Rahmani Imed

دراسة دالة عددية

مع حل مقترح

السنة الثانية ثانوي

رياضيات | تقني رياضي | علوم تجريبية

من إعداد الأستاذ: رحماني عماد

التمرين

نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re-\{1\}$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$$

و ليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) عين الأعداد الحقيقية بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x من $\Re-\{1\}$:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$

2) احسب النهايات عند أطراف مجال التعريف و فسر النتائج بيانيا.

3) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أنه من أجل كل عدد x من المجال $]1;+\infty[$ فأن $f(x)>0$.

5) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

6) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

7) اكتب معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة (-1).

8) بين وجود مماسين لـ (C_f) موازيين لمحور الفواصل يطلب تعيين معدلتيهما.

9) بين أنه لا يوجد نقط تقاطع لـ (C_f) مع محور الفواصل.

10) عين نقطة تقاطع (C_f) مع محور التراتيب.

11) بين أنه من أجل كل عدد x من $\Re-\{1\}$: $f(1-x)+f(1+x)=-2$. ماذا تستنتج؟

12) أنشئ كل من (Δ) و (T) و (C_f).

13) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m حلول المعادلة $x^2-x(3+m)+3+m=0$

14) نعتبر الدالة g المعرفة بـ:

$$g(x)=f(|x|)$$

-بين أن الدالة g زوجية ثم أنشئ (C_g) انطلاقا من (C_f).

الحل:

1) تعيين لأعداد الحقيقية:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$

$$f(x)=\frac{ax(x-1)+b(x-1)+c}{x-1}$$

$$f(x)=\frac{ax^2-ax+bx-b+c}{x-1}$$

$$f(x)=\frac{ax^2+x(-a+b)-b+c}{x-1}$$

بالمطابقة نجد:

$$a=1$$

$$-a+b=-3 \qquad b=-2$$

$$-b+c=3 \qquad c=1$$

إذن:

$$f(x)=x-2+\frac{1}{x-1}$$

2) النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+3}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+3}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = -\infty$$

- التفسير البياني:

$x = 1$ مستقيم مقارب موازي لمحور الترتيب بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

3) دراسة إتجاه التغير:

- **المشتقة:**

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

- **إشارة المشتقة:**

إشارة المشتقة من إشارة البسط

$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

- **جدول التغيرات:**

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$		$\|$		$-$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ و متناقصة على المجال $[1;2]$ و $[0;1[$.

4) **إثبات أن** $f(x)>0$:

من جدول التغيرات نلاحظ أنه من أجل كل عدد x من المجال $]1;+\infty[$ فإن $f(x)\geq 1$ أي $f(x)>0$.

5) المستقيم المقارب المائل:

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x-2+\frac{1}{x-1}-(x-2)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

6) الوضع النسبي :

إشارة الفرق:

$$f(x)-y=\frac{1}{x-1}$$

إشارة الفرق من إشارة المقام.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$f(x)-y$	$-$	$\|\|$	$+$
الوضع النسبي	المنحنى تحت المستقيم		المنحنى فوق المستقيم

7) معادلة المماس:

$$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$$

$$(T): y=\frac{3}{4}x+\frac{11}{4}$$

8) برهان وجود مماسين موازين لمحور الفواصل:

مماس موازي لمحور الفواصل يعني أن معامل توجيهه معدوم أي أن:

$$f'(x_0)=0$$

$$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$$

$$x^2-2x=0$$

$$x_1=0 \quad x_2=2$$

إذن يوجد مماسين موازين لمحور الفواصل عند النقطتين ذات الفاصلتين $x_1=0$ $x_2=2$

معدلتاهما:

$$y_1=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$y_1=-3$$

$$y_2=f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$y_2=1$$

9) نقط التقاطع مع محور الفواصل:

$$f(x)=0$$

$$\frac{x^2-3x+3}{x-1}=0$$

$$x^2-3x+3=0$$

$$\Delta=(-3)^2-4\cdot(1)\cdot(3)=-3$$

لا يوجد حلول إذن لاتوجد نقط تقاطع لـ (C_f) مع محور الفواصل.

10) نقطة التقاطع مع محور التراتيب:

$f(0)=-3$

إذن نقطة تقاطع (C_f) مع محور التراتيب هي $(0;-3)$

11) مركز التناظر:

$$f(1-x)+f(1+x)=\frac{(1-x)^2-3(1-x)+3}{(1-x)-1}+\frac{(1+x)^2-3(1+x)+3}{(1+x)-1}$$

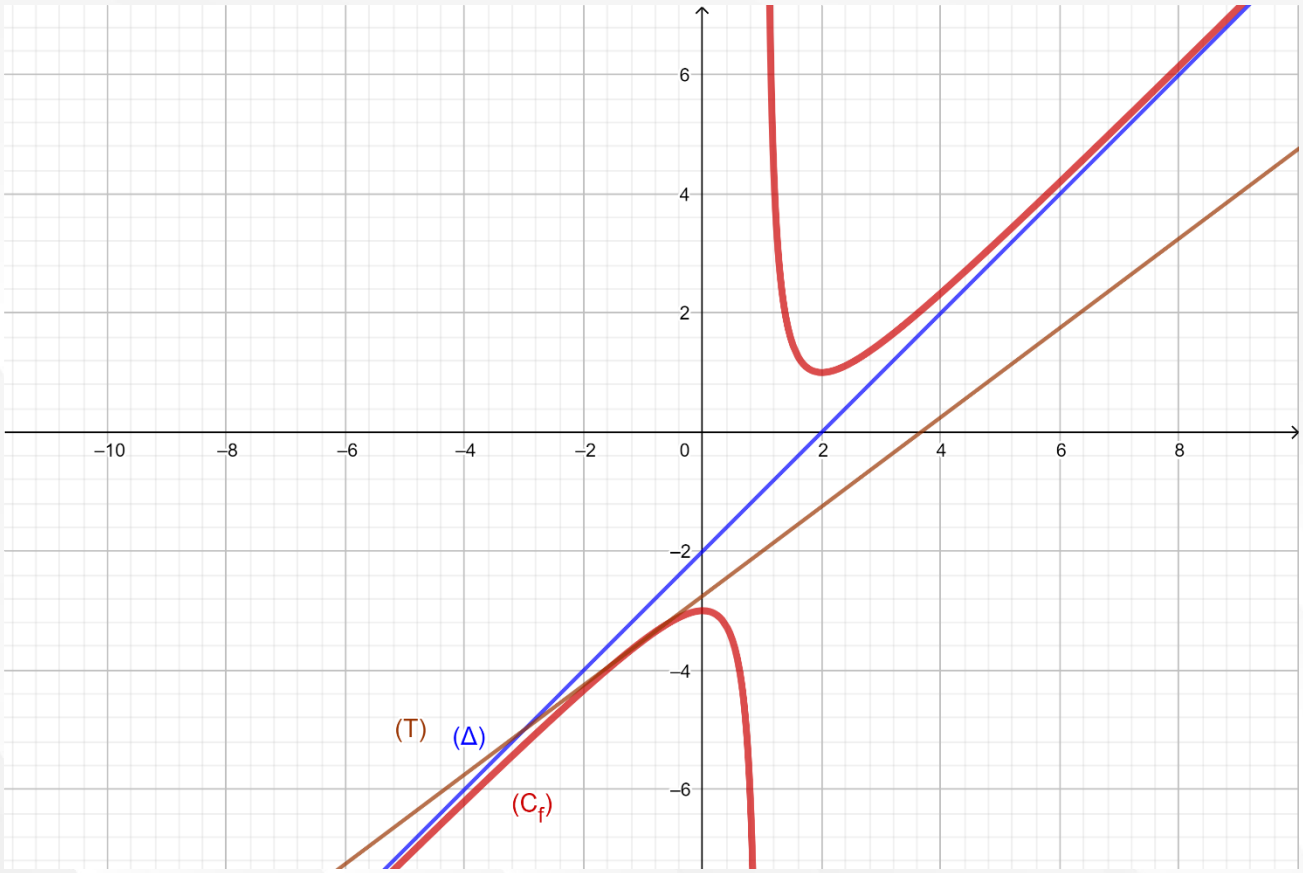
$$f(1-x)+f(1+x)=\frac{1+x^2-2x-3+3x+3}{-x}+\frac{1+x^2+2x-3-3x+3}{x}$$

$$f(1-x)+f(1+x)=\frac{-1-x^2+2x+3-3x-3}{x}+\frac{1+x^2+2x-3-3x+3}{x}$$

$$f(1-x)+f(1+x)=\frac{4x-6x}{x}=\frac{-2x}{x}=-2$$

- **الاستنتاج:** النقطة $(1;-1)$ مركز تناظر لـ(C_f).

12) الإنشاء:



13) المناقشة البيانية:

$$x^2 - x(3+m) + 3 + m = 0$$

$$x^2 - 3x - xm + 3 + m = 0$$

$$x^2 - 3x + 3 - m(x-1) = 0$$

$$x^2 - 3x + 3 = m(x-1)$$

$$\frac{x^2 - 3x + 3}{x-1} = m$$

$$f(x) = m$$

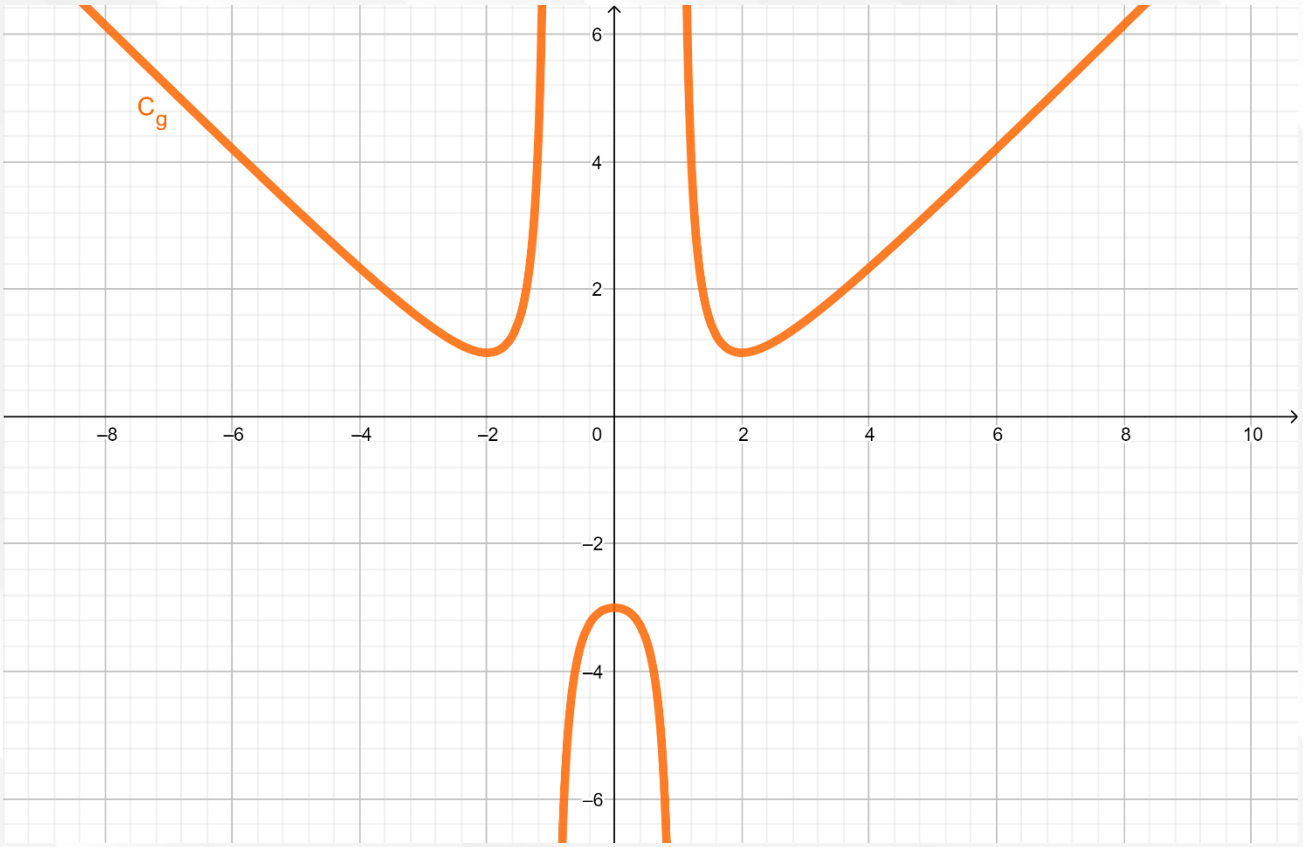
إذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $y=m$:

- $m\in]-\infty;-3[$: يوجد حلين مختلفين في الإشارة.
- $m=-3$: يوجد حل وحيد معدوم.
- $m\in]-3;1[$: لا يوجد حلول.
- $m=1$: يوجد حل وحيد موجب.
- $m\in]1;+\infty[$: يوجد حلين موجبين.

14) نبين أن الدالة زوجية:

$$g(-x)=f\left(|-x|\right)=f\left(|x|\right)=g(x)$$

إذن الدالة g زوجية و تمثيلها البياني:



♥ لا تنسونا من صالح دعائكم ♥

لمزيد من الدروس و التمارين امسح QR code

أو اضغط على الشعار