}{1-e^x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$

❶ احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷ احسب كلا من $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا.

❸ أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(1-e^x)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

❸ أ) بين أن المنحنى (C_f) يبقل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $-\infty$ معادلته $y = x - 1$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ).

❺ بين أن $f(\alpha) = \alpha - 2$ ، $f(\beta) = \beta - 2$ ثم عين حصرا لكل من $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

❻ احسب $f(1)$ أنشئ (C_f) و (Δ).

تمرين 01

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = -x + 2 + e^x$

❶ دراسة تغيرات الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها.

$g'(x) = -1 + e^x$ ومنه $g'(x) < 0$ تعني أن $-1 + e^x < 0$ ومنه $e^x < 1$ ومنه $x < 0$.

إذن g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$

ومنه:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} -x + 2 + e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} -x + 2 + e^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(-1 + \frac{2}{x} + \frac{e^x}{x}\right) = +\infty$$

❷ استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات $g(x) > 0$

II) ❶ حساب كلا من $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

❷ إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = e^{-x} g(x)$ ثم استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

$$f'(x) = 1 + 1 \times e^{-x} + (e^{-x}(x-1))$$

ومنه $f'(x) = 1(-x+2)e^{-x}$ نضرب ونقسم على e^x

نجد: $f'(x) = \frac{e^x - x + 2}{e^x}$

ومنه: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x} = e^{-x} g(x) > 0$

✫ الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ومنه:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

❸ لإثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} (x-1)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{-x}} - \frac{1}{e^{-x}} = 0$$

❹ دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ):

إشارته من إشارة $f(x)-y=(x-1)e^{-x}$

ومنه $(x-1)$:

☆ (C_f) تحت (Δ) لما $x\in]-\infty;1[$

☆ (C_f) يقطع (Δ) لما $x=1$

☆ (C_f) فوق (Δ) لما $x\in]1;+\infty[$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)

❺ التحقق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.3<\alpha<0.5$:

☆ الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]0.3;0.5[$ و $f(0.3)=-0.22$ ، $f(0.5)=0.2$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.3<\alpha<0.5$

❻ أ) إثبات أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياها:

ومنه $f'(x)=e^{-x}(e^x-x+2)$:

$$f''(x)=-e^{-x}(-x+2+e^x)+(-1+e^x)e^{-x}=e^{-x}(x-2-e^x-1+e^x)=(x-3)e^{-x}$$

إشارته من إشارة $(x-3)$ ومنه:

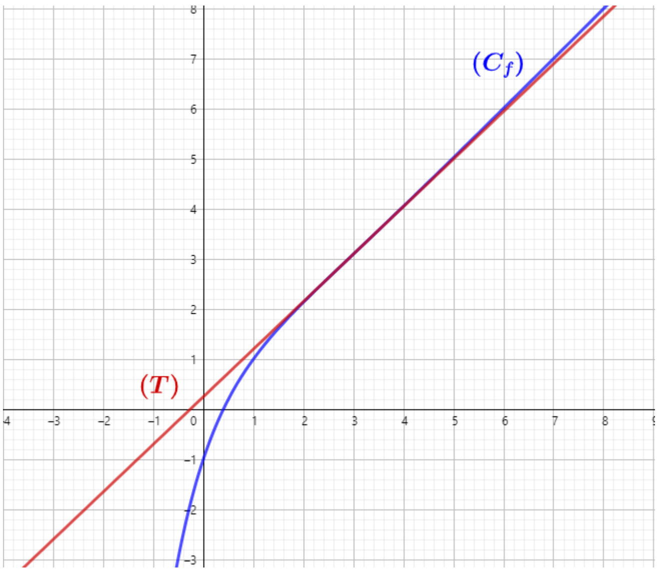
x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

إذن نقطة الانعطاف إحداثياها: $A(3;3+2e^{-3})$

ب) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة A:

$$(T):y=f'(3)(x-3)+f(3)=(1-e^{-3})(x-3)+3+2e^{-3}=(1-e^{-3})x+5e^{-3}$$

❼ إنشاء (C_f) و (Δ).



تمرين 02

❶ أ) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ثم إثبات أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$:

لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ لأنّ: $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty} -x+1=+\infty \\ \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty\end{cases}$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - \frac{x^2}{e^x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^1 = +\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \frac{1}{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}} = 0$

ب) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = 1+(x-1)\,e^{-x+1}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = 1-2e^{-x+1}+(x^2+1)e^{-x+1} = 1+(x^2-2x+1)e^{-x+1} = 1+(x-1)^2\,e^{-x+1}$$

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

☆ جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

من أجل كل x لدينا:
$e^{-x+1}>0$ و $(x-1)^2\geq 0$ وبالتالي $f'(x)>0$ أي أن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

❷ أ) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته $y=x$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{e^x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^1 = 0$

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ):

لدينا: $f(x)-x = -(x^2+1)e^{-x+1} < 0$ لأن $e^{-x+1}>0$ و $(x^2+1)\geq 0$ وبالتالي (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على $\mathbb{R}$

❸ إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.8<\alpha<1.9$:

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وبما أن $f(1.8)\approx -0.11$ و $f(1.9)\approx 0.03$ أي أن $f(1.8)\times f(1.9)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.8<\alpha<1.9$

❹ أ) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$(T): y = f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه: $(T); y = x-2$

ب) تبيين أن (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثياها:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

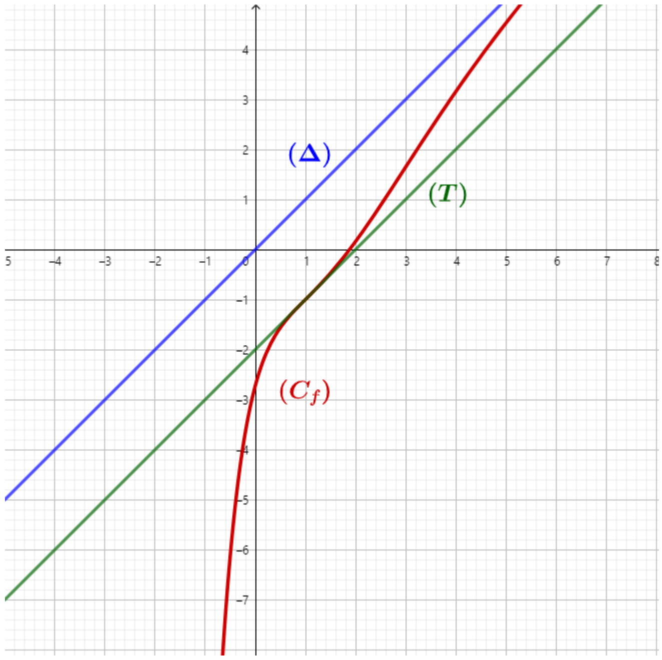
من أجل كل عدد حقيقي x الدالة f تقبل الإشتقاق ولدينا:
$f''(x) = 2(x-1)e^{-x+1} - (x-1)^2e^{-x+1} = (x-1)e^{-x+1}(-x+3)$

حسب جدول الإشارة المقابل نقطتي الإنعطاف هما: $(1;-1)$ ، $(3;3-10e^{-2})$

❺ حساب $f(3)$ ، $f(0)$:

$f(3)=3-8e^{-2}$ ، $f(0)=e$

التمثيل البياني:



❻ المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$

الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلات $y = x + m$.

قيم m	عدد وإشارة الحلول
$]-\infty; -e[$	حل سالب تماما
$-e$	حل معدوم
$]-e; 0[$	حل موجب تماما
$[0; +\infty[$	لا توجد حلول

تمرين 03

❶ تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يقبل المنحنى (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3 والعدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$:

✫ $f(0) = -3$ وهذا معناه $c = -3$

✫ لدينا $f'(x) = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$ و $f'(0) = 3$ ومنه $b - c = 3$ أي $b = 0$.

✫ $f(\sqrt{3}) = 0$ معناه: $f(\sqrt{3}) = (3a - 3)e^{-\sqrt{3}} = 0$ ومنه $a = 1$

❷ نضع $a = 1$ ، $b = 0$ ، $c = -3$

أ) حساب كلّا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها:

المشتقة $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1

ومنه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -1]$ و $[3; +\infty[$ ومتزايدة على المجال $[-1; 3]$

جدول تغيراتها

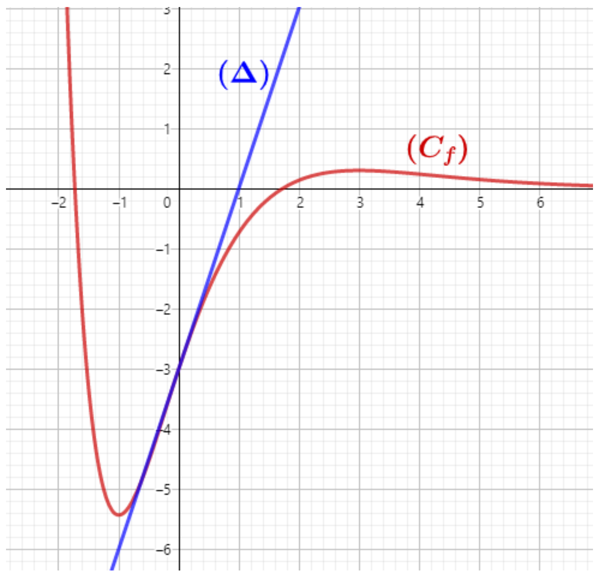
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	$\frac{6}{e^3}$	$\searrow$	0

ج) كتابة معادلة للمماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$(T) : y = 3x - 3$

✫ تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل:

$f(x) = 0$ معناه $x^2 - 3 = 0$ أي أن: $x = \sqrt{3}$ أو $x = -\sqrt{3}$ أي نقاط التقاطع هما: $A(\sqrt{3}; 0)$ ، $B(-\sqrt{3}; 0)$



❸ رسم (T) و (C_f).

❹ المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$:

$x^2 - 3 + me^x = 0$ المعادلة تكافؤ $me^x = -(x^2 - 3)$ أي أن $-m = -(x^2 - 3)e^{-x}$ يكافؤ $-m = f(x)$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$.

✫ **المناقشة البيانية:**

✽ لما $-m < -2e$ أي أن $m > 2e$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان ومنه ليس للمعادلة حلول.

✽ لما $-m = -2e$ أي أن $m = 2e$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب

✽ لما $-3 > -m > -2e$ أي أن $2e > m > 3$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبتين ومنه للمعادلة حلين سالبين

✽ لما $-m = -3$ أي أن $m = 3$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة والأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين أحدهما معدوم والآخر سالب

✽ لما $0 \geq -m > -3$ أي أن $3 > m \geq 0$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفتين في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفين في الإشارة.

✻ لما $\frac{6}{e^3} > -m > 0$ أي أن $0 > m > -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في ثلاث نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتين ونقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة ثلاثة حلول حلين موجبين وحل سالب.

✻ لما $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفتين في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفين في الإشارة

✻ لما $-m > \frac{6}{e^3}$ أي أن $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

تمرين 04

❶ تعيين قيمة العدد الحقيقي a بحيث تكون الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = a \times e^{-x}$ حل للمعادلة (E):

g حل للمعادلة (E) معناه $g'(x) - 3g(x) = 2e^{-x}$ أي $-ae^{-x} + 3ae^{-x} = 2e^{-x}$ ومنه $2ae^{-x} = 2e^{-x}$ بالمطابقة نجد: $a = 1$

❷ ✰ حل المعادلة (E'):

$y' + 3y = 0$ معناه $y' = -3y$ مجموعة حلول المعادلة هي مجموعة الدوال من الشكل $y = Ce^{-3x}$ حيث $C \in \mathbb{R}$

❸ إثبات أن الدالة f حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $f - g$ حلا للمعادلة (E'):

الدالة f حل للمعادلة (E) معناه $f'(x) + 3f(x) = 2e^{-x}$ ومنه $f'(x) + 3f(x) = g'(x) + 3g(x)$ لأن g حل للمعادلة (E) وبالتالي: $f'(x) + 3f(x) - g'(x) - 3g(x) = 0$ أي: $(f-g)'(x) + 3(f-g)'(x) = 0$ ومنه الدالة $f - g$ حل للمعادلة (E')

✰ الدالة $f - g$ حل للمعادلة (E') معناه $(f-g)'(x) + 3(f-g)'(x) = 0$ ومنه $f'(x) + 3f(x) = g'(x) + 3g(x)$ وبالتالي $f'(x) + 3f(x) = 2e^{-x}$ لأن g حل للمعادلة (E) إذن f حل للمعادلة (E)

❹ استنتاج حلول المعادلة (E):

لدينا $f - g$ حل للمعادلة (E') معناه $f(x) - g(x) = Ce^{-3x}$ ومنه $f(x) = Ce^{-3x} + g(x) = Ce^{-3x} + e^{-x}$ مع $C \in \mathbb{R}$

❺ تعيين حلا خاصا f للمعادلة (E) بحيث يكون معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f في النقطة ذات الفاصلة 0 يساوي -4:

✰ (C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا معامل توجيهه يساوي -4 معناه: $f'(0) = -4$

✰ لدينا: $f'(x) = -3Ce^{-3x} - e^{-x}$

$f'(0) = -4$ معناه: $-3Ce^0 - e^0 = -4$ أي $-3C = -3$ ومنه $C = 1$ أي: $f(x) = e^{-3x} + e^{-x}$

تمرين 05

✯ لكل سؤال مما يلي إجابة واحدة حددها مع التعليل.

إذا كان $\lim\limits_{x\to1} v\left(x\right)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} v\left(e^{-3x}+1\right)$ تساوي:	0	(نهاية مركب دالتين) لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}=1$ و $\lim\limits_{x\to1} g\left(x\right)=0$
إذا كانت h دالة تحقق من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $e^{-x}\leq h\left(x\right)\leq 2e^{-x}$ والدالة $f\left(x\right)=xe^{x}h\left(x\right)$ معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: فإن:	$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty$	(النهاية بالحصر) لأن $e^{-x}\leq h(x)\leq 2e^{-x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$
إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند 2 فإن $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2)-f(2-2h)}{2h}$ تساوي:	$-f'\left(2\right)$	$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2)-f(2+2h)}{2h}=$ $-\lim\limits_{k\to0}\frac{f(2+k)-f(2)}{k}=-f'(2)$
حل المعادلة التفاضلية $y'+2y-2=0$ والذي يحقق $f\left(0\right)=0$ هو f حيث:	$f\left(x\right)=-e^{-2x}+1$	لأن $f(0)$ و $f'(x)+2f(x)-2=0$
مجموعة حلول المتراجحة $e^{x}-e^{-x}$ هي:	$]-\infty;0]$	لأن $e^{x}-e^{-x}\leq 0$ تكافئ أن $e^{2x}-1\leq 0$ تكافئ $x\leq 0$

تمرين 06

✯ لكل سؤال مما يلي إجابة واحدة حددها مع التعليل.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{e^{x}}\right)$ تساوي:	0	نهاية مركب دالتين لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{x}}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=0$
إذا كانت h دالة تحقق من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $x\leq f\left(x\right)\leq x^{2}$ و g الدالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g\left(x\right)=\frac{f(x)}{e^{x}}$ فإن:	$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=0$	النهاية بالحصر لأن $x\leq f(x)\leq x^{2}$ ومنه $\frac{x}{e^{x}}\leq\frac{f(x)}{e^{x}}\leq\frac{x^{2}}{e^{x}}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}\leq\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^{x}}\leq\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{2}}{e^{x}}$ أي $0\leq\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)\leq 0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)=0$
إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند 1 فإن $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1)-f(1+2h)}{2h}$ تساوي:	$-f'\left(1\right)$	$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1)-f(1+2h)}{2h}=-\lim\limits_{k\to0}\frac{f(1+k)-f(1)}{k}=-f'(1)$
حل المعادلة التفاضلية $y'=2y-2$ والذي يحقق $u\left(0\right)=0$ هو u حيث:	$u\left(x\right)=-e^{2x}+1$	لأن حلول المعادلة التفاضلية $y'=2y-2$ هي الدوال $f_{C}(x)=Ce^{2x}+1$ و $f(0)=0$ معناه $C=-1$.
مجموعة حلول المتراجحة $e^{-3x+2}\leq 1$ هي:	$[\frac{2}{3};+\infty[$	لأن $e^{-3x+2}\leq 1$ تكافئ $e^{-3x+2}\leq e^{0}$ ومنه $-3x+2\leq 0$ إذن $x\geq\frac{2}{3}$

I) ❶ دراسة تغيرات الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها.

☆ النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1+e^{2x}) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1+e^{2x}) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$

☆ الدالة المشتقة: g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x) = 2+2e^{2x} = 2(1+e^{2x})$

☆ اتجاه التغير: لدينا $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

❷ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.7;-0.6[$ $0.3 < \alpha < 0.5$:

☆ الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0.7;0.6[$ ولدينا $f(-0.7)\times f(-0.6) < 0$

لأن $f(-0.7) \approx -0.15$ و $f(-0.6) \approx 0.1$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.7;0.6[$.

❸ استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II) ❶ أ) حساب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(1-x+(1+x)e^{-2x}) = \lim_{x\to-\infty} e^{-2x}\left(\frac{1}{e^{-2x}} - \frac{x}{e^{-2x}} + (1+x)\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(1-x+(1+x)e^{-2x}) = \lim_{x\to+\infty}\left(1-x+e^{-2x} - \frac{1}{2}(-2xe^{-2x})\right) = -\infty$$

ب) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته:

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+1)] = \lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-2x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} xe^{-2x}+e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\left(-2xe^{-2x}\right)+e^{-2x}\right] = 0$$

إذن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $+\infty$ معادلته $y = -x+1$

ج) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ):

لدينا: $f(x) - y_\Delta$ نضع $(x+1)e^{-2x} = 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $x+1$ لأن $e^{-2x} > 0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-y_{\Delta}$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

نستنتج الوضع النسبي:

☆ من أجل $x<-1$: (C_f) تحت (Δ).

☆ من أجل $x>-1$: (C_f) فوق (Δ).

☆ من أجل $x=-1$: (C_f) يقطع (Δ).

❷ أ) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=-g(x)e^{-2x}$:

$f'(x)=-1+e^{-2x}-2e^{-2x}(x+1)$ أي $f'(x)=-1-e^{-2x}-2xe^{-2x}$ وعليه $f'(x)=-(1+e^{-2x}+2xe^{-2x})$ ومنه $f'(x)=-e^{-2x}(e^{2x}+1+2x)$ نجد $f'(x)=-g(x)e^{-2x}$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

جـ) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث: $-1.2<x_1<-1.1$ و $1.1<x_2<1.2$:

☆ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ ومنه مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1.2;-1.1[$ ولدينا: $f(-1.2)\times f(-1.1)<0$ لأن $f(-1.2)\approx 1.197$ و $f(-1.1)\approx -4.64\times 10^{-3}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_1 في المجال $]-1.2;-1.1[$.

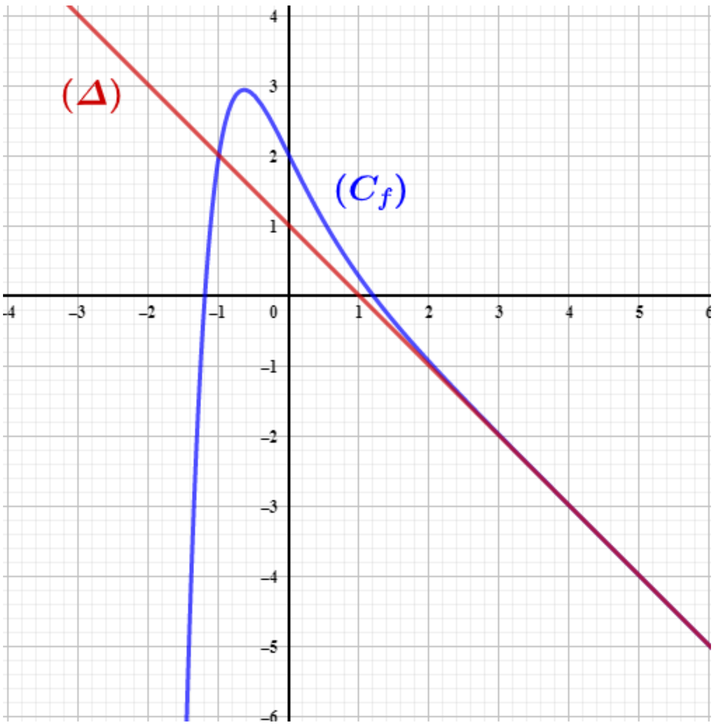
☆ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$ ومنه مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]1.1;1.2[$ ولدينا: $f(1.1)\times f(1.2)<0$ لأن $f(1.2)\approx 0.13$ و $f(1.2)\approx -4.2\times 10^{-4}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_2 في المجال $]1.1;1.2[$

❸ تعيين دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، ثم تفسير النتيجة بيانيا:

حسب تعريف العدد المشتق: $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$ ونعلم مما سبق أن $f'(\alpha)=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=0$.

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل معادلته $y=f(\alpha)$ عند النقطة $(\alpha;f(\alpha))$

❹ إنشاء (C_f) و (Δ) (يعطى $f(\alpha)=2.9$).



تمرين 08

I) ❶ دراسة تغيرات الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها:

☆ **النهايات:** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x + e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x}) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - x + e^x = -\infty$

☆ **اتجاه التغير:** الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و $g'(x) = -1 + e^x$ ومنه $g'(x) = 0$ أي $-1 + e^x = 0$ وبالتالي $x = 0$ ولدينا $g'(x) > 0$ يكافئ $x > 0$ ،
ولدينا $g'(x) < 0$ يكافئ $x < 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(0) = 2$	$\nearrow$	$+\infty$

❷ استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$:

لدينا من أجدول التغيرات من أجل كل عدد حقيقي $g(x) > 0$

II) ❶ حساب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 + xe^{-x} = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 + xe^{-x} = +\infty$

❷ أ) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x + 1$:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x - 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$

إذن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x + 1$.

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ):

لدينا: $f(x) - x - 1 = xe^{-x} = 0$ ومنه: $x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
xe^{-x}	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)

❸ أ) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = -g(x)e^{-x}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $f'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(e^{x} + 1 - x) =$
$e^{-x}g(x)$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا e^{-x} ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وبالتالي: $f'(x) > 0$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ج) تبيان أن منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-0.5 < \alpha < -0.4$:

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0.5; -0.4[$ ولدينا $f(-0.5) \times f(-0.4) < 0$ لأن $f(-0.5) = -0.32$ و $f(-0.4) = 0.003$ ومن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة، فاصلتها α حيث: $-0.5 < \alpha < -0.4$

❹ ✫ كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

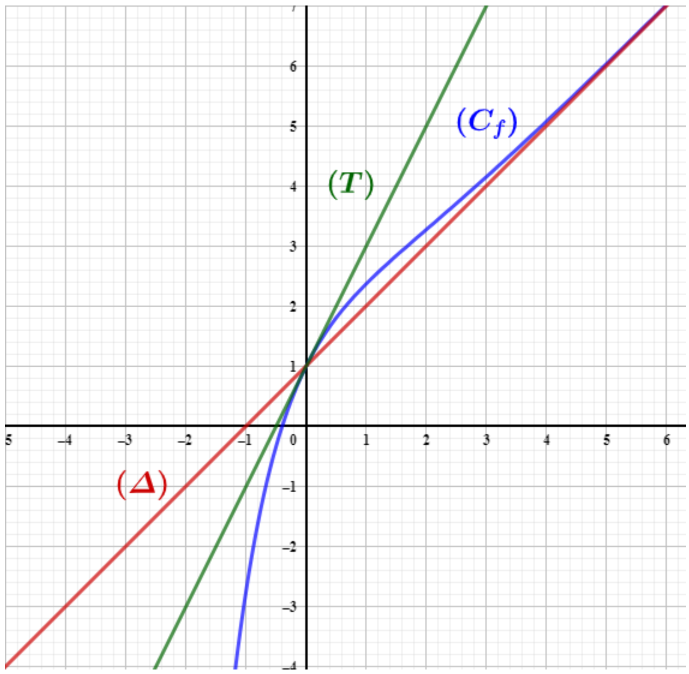
$(T): y = f'(0)x + f(0)$ ومنه $(T): y = 2x + 1$ ✫ دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (T):

$f(x) - 2x - 1 = xe^{-x} - x = x(e^{-x} - 1)$

$x(e^{-x} - 1) = 0$ يكافئ $x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$e^{-x} - 1$	$+$	0	$-$
$x(e^{-x} - 1)$	$-$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)

❺ إنشاء (T) ، (Δ) و (C_f).



❻ تعيين حسب قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = mx + 1$ حلين متمايزين.

الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حزمة المستقيمات ذوات المعادلات $y = mx + 1$ التي تشمل نقطة ثابتة $(0; 1)$

قيم m	عدد الحلول
$]-\infty; 1]$	حل وحيد
$]1; 2[$	حلان
$m = 2$	حل وحيد
$]2; +\infty[$	حلان

تمرين 09

أ) ❶ دراسة تغيرات الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها.

✯ **النهايات:**

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)e^x - e = +\infty \text{ ، } \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+1)e^x - e = -e$$

✯ **اتجاه التغير:** الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $g'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

$g'(x) = 0$ يكافئ $(x+2)e^x = 0$ يكافئ $x = -2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-2; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; -2]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-2		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	$-e$	↘	$g(-2)$	↗	0	↗	$+\infty$

❷ تبيان أن المعادلة $g\,(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $0.5 < \alpha < 0.6$:

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-2;+\infty[$

ولدينا $0 \in [g(-2);+\infty[$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ولدينا:

$g(0.5) \times g(0.6) < 0$ وبالتالي $0.5 < \alpha < 0.6$

❸ استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g\,(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) ❶ حساب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f\,(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f\,(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f\,(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x - ex + e - 2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\,(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^x - ex + e - 2 = +\infty$$

❷ دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $f'(x) = e^x + xe^x - e = e^x(1+x) - e = g(x)$

استنتاج اتجاه التغير: إشارة $f(x)$ من إشارة $g(x)$ وبالتالي:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

❸ أ) تبيان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -ex + e - 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f):

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} [f\,(x) - (-ex + e - 2)] =$

ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -ex + e - 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ):

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ $f(x) - (-ex + e - 2) = xe^x = 0$ معناه $x = 0$ و $e^x > 0$

x	$-\infty$			$+\infty$
xe^x	$-$		0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)

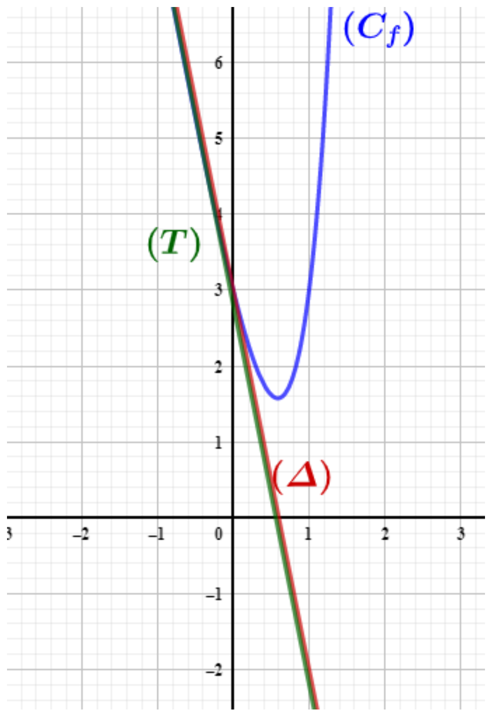
ج) تبيان أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ)، يطلب تعيين معادلته:

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f'(x) = -e$ أي $g(x) = -e$ ومنه $(x+1)e^x - e = -e$ أي $(x+1)e^x = 0$

وعليه بالتالي يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x = -1$ ومنه:

$(T) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ إذن: $(T) : y = -ex + e - 2 - e^{-1}$

❹ إنشاء (T) ، (Δ) و (C_f) يعطى $f(\alpha) \approx 0.2$.



❺ المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $(m + 2 - e)\, e^{-x} = x$:

لدينا: $(m+2-e)e^{-x} = x$ تكافئ $(m+2-e) = xe^x$

ومنه $m = xe^x + e - 2$ وعليه:

$f(x) = -ex + m$ إذن هي مناقشة مائلة، الحلول هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = -ex + m$ ومنه:

* $m \in \left]-\infty; e - 2 - e^{-1}\right[$ لا توجد حلول.
* $m = e - 2 - e^{-1}$ يوجد حل وحيد سالب.
* $m \in \left]e - 2 - e^{-1}; e - 2\right[$ يوجد حلان سالبان.
* $m = e - 2$ يوجد حل وحيد معدوم
* $m > e - 2$ يوجد حل وحيد موجب

III) ❶ نعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x، $h(x) = f(x+a) + b$

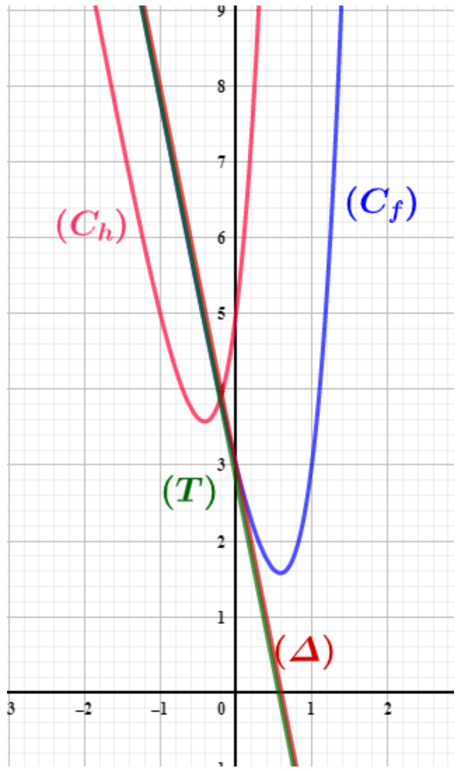
لدينا: $h(x) = e\left[(x+1)e^x - x\right] = (x+1)e^{x+1} - ex$

ومنه $f(x+a) + b = (x+a)\, e^{x+a} - e(x+a) + e - 2 + b = (x+a)\, e^{x+a} - ex - ea + e - 2 + b$

بالمطابقة نجد: $a = 1$ و $-ea + e - 2 + b = 0$ ومنه $b = 2$ وبالتالي: $h(x) = f(x+1) + 2$

❷ شرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم رسمه في نفس المعلم السابق:

(C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بإنسحاب شعاعه $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$



تمرين 10

I) الدالة k معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $k(x) = (-x+1)e^x - 1$

❶ شكل جدول إشارة الدالة k:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k(x)$		$-$	0	$-$	

❷ استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x $k(x) \leq 0$.

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $k(x) \in \left]-\infty; 0\right]$ ومنه $k(x) \leq 0$

II) ❶ حساب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x+2)(e^x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x+2)(e^x+1) = -\infty$$

❷ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = k(x)$:

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $f'(x) = -(e^x+1) + (-x+2)e^x = -e^x - 1 + (-x+$
$2)e^x = (-1-x+2)e^x - 1$ وبالتالي $f'(x) = k(x)$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f: بما أن $f'(x) = k(x)$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $k(x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	

الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	4	$-\infty$

❸ أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)-(-x+2)=(-x+2)\,e^{x}$:

$f(x)-(-x+2)=(-x+2)(e^{x}+1)-(-x+2)=(-x+2)(e^{x}+1-1)=(-x+2)e^{x}=(-x+2)\,e^{x}$

ب) تبيان أن المستقيم (Δ) ذي $y=-x+2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ (يعطى $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$):

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}(-xe^{x}+2e^{x})=0$

ومنه المستقيم (Δ) ذي $y=-x+2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ج) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x+2)$

لدينا $f(x)-(-x+2)=(-x+2)e^{x}=0$ ومنه $-x+2=0$ أي $x=2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x+2$	$+$	0	$-$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)

❹ أ) إثبات أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) معامل توجيهه -1:

معناه $f'(x)=-1$ أي $(-x+1)e^{x}-1=-1$ ومنه $(-x+1)e^{x})=0$ وبالتالي: $x=1$

إذن (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه يساوي -1 في النقطة $A(1;f(1))$

ب) كتابة معادلة للمماسين (T) و (T') للمنحنى (C_f) عند النقطتين ذواتي الفاصلتين 0 و 1 على الترتيب:

✯ لدينا $(T):y=f'(0)x+f(0)$ ومنه $(T):y=4$.

✯ لدينا $(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $(T):y=-x+e+2$

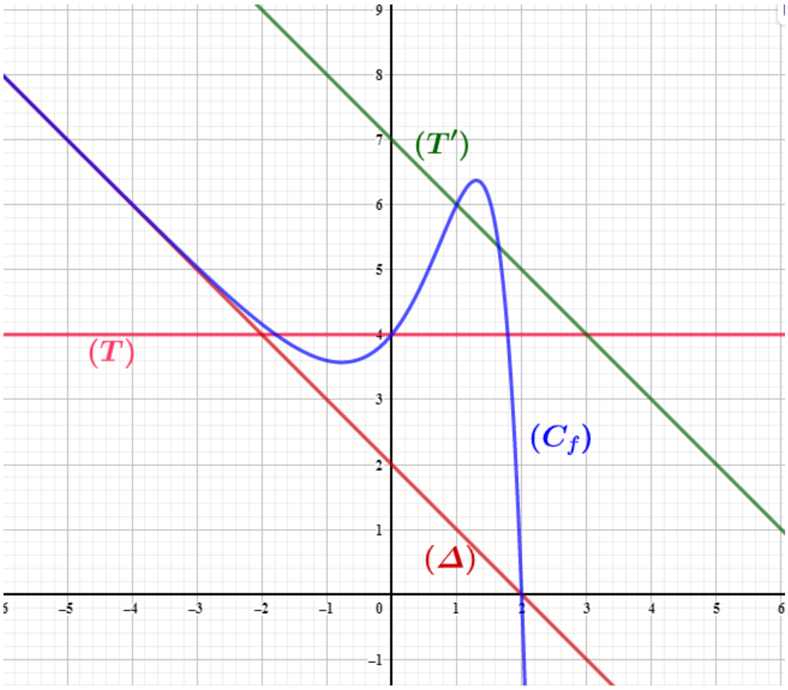
❻ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتاج نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل:

لدينا: $f(x)=0$ معناه $(-x+2)(e^{x}+1)=0$ إما $x=2$ لأن $e^{x}+1>0$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي $S=\{2\}$

✯ إحداثيي نقط تقاطع (C_f) مع xx' هي $B(2;0)$

❻ رسم (Δ) ، (T) ، (T') و (C_f)



❺ المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المعادلة $f(x) = -x + m$:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = -x + m$

- إذا كان $m \in]-\infty; 2]$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا.
- إذا كان $m \in]2; 4[$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب تماما والآخر موجب تماما.
- إذا كان $m = 4$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر موجب تماما.
- إذا كان $m \in]4; 2+e[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين.
- إذا كان $m = e + 2$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا $x = 1$.
- إذا كان $m \in]e+2; +\infty[$ فإن المعادلة ليس لها حل

تمرين 11

I) ❶ تعيين كلا من a و b

☆ (C_g) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = 1$ بجوار $(+\infty)$ معناه: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ أي أن $a = 1$.

☆ (C_g) يقبل مماسا عند المبدأ معامل توجيهه 3 معناه $g'(0) = 3$ أي أن $g'(0) = 2e^0 + be^0 = 3$ إذن $b = 1$

❷ أ) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $-2.5 < \alpha < -2$:

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-2.5; -2[$ ولدينا: $g(-2.5) \times g(-2) < 0$ ومن حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-2.5; -2[$

ولدينا من البيان $g(0) = 0$

ب) استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0 $-$	0 $+$	

II) ❶ حساب النهايات:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

❷ أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = g(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: ... $= f'(x)$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[\alpha;+:\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;0]$

✫ جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

❸ تبيان أن منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في ثلاث نقاط يطلب تعيينها:

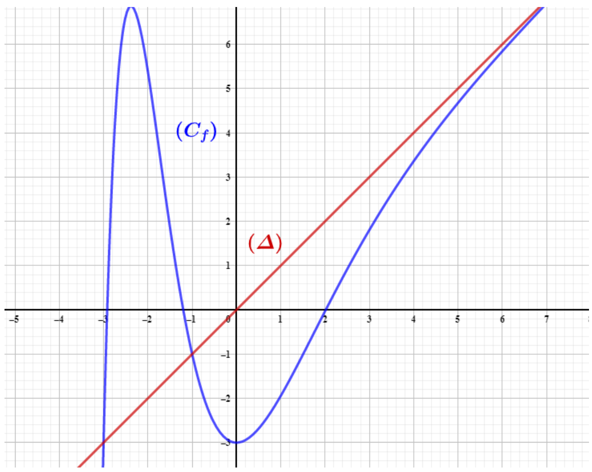
❹ أ) تبيان أن المستقيم (Δ) ذي $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y] = 0$

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ).

x	$-\infty$		-5		-3		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	

❻ رسم (Δ) و (C_f):



(I

❶ دراسة الوضع النسبي لـ (C_g) و (C_h).

✯ (C_g) فوق (C_h) على المجال $]\alpha;\beta[$ وتحت (C_h) على كل من المجالين $]-\infty;\beta[$ و $]\beta;+\infty[$

❷ استنتاج إشارة $g\left(x\right)-h\left(x\right)$:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)-h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(II

❶ احسب النهايات $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=1$

تفسير النتائج بيانيا: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y=1$

❷ إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'\left(x\right)=\frac{g(x)-h(x)}{(e^x-x)^2}$

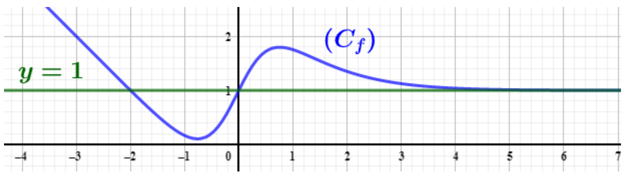
❸ استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;\beta]$ ومتناقصة تماما على كل من المجالين: $]-\infty;\alpha]$ $[\beta;+\infty[$

✯ جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(\beta)$	↘	1

❹ إنشاء (C_f) يعطى $f\left(\alpha\right)\approx 0.23$ ، $f\left(\beta\right)\approx 2.81$.



(I $g\left(x\right)=\left(2x+1\right)e^x-1$

❶ دراسة تغيرات الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها:

✯ **النهايات:**

$$\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}(2x+1)e^x-1=-1$$
$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}(2x+1)e^x-1=+\infty$$

✯ **اتجاه التغير:**

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $g'(x)=2e^x+(2x+1)e^x=(2x+3)e^x$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x+3$ أي $2x+3=0$ معناه $x=\frac{-3}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ ومتناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ ✫ **جدول التغيرات:**

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$g(\frac{-3}{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

❷ حساب $g\left(0\right)=0$ واستنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g\left(x\right)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $g(0)=0$ وبالتالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

II)

❶ حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x(e^x-1)^2=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^x-1)^2=+\infty$

❷ أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'\left(x\right)=\left(e^x-1\right)g\left(x\right)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$f'(x)=(e^x-1)^2+2xe^x(e^x-1)=(e^x-1)(e^x-1+2xe^x)$ وبالتالي: $f'(x)=(e^x-1)g(x)$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f:

✫ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ و (e^x-1):

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ج) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) المار بمبدأ المعلم:

لدينا: $(T): y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ علما أن المماس يمر من المبدأ معناه: $f'(x_0)(x-x_0)+$ $f(x_0)=0$ ومنه $-x_0(e^{x_0}-1)g(x_0)+x_0(e^{x_0}-1)^2=0$ وبالتالي: $-2x_0^2(e^{x_0}-1)e^{x_0}=0$

ومنه: $x_0=0$ إذن معادلة المماس هي: $(T): y=0$

❸ أ) تبيان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[x(e^x-1)^2-x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[xe^{2x}+x-2xe^x-x\right] =$$

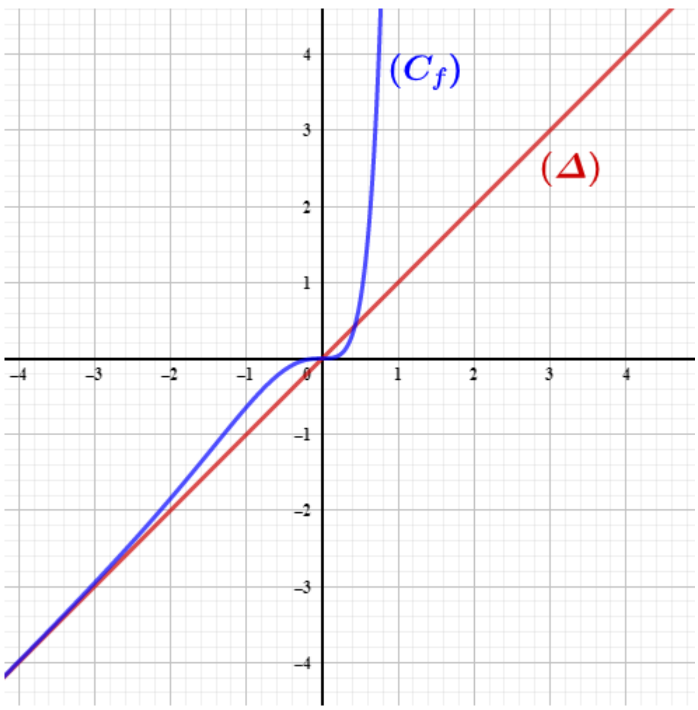
إذن: $\lim_{x\to-\infty}\left[xe^{2x}-2xe^x\right]=0$

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ):

$f(x)-x=xe^x(e^x-2)=0$ تكافئ $xe^x=0$ أو $e^x=2$ وبالتالي: $x=0$ أو $x=ln2$.

x	$-\infty$		0		$ln2$		$+\infty$
xe^x		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-2		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

❹ إنشاء (T) ، (Δ) و (C_f).



❺ المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=mx$.

حلول المعادلة $f(x)=mx$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m=mx$

إذن:

- لما $m\in]-\infty;0]$ المعادلة تقبل حلا وحيدا
- لما $m\in]0;1[$ المعادلة تقبل ثلاثة حلول
- لما $m\in]1;+\infty[$ المعادلة تقبل حلان

III) ❶ تحديد اتجاه تغير الدالة h على مجموعة تعريفها دون حساب عبارة $h(x)$:

المشتقة: k قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها ودالتها المشتقة:
$k'(x) = -\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})$ إشارة $k'(x)$
لدينا: $\frac{-1}{x^2} < 0$ ولدينا $f'(x) = 0$ لما $x = 0$ و $f'(x) > 0$ لما $x > 0$ أو $x < 0$
وعليه $f'(\frac{1}{x}) = 0$ لما $\frac{1}{x} = 0$ وهذا مستحيل و $f'(\frac{1}{x}) > 0$ لما $\frac{1}{x} > 0$ أو $\frac{1}{x} < 0$ أي لما $x > 0$ أو $x < 0$
إذن الدالة k متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$

تمرين 14

I) ❶ كتابة معادلة للمماس (T):

معادلة المماس (T) من الشكل $y = a'x + b'$ ونلاحظ أن (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ومنه $b' = 1$ ويشمل أيضا النقطة $B(-1;3)$ ومنه $-a' + 1 = 3$ أي $a' = -2$ إذن $y = -2x + 1$.

✯ لدينا: $f(x) = xe^{-x^2} + ax + b$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = 0$ وبالتالي المستقيم ذي المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) وبالمطابقة مع المستقيم (T) نجد $a = -2$ و $b = 1$

❷ إثبات أن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة لكل منهما:

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} - 2 = e^{-x^2}(1 - 2x^2) - 2$

إذن $f'(x) = -2$ تكافئ $e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} - 2 = e^{-x^2}(1-2x^2) - 2 = -2$ ومنه $e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} -$ $0 = (1-2x^2)e^{-x^2} = 2$ أي $1 - 2x^2 = 0$ لأن $e^{-x^2} \neq$ وبالتالي $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ومنه يوجد مماسين موازيان لـ (T) أحدهما عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{\sqrt{2}}$ والآخر عند النقطة ذات الفاصلة $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

✯ كتابة معادلة للماسين (T') و (T''):

$$\begin{cases} (T') : y = -2(x - \frac{1}{\sqrt{2}}) + f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -2x + \frac{e^{\frac{-1}{2}} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ (T'') : y = -2(x + \frac{1}{\sqrt{2}}) + f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -2x - \frac{e^{\frac{-1}{2}} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

❸ المناقشة بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $f(x) = -2x + m$:

$$\left]-\frac{e^{\frac{-1}{2}} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}; 1\right[$$

II) ❶ حساب نهايات الدالة h عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 1$$
$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} h(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = -\infty$$
$$\lim_{x\overset{<}{\to}0} h(x) = \lim_{x\overset{<}{\to}0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = +\infty$$

❷ حساب $h'(x)$ ثم استنتاج اتجاه تغير الدالة h على مجموعة تعريفها.

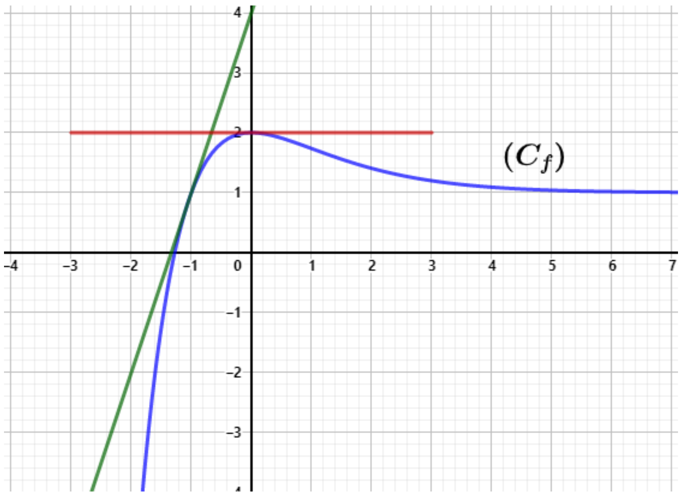
الدالة h قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها و $h'(x) = \frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})$

من خلال التمثيل البياني للدالة f نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$: $f'(\frac{1}{x}) < 0$ ومنه $\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x}) > 0$ أي $h'(x) > 0$ وبالتالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	$\|\|$	$+$
$h(x)$	$1 \nearrow +\infty$	$\|\|$	$-\infty \nearrow +\infty$

تمرين 15

ا) ❶ بقراءة بيانية:



أ) تعيين كلا من $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم فسر هذه الأخيرة بيانيا:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1$.

ب) تعيين كلا من $f(0)$ ، $f(-1)$ ، $f'(0)$ ، $f'(-1)$:

$f(0) = 2$ ، $f(-1) = 1$

✫ $f'(0)$ معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها 0 والموازي لمحور الفواصل وعليه $f'(0) = 0$

✫ $f'(-1)$ معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها -1 وبما أن $(0;4)$ و $(-2;2)$ هما إحداثيي نقطتين منهفإن: $f'(-1) = \frac{4-(-2)}{0-(-2)} = 3$

ج) اعتمادا على ما سبق إيجاد قيمة كلا من a و b:

لدينا: $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} a(0) + be^{0} + 1 = 2 \\ a(-1) + be^{1} + 1 = 1 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} b + 1 = 2 \\ (-a+b)e + 1 = 1 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} b = 1 \\ (-a+1)e = 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

✫ استنتاج عبارة $f(x)$:

$f(x) = (x+1)e^{-x} + 1$

❷ أ) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1.4 < \alpha < -1.2$:

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]-1.4; -1.2[$ ولدينا $f(-1.4) \times f(-1.2) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α:

حيث: $-1.4 < \alpha < -1.2$

ب) استنتاج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

❸ أ) حساب كلّا من: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{h(x)-2}{x}$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{h(x)-2}{x}$ ثم تفسير النتيجة بيانيا، (نقبل أن $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{x} = -1$)

لدينا:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{h(x)-2}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{(|x|+1)e^{-x}+1-2}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{(x+1)e^{-x}-1}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{xe^{-x}+e^{-x}-1}{x}$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left[\frac{xe^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}-1}{x}\right] = 0$$
$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{h(x)-2}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{(|x|+1)e^{-x}+1-2}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{(-x+1)e^{-x}-1}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-xe^{-x}+e^{-x}-1}{x}$$
$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \left[\frac{-xe^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}-1}{x}\right] = -2$$

التفسير البياني: الدالة h غير قابلة للاشتقاق في النقطة التي فاصلتها 0 ومنحناها يقبل نصف مماس على يمين الصفر معامل توجيهه 0 ونصف مماس على يسار الصفر معامل توجيهه -2

II) ❶ أ) حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[x - \frac{x+2}{e^x}\right] = \lim_{x\to-\infty} x\left[1 - \frac{1+\frac{2}{x}}{e^x}\right] = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - \frac{x+2}{e^x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right] = +\infty$$

ب) تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_g) بجوار $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} [g(x) - x] = \lim_{x\to+\infty}\left[x - \frac{x+2}{e^x} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right] = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_g) بجوار $+\infty$.

❷ أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $g'(x) = f(x)$:

☆ الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x) = 1 - (e^{-x} - (x+2)e^{-x}) = 1 - ((1-x-2)e^{-x}) = 1 - (-x-1)e^{-x}$ ومنه: $g'(x) = 1 + (x+1)e^{-x} = f(x)$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

إشارة $g'(x)$ من إشارة $f(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

☆ جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

❸ كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_g) في النقطة التي فاصلتها -1:

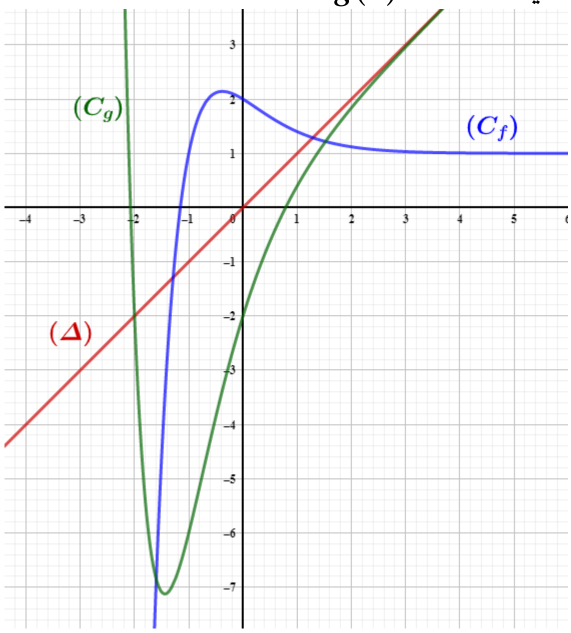
لدينا $(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ ومنه: $(T): y = x - e$

❹ تبيان أنّ $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha+1}$ ثم استنتاج إشارة $g(\alpha)$:

لدينا: $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha+1}$ ومن جهة أخرى لدينا: $f(\alpha) = 0$ تكافؤ $(\alpha+1)e^{-\alpha} + 1 = 0$ ومنه: $e^{-\alpha} = \frac{-1}{\alpha+1}$ وبالتعويض بقيمة $e^{-\alpha}$ في عبارة $g(\alpha)$ نجد: $g(\alpha) = \alpha - (\alpha+2)(\frac{-1}{\alpha+1}) = \alpha + \frac{\alpha+2}{\alpha+1} =$
$\alpha + \frac{\alpha+1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha+1}$

❹ أ) حساب $g(0)$ ثم إنشاء كلا من (Δ) ، (C_f) والمنحنى (C_g).

لدينا: $g(0) = -2$



ب) المناقسة بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $g(x) = x + m$، حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + m$

- من أجل $m \in]-\infty; -e[$ المعادلة ليس لها حلول.
- من أجل $m = -e$ المعادلة لها حل مضاعف سالب تماما.
- من أجل $m \in]-e; -2[$ المعادلة لها حلان سالبان تماما.
- من أجل $m = -2$ المعادلة لها حلان أحدهما سالب والآخر معدوم.
- من أجل $m \in]-2; 0[$ المعادلة لها حلان مختلفان في الإشارة.
- من أجل $m \in [0; +\infty[$ المعادلة لها حل واحد سالب.

❶ حساب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم التعبير عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ حيث g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f'(x) = 2xe^{x-1} + x^2e^{x-1} - x = x((x+2)e^{x-1} - 1) = xg(x)$

❷ دراسة تغيرات الدالة g

أ) حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+2)e^{x-1} + 1 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+2)e^{x-1} + 1 = +\infty.$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $g'(x) = e^{x-1} + (x+2)e^{x-1} = e^{x-1}(x+3)$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $x+3$ ومنه: $x+3=0$ أي $x=-3$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-3;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;-3]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-4}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

ج) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ والتأكد أن: $0.20 < \alpha < 0.21$

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]-3;+\infty[$ ولدينا: $g(0.20) \times g(0.21) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.2 < \alpha < 0.21$

د) تعيين إشارة $g(x) = 0$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

❸ حسابات النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left[e^{x-1} - \frac{1}{2}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} \times \left[(x-1)e^{x-1} - \frac{x-1}{2}\right] = -\infty$$

❹ دراسة اتجاه تغير الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $xg(x)$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[0;\alpha]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

❺ إثبات أنّ: $f(\alpha)=\frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $e^{\alpha-1}(\alpha+2)-1=0$ أي: $e^{\alpha-1}=\frac{1}{\alpha+2}$

ولدينا من جهة أخرى: $f(\alpha)=\alpha^2e^{\alpha-1}-\frac{\alpha^2}{2}=\frac{\alpha^2}{\alpha+2}-\frac{\alpha^2}{2}=\frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$

❻ أ) حساب $h'(x)$ ثم تعيين اتجاه تغير الدالة h على المجال $[0;1]$:

الدالة h قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ ولدينا: $h'(x)=\frac{-6x^2(x+2)+2x^3}{(2(x+2))^2}=\frac{-x^3-6x^2}{2(x+2)^2}=\frac{-x^2(x+6)}{2(x+2)^2}$

وبما أنه من أجل كل $x\in[0;1]$: $-x^2<0$ و $x+6>0$ و $2(x+2)^2>0$ فإن $h'(x)<0$ أي أن h متناقصة تماما على المجال $[0;1]$

ب) استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا: $0.2<\alpha<0.21$ وبما أن h متناقصة تماما على المجال $[0;1]$ فإن: $h(0.21)<h(\alpha)<h(0.2)$

أي $-0.002<\frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}<-0.0018$ وبالتالي: $-0.002<f(\alpha)<-0.0018$

❼ تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات، وهذا يعني أن $f(x)=0$ ومنه: $x^2(e^{x-1}-\frac{1}{2})=0$ يكافئ $x^2=0$ أو $e^{x-1}-\frac{1}{2}=0$ يكافئ $x=0$ أو $x=1-ln(2)$ ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في النتقطتين $(0;0)$ و $(1-ln2;0)$.

I) ❶ تعيين قيميتي كلا من a و b

✮ (C_g) يقبل مماسيا في النقطة التي فاصلتها 1 موازيا لحامل محور الفواصل ويشمل $A\,(0;-1)$ معناه:

$$\begin{cases} g'(1)=0 \\ g(0)=-1 \end{cases}$$

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $g'(x)=(x+a+1)e^x$

$$\begin{cases} g'(1)=0 \\ g(0)=-1 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} (a+2)e=0 \\ a+b=-1 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

وعليه: $g(x)=(x-2)e^x+1$

❷ أ) حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\lim_{x\to+\infty} g\,(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-2)\,e^x+1=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g\,(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-2)\,e^x+1 \lim_{x\to-\infty} xe^x-2e^x+1=1$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $g'(x)=(x-1)e^x$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $x-1$

✮ $g'(x)=0$ تكافئ $x-1=0$ يكافئ $x=1$

✮ $g'(x)>0$ تكافئ $x-1>0$ يكافئ $x>1$

✮ $g'(x)>0$ تكافئ $x-1<0$ يكافئ $x<1$

✮ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

✮ الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$

❸ أ) تبيان أن المعادلة $g\,(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $-1.3<\alpha<-1.2$ و $1.8<\beta<1.9$:

✮ على المجال $[-1.3;-1]$:

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-1.3;-1]$ ولدينا: $g(-1.3)\times g(-1)\ <\ 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال: $[-1.3;-1]$.

✮ على المجال $[1.8;1.9]$:

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1.8;1.9]$ ولدينا: $g(1.8)\times g(1.9)\ <\ 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال: $[1.8;1.9]$.

ب) استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g\,(x)$

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) ❶ حساب النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{1-e^{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-\frac{e^{x}}{x}\right)} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{1-e^{x}} = -\infty$$

❷ حساب كلا من $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$ وتفسير النتائج بيانيا:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x-1}{1-e^{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x-1}{1-e^{x}} = -\infty$$

ومنه (C_f) يقبل محور التراتيب مستقيما مقاربا عموديا.

❸ أ) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(1-e^{x})^2}$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{(1-e^{x})-(x-1)(-e^{x})}{(1-e^{x})^2} = \frac{1+xe^{x}-2e^{x}}{(1-e^{x})^2} = \frac{1+(x-2)e^{x}}{(1-e^{x})^2} = \frac{g(x)}{(1-e^{x})^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f

لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{(1-e^{x})^2}$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين: $]-\infty;\alpha[$ و $]\beta;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجالين $]\alpha;0[$ و $]0;\beta[$

✰ جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

❸ أ) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $-\infty$ معادلته $y = x-1$:

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x-1}{1-e^{x}}-(x-1)\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{(x-1)-(x-xe^{x}-1+e^{x})}{1-e^{x}}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{xe^{x}-e^{x}}{1-e^{x}}\right] = 0$$

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ).

لدينا $f(x)-(x-1) = \frac{(x-1)e^{x}}{1-e^{x}}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$1-e^x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-(x-1)$		$-$	‖	$+$		$-$	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

❺ تبيان أن $f(\alpha)=\alpha-2$ و $f(\beta)=\beta-2$ ثم تعيين حصرا لكل من $f(\alpha)$ و $f(\beta)$:

$f(\alpha)=\frac{\alpha-1}{1-e^{\alpha}}$ و $g(\alpha)=0$ ومنه $\begin{cases} f(\alpha)=\frac{\alpha-1}{1-e^{\alpha}} \\ (\alpha-2)e^{\alpha}+1=0 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} f(\alpha)=\frac{\alpha-1}{1-e^{\alpha}} \\ e^{\alpha}=\frac{-1}{(\alpha-2)} \end{cases}$ وعليه:

$f(\alpha)=\frac{\alpha-1}{1-\frac{-1}{\alpha-2}}=\frac{\alpha-1}{\frac{\alpha-1}{\alpha-2}}$ وبالتالي: $f(\alpha)=\alpha-2$ وبنفس الطريقة نجد: $f(\beta)=\beta-2$

❻ حساب $f(1)$ وإنشاء (C_f) و (Δ)

لدينا: $f(1)=0$