ثانوية علام عبد القادر – تاب — **السنة الدراسية 2024/ 2025**

المستوى : 3 تقني رياضي — **المدة : 90 دقيقة**

الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين

I) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=-4+(4-2x)e^{x}$

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث $1,59<\alpha<1,60$

3) عين ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^{x}-2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتاهما على الترتيب $y=-1$ و $y=0$

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\left(e^{x}-2x\right)^{2}}$

ب) استنتج إشارة $f'(x)$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

جـ) احسب $f(1)$ ، ثم استنتج ، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$

3) أ) بين أن $f(\alpha)=-1+\dfrac{1}{\alpha-1}$ ، حيث α هو العدد المعرف في السؤال 2 من الجزء I

ب) استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

جـ) ارسم (C_f).

4) عين قيم الوسيط الحقيقي m ، حتى تقبل المعادلة $2x-2=\left(e^{x}-2x\right)(m+1)$ حلين مختلفين في الإشارة.

5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\left[f(x)\right]^{2}$

أ) احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة h.

تصحيح الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

حل التمرين

I) g وهي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=-4+(4-2x)e^x$

1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=(-2)(e^x)+(e^x)(4-2x)=e^x(-2+4-2x)=e^x(2-2x)$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2-2x)$ لأن $e^x>0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$

و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

✓ تشكيل جدول تغيراتها:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} -4+(4-2x)e^x=\lim_{x\to-\infty} -4+4e^x-2xe^x=-4$$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0\end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} -4+(4-2x)e^x=-\infty$$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} (4-2x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\end{cases}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-4	↗	$-4+2e$	↘	$-\infty$

2) تبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث $1,59<\alpha<1,60$:

على المجال $]-\infty;1]$ الدالة g مستمرة و متزايدة تماما و $g(0)=0$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل معدوم.

على المجال $[1;+\infty[$ الدالة g مستمرة و متناقصة تماما و بالأخص على المجال $[1,59;1,60]$ و $g(1,59)\simeq 0,2$ و $g(1,60)\simeq -0,03$

ومنه $g(1,59)\times g(1,60)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد α حيث $1,59<\alpha<1,60$

3) تعين ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$: من جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^x-2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) تبين أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتاهما على الترتيب $y=-1$ و $y=0$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{e^x-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2}=-1 \quad \text{لأن} \quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0\end{cases}$$

(C_f) يقبل عند $-\infty$ مستقيم مقارب معادلته $y=-1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{e^x-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2}=0 \quad \text{لأن} \quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\end{cases}$$

(C_f) يقبل عند $+\infty$ مستقيم مقارب معادلته $y=0$

2) أ) برهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\left(e^x-2x\right)^2}$

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{2\left(e^x-2x\right)-\left(e^x-2\right)(2x-2)}{\left(e^x-2x\right)^2}=\frac{2e^x-4x-2xe^x+2e^x+4x-4}{\left(e^x-2x\right)^2}=\frac{(4-2x)e^x-4}{\left(e^x-2x\right)^2}=\frac{g(x)}{\left(e^x-2x\right)^2}$$

ب) استنتاج إشارة $f'(x)$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $\left(e^x-2x\right)^2>0$ ومنه

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

✓ تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3) حساب $f(1)$ ، ثم استنتج ، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$: $f(1)=0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

4) أ)تبين أن $f\left(\alpha\right)=-1+\dfrac{1}{\alpha-1}$ ، حيث α هو العدد المعرف في السؤال 2 من الجزء I :

$$\begin{cases} f\left(\alpha\right)=\dfrac{2\alpha-2}{e^{\alpha}-2\alpha} \\ g\left(\alpha\right)=0 \end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases} f\left(\alpha\right)=\dfrac{2\alpha-2}{e^{\alpha}-2\alpha} \\ -4+\left(4-2\alpha\right)e^{\alpha}=0 \end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases} f\left(\alpha\right)=\dfrac{2\alpha-2}{e^{\alpha}-2\alpha}\,.........(1) \\ e^{\alpha}=\dfrac{4}{4-2\alpha}\,...............(2) \end{cases}$$ بتعويض (2) في (1) نجد

$$f\left(\alpha\right)=\frac{2\alpha-2}{\dfrac{4}{4-2\alpha}-2\alpha}=\frac{2\alpha-2}{\dfrac{4\alpha^2-8\alpha+4}{4-2\alpha}}=\left(2\alpha-2\right)\left(\frac{4-2\alpha}{4\alpha^2-8\alpha+4}\right)=\frac{\left(2\alpha-2\right)\left(4-2\alpha\right)}{\left(2\alpha-2\right)^2}=\frac{\left(4-2\alpha\right)}{\left(2\alpha-2\right)}=-1+\frac{1}{\alpha-1}$$

ب) استنتاج حصرا للعدد $f\left(\alpha\right)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}):

لدينا $1,60>\alpha>1,59$ يكافئ $0,60>\alpha-1>0,59$ يكافئ $\dfrac{1}{0,59}>\dfrac{1}{\alpha-1}>\dfrac{1}{0,60}$ يكافئ $-1+\dfrac{1}{0,59}>-1+\dfrac{1}{\alpha-1}>-1+\dfrac{1}{0,60}$

ومنه $0,69>f\left(\alpha\right)>0,67$

جـ) ارسم $\left(C_f\right)$. في آخر الصفحة

5) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m ، حتى تقبل المعادلة $2x-2=\left(e^x-2x\right)\left(m+1\right)$ حلين مختلفين في الإشارة:

$2x-2=\left(e^x-2x\right)\left(m+1\right)$ يكافئ $\dfrac{2x-2}{e^x-2x}=m+1$ يكافئ $f\left(x\right)=m+1$ ومنه عدد حلول المعادلة هو عدد فواصل نقط

تقاطع $\left(C_f\right)$ مع المستقيم ذو المعادلة $y=m+1$

لما $m+1\in\left]-2;-1\right[$ للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة في $\mathbb{R}$ أي من أجل $m\in\left]-3;-2\right[$

6) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]^2$

أ) حساب $h'\left(x\right)$ بدلالة كل من $f\left(x\right)$ و $f'\left(x\right)$ ، ثم استنتج إشارة $h'\left(x\right)$:

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل $x\in\mathbb{R}$: $h'\left(x\right)=2f'\left(x\right)f\left(x\right)$

x	$-\infty$ $\quad 0 \quad 1 \quad \alpha \quad$ $+\infty$
$f'\left(x\right)$	$-\ \ 0\ \ +\ \ 0\ \ -$
$f\left(x\right)$	$-\ \ 0\ \ +$
$h'\left(x\right)$	$+\ \ 0\ \ -\ \ 0\ \ +\ \ 0\ \ -$

✓ تشكيل جدول تغيرات الدالة h :

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)\right]^2 = 1$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to-1} x^2 = 1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\right]^2 = 0$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to0} x^2 = 0\end{cases}$

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\left[f(\alpha)\right]^2$	$\searrow$	0