الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة | المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح | شعبة : ع ت - ت ر - ر

عمل منزلي رقم : 03 (Bac 2025)

الرياضيات ليست إبرة تحقن في جسمك في بداية السنة لتصبح ممتازا فيها

الرياضيات = حبها + التركيز + المرافقة اليومية

تمرين

الجزء الأول

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$ ، (C_g) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس

1. أدرس تغيرات الدالة g
2. برهن أن (C_g) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثييها ثم برهن أن هذه النقطة هي مركز تناظر لـ (C_g)
3. أ/ برهن أنه إذا كان $\beta > \alpha$ فإن $g(\beta) > g(\alpha)$،حيث α و β عددان حقيقيان

   ب/ إستنتج مقارنة العددين $g(2022)$ و $g(2023)$ دون حساب قيمتها
4. إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم إستنتج وضعية (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل
5. أنشئ المنحنى (C_g)

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كمايلي: $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. عين العددين الحقيقين a و b حيث من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ فإن : $f(x) = ax + \frac{bx}{(x-1)^2}$
2. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف وفسر النتيجة هندسيا
3. أحسب $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ ثم فسر النتيجة هندسيا
4. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$
5. إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
6. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)
7. بين أنه يوجد مماس (T) للمنحني (C_f) يوازي (Δ) في نقطة وحيدة يطلب تعيينها ، ثم أكتب معادلة لـ (T)
8. عين إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل

لا تحرق كتابك من أجل ورقة خطأ، فقط اطويها بلطف، ثم انزعها بعنف

❾ عين إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$ إستنتج وضعية (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

❿ أنشئ (Δ) و(T)، ثم (C_f) في معلم جديد يختلف عن (C_g)

⓫ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلات التالية :

$$f(x)=mx \text{ ، } -\frac{x}{(x-1)^2}=m \text{ ، } f(x)=f(m) \text{ ، } f(x)=|m|-1$$

الجزء الثالث

لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ : $h(x)=f(|x|)$ ، (C_h) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ بين أن h دالة زوجية

❷ إشرح كيف يتم رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه

قد يمحو الله مِن حياتك
بعض الناس رحمة بك،
فلا تبحث عنهم.

الجزء الرابع

لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ : $k(x)=f(x^2)$

أدرس إتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها

مشاهـــدة ممتعة

الحل المفصل للإختبار رقم 03

الجزء الأول

❶ أدرس تغيرات الدالة g

❖ النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$$

❖ ثانيا : المشتقة

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

لدينا $\Delta = -12 < 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $a = 3 > 0$ ومنه $g'(x) > 0$ ، ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

❷ برهن أن (C_g) يقبل نقطة إنعطاف

الدالة g' تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$g''(x) = 6x - 6$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

بما أن المشتقة الثانية إنعدمت عند $x = 1$ وغيرت إشارتها فإن (C_g) يقبل نقطة إنعطاف هيا $I(1;2)$

برهن أن هذه النقطة هي مركز تناظر لـ (C_g)

لإثبات أن $I(1;2)$ مركز تناظر يكفي أن نبين أن :

$$g(2\alpha - x) + g(x) = 2\beta$$
$$g(2 - x) + g(x) = 4$$

من أجل كل $x \in D_g$ أيضا $(2-x) \in D_g$ لدينا

$$g(2-x) = (2-x)^3 - 3(2-x)^2 + 4(2-x)$$
$$g(2-x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4$$

ومنه بالتعويض نجد

$$g(2-x) + g(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4 + x^3 - 3x^2 + 4x = 4$$

ومنه $I(1;2)$ هي مركز تناظر لـ (C_g)

❸ أ/ برهن أنه إذا كان $\beta > \alpha$ فإن $g(\beta) > g(\alpha)$

لدينا : $\beta > \alpha$ ، وبما أن g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن : $g(\beta) > g(\alpha)$

ب/ إستنتج مقارنة العددين $g(2022)$ و $g(2023)$

لدينا : $2022 < 2023$ ، وبما أن g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن : $g(2022) < g(2023)$

❹ إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

لدينا : $g(x) = x(x^2 - 3x + 4)$

$g(x) = 0$ معناه $x(x^2 - 3x + 4) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3x + 4 = 0 \end{cases} \text{أو} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \Delta = -7 < 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$x^2 - 3x + 4$		$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	

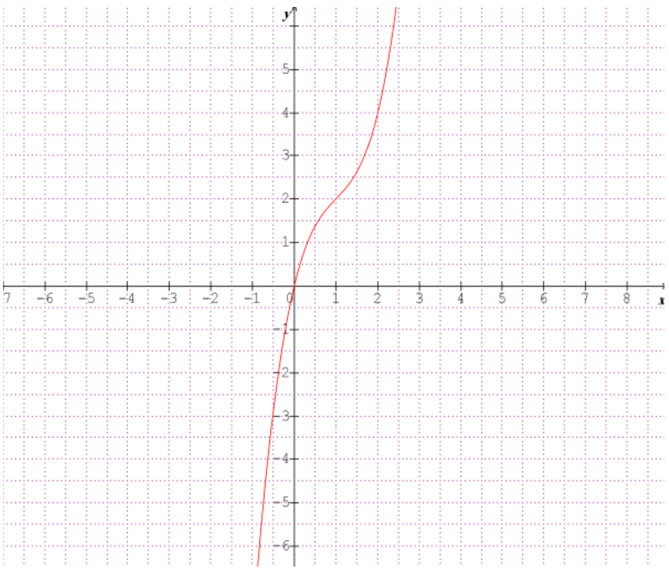
إستنتج وضعية (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل

(C_g) يقع تحت محور الفواصل في المجال $]-\infty;0[$

(C_g) يقطع محور الفواصل في النقطة $A(0;0)$

(C_g) يقع فوق محور الفواصل في المجال $]0;+\infty[$

❺ أنشئ المنحنى (C_g)



الجزء الثاني

1 عين العددين الحقيقين a و b

$$f(x) = ax + \frac{bx}{(x-1)^2} = \frac{ax(x-1)^2+bx}{(x-1)^2}$$

$$\frac{ax(x^2-2x+1)+bx}{(x-1)^2} = \frac{ax^3-2ax^2+ax+bx}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} .$$

ومنه $f(x) = x - \frac{x}{(x-1)^2}$

2 أحسب نهايات الدالة f ، وفسر النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} (x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} (x) = +\infty$$

$\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = -\infty$ لأن $\begin{cases} \text{البسط} \to -1 \\ \text{المقام} \to 0^+ \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = -\infty$ لأن $\begin{cases} \text{البسط} \to -1 \\ \text{المقام} \to 0^+ \end{cases}$

ومنه $x = 1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

3 أحسب $\lim\limits_{h\to0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$$\lim_{h\to0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\frac{(2+h)^3-2(2+h)^2}{(2+h-1)^2} - f(2)}{h}$$

$$\lim_{h\to0} \frac{(2+h)(2+h)^2-2(2+h)^2}{h(h+1)^2} = \lim_{h\to0} \frac{(2+h)^2(2+h-2)}{h(h+1)^2}$$

$$\lim_{h\to0} \frac{h(2+h)^2}{h(h+1)^2} = \lim_{h\to0} \frac{(2+h)^2}{(h+1)^2} = 4$$

ومنه f قابلة للإشتقاق عند 2 ، أي $f'(2) = 4$

تفسر النتيجة هندسيا : (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 2 مماسا معامل توجيهه 4

4 بين أنه : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2-4x)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3-2x^2)}{(x-1)^4}$$

$$\frac{(3x^2-4x)(x-1)-2(x^3-2x^2)}{(x-1)^3} = \frac{3x^3-3x^2-4x^2+4x-2x^3+4x^2}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3} = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

وهو المطلوب

5 إستنتج إتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها

إشارة المشتق من إشارة $g(x)$ و $(x-1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^3$		$-$		$-$	‖	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; 0]$ و $]1; +\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $[0; 1[$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

6 بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[-\frac{x}{(x-1)^2}\right]$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[-\frac{x}{x^2}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[-\frac{1}{x}\right] = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

جـ/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - x = -\frac{x}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)	

7 بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي (Δ)

نحل المعادلة $f'(x_0) = 1 \Rightarrow \frac{g(x_0)}{(x_0-1)^3} = 1$

$$g(x_0) = (x_0-1)^3$$

$$x_0{}^3 - 3x_0{}^2 + 4x_0 = x_0{}^3 - 3x_0{}^2 + 3x_0 - 1$$

$$x_0 = -1$$

ومنه (C_f) يقبل مماسا $(T)//(\Delta)$ عند $B(-1; -\frac{3}{4})$

$$(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = x + \frac{1}{4}$$

8 عين إحداثيات تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x)=0$ ومنه $\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=0$

$$x^3-2x^2=0 \Rightarrow x^2(x-2)=0$$

ومنه $\begin{cases}x^2=0\\ x-2=0\end{cases}$ أو $\Rightarrow \begin{cases}x=0\\ x=2\end{cases}$

ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في $(0;0)$ و $(2;0)$

9 عين إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$

لدينا $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$ ، ومنه $f(x)=\frac{x^2(x-2)}{(x-1)^2}$

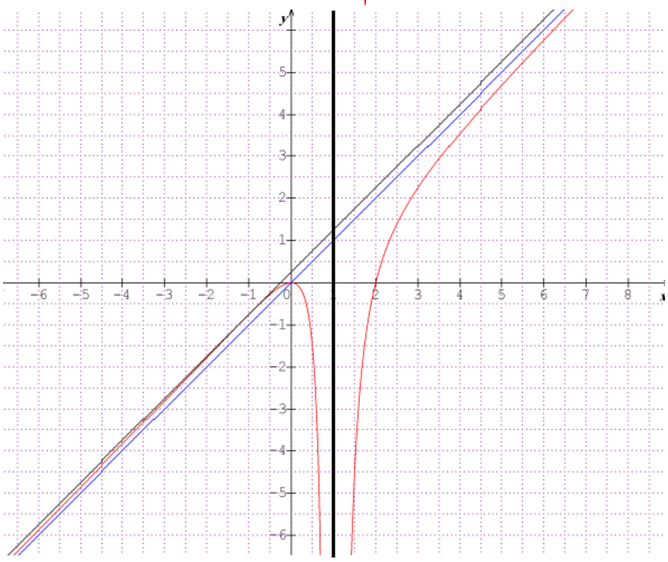
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

إستنتج وضعية (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

(C_f) يقع تحت محور الفواصل في المجال $]-\infty;1[$ و $]1;2[$ ويقع فوق محور الفواصل في $]2;+\infty[$

ويقطع محور الفواصل في النقطتين $(0;0)$ و $(2;0)$

10 أنشئ (Δ) و(T)، ثم (C_f)



11 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلات التالية: $f(x)=|m|-1$

حلول المعادلة هيا فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=|m|-1$

لما $|m|-1<0$ ، أي $|m|<1$ ، $m\in]-1;1[$

للمعادلة 3 حلول ، حلان موجبان وحلا سالبا .

لما $|m|-1=0$ ، أي $|m|=1$ أي $\begin{cases}m=1\\ m=-1\end{cases}$

للمعادلة حلا مضاعفا معدوما وحلا موجبا تماما

لما $|m|-1>0$ ، أي $|m|>1$ ، أي $m\in$ $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ للمعادلة حلا وحيدا موجبا تماما

ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلات التالية: $f(x)=f(m)$

لما $f(m)<0$ ، أي $m\in]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;2[$

للمعادلة 3 حلول ، حلان موجبان وحلا سالبا .

لما $f(m)=0$ ، أي $m=0$ أو $m=2$ للمعادلة حلان أحدهما مضاعف معدوم والآخر موجب $x=2$

لما $f(m)>0$ ، أي $m\in]2;+\infty[$ للمعادلة حلا وحيدا موجبا تماما

ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلات التالية: $-\frac{x}{(x-1)^2}=m$

لدينا: $-\frac{x}{(x-1)^2}=m$.

نضيف x لكل من الطرفين ، $f(x)=x+m$

ومنه فهي مناقشة مائلة

لما $m<0$ للمعادلة حلان موجبان تماما

لما $m=0$ للمعادلة حل وحيد معدوم

لما $0<m<\frac{1}{4}$ للمعادلة حلان سالبان

لما $m=\frac{1}{4}$ للمعادلة حل سالب

لما $m>\frac{1}{4}$ لا توجد حلول .

ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلات التالية : $f(x)=mx$

مناقشة دورانية

لتكن النقطة $\Omega(x_0;y_0)$ حيث Ω نقطة ثابتة من (Δ_m) حيث (Δ_m) معادلة هيا $y_0=mx_0$

$y_0-mx_0=0$. يكافئ $\begin{cases}x_0=0\\ y_0=0\end{cases}$ اي $\Omega(0;0)$

لما $m<0$ للمعادلة ثلاث حلول أحدهما معدوم
وحلين موجبين تماما

لما $m=0$ للمعادلة حلان أحدهما مضاعف معدوم
والآخر موجب تماما

لما $0<m<1$ للمعادلة ثلاث حلول أحدهما سالب
والآخر موجب

لما $m=1$ للمعادلة حل معدوم

لما $m>1$ للمعادلة حل وحيد معدوم .

الجزء الثالث

❶ بين أن h دالة زوجية

لدينا D_h متناظر بالنسبة لـ 0 ولدينا أيضا :

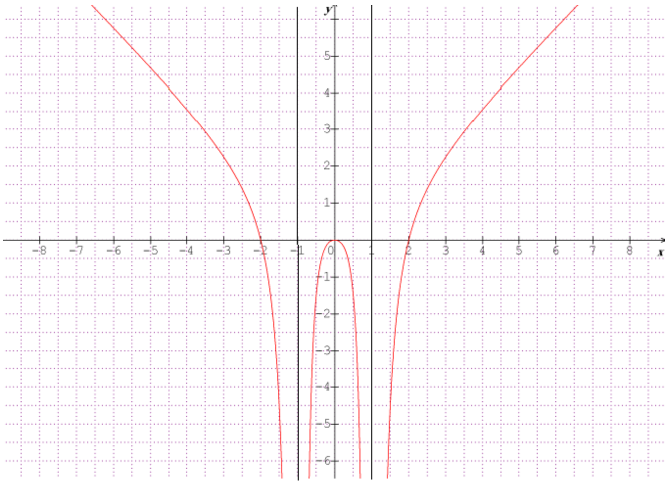
$$h(-x)=f(|-x|=f(|x|)=h(x)$$

ومنه h دالة زوجية

ب/ أشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) إنطلاقا من (C_f)

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & ;\ x\in[0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(-x) & ;\ x\in]-\infty;-1[\cup]-1;0] \end{cases}$$

لما يكون $x\in[0;1[\cup]1;+\infty[$ فإن (C_h) ينطبق على (C_f) ، وبما أن h زوجية نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب



الجزء الرابع

لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ :

$$k(x)=f(x^2)$$

أدرس إتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها

الدالة k قابلة للإشتقاق على المجالات $]-\infty;-1[$ و

و $]-1;1[$ و $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة هيا :

$$k'(x)=2xf'(x^2)$$

أولا ندرس إشارة $f'(x^2)$

$f'(x^2)\geq 0$ إذا كان $x^2\leq 0$ أو $x^2>1$

$x^2\leq 0$ ، أي $x=0$

$x^2>1$ معناها $\sqrt{x^2}>1$، أي $|x|>1$ ، أي

$x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x^2)$		$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$	
$k'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

ومنه الدالة k متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-1[$ و $[0;1[$ ومتزايدة تماما على المجالين $]-1;0]$ و $]1;+\infty[$

النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} k(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x^2)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} k(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x^2)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}} k(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x^2)=\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} k(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x^2)=\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} k(x)=\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x^2)=\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} k(x)=\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x^2)=\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=-\infty$$

جدول تغيرات الدالة k

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$