سلسلة الرياضيات في الثانوية

مجلة 65

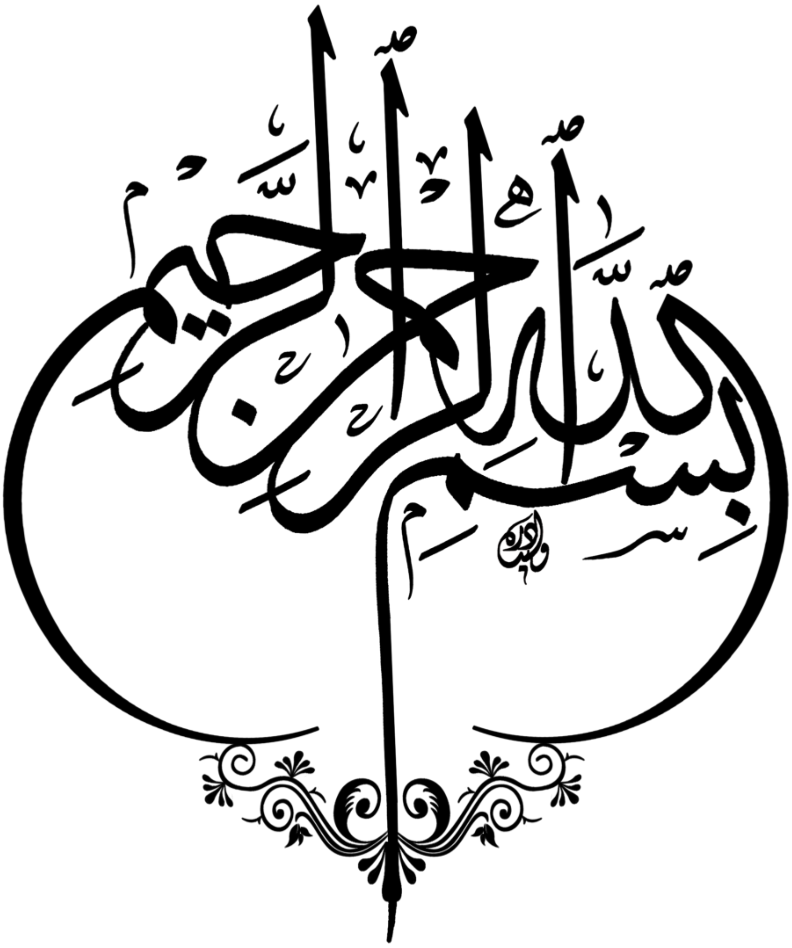
تمرين مرفق بالحل المفصل في محور الأعداد و الحساب

للسنة الأولى ثانوي

كتابة و إعداد :

الأستاذ حنــاش نبيــل

إصدار : 2020 - 2021


بسم الله الرحمن الرحيم

التمرين رقم 01 : أنقل ثم أكمل الجدول بوضع $\times$ في المكان الصحيح :

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	
		$\times$	$\times$	$\times$	3.14
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	2
			$\times$	$\times$	$6.\underline{23}$
				$\times$	$\sqrt{2}$
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\sqrt{81}$

$6.\underline{23}$ تمثل الكتابة العشرية الدورية لعدد ناطق (بحيث الفاصلة غير منتهية)

81 هو مربع تام بحيث $\sqrt{81}=9$.

التمرين رقم 02 :

ضع أحد الرمزين $\in$ أو $\notin$:

$-\sqrt{25}\ldots\mathbb{N}$ ؛ $\dfrac{-125}{5}\ldots\mathbb{Z}$ ؛ $\dfrac{5}{70}\ldots\mathbb{D}$ ؛ $\sqrt{0.81}\ldots\mathbb{Q}$

حل مقترح :

$-\sqrt{25}=-5$ و منه : $-\sqrt{25}\notin\mathbb{N}$ لأن -5 عدد سالب و جميع الأعداد الطبيعية هي أعداد موجبة .

$\dfrac{-125}{5}=-25$ و منه : $\dfrac{-125}{5}\in\mathbb{Z}$

نقوم أولا بكتابة الكسر $\dfrac{5}{70}$ على شكل كسر غير قابل للإختزال فنجد : $\dfrac{5}{70}=\dfrac{1}{14}$ ($PGCD(5;70)$)

ثانيا نقوم بتحليل المقام 14 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $14=2\times7$ أي أن المقام يشتمل في تحليله إلى جداء عوامل أولية عددا أوليا يختلف عن 2 و يختلف عن 5 و هو 7 ، إذن من الخاصية المميزة لعدد عشري نستنتج أن العدد $\dfrac{5}{70}\notin\mathbb{D}$.

لدينا : $\sqrt{0.81}=0.9$ و بما أن 0.9 عدد عشري (فاصلة منتهية) فإن : $0.9\in\mathbb{Q}$ لأن $\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}$ أو يمكن

الإجابة كما يلي : $\sqrt{0.81}=0.9=\frac{9}{10}$ و منه يكون : $\sqrt{0.81}\in\mathbb{Q}$.

التمرين رقم 03 :

هل العدد a عشري بحيث : $a=\frac{330}{396}$ ؟

حل مقترح :

دون إستعمال الآلة الحاسبة و باستعمال الخاصية المميزة لعدد عشري نكتب أولا الكسر $\frac{330}{396}$ على شكل كسر غير

قابل للإختزال : من أجل ذلك نعين $PGCD(330;396)$:

$\begin{cases}396=330\times1+66\\330=66\times5+0\end{cases}$ و منه : $PGCD(330;396)=66$.

إذن نحصل على : $\frac{330}{396}=\frac{5}{6}$ و من ثم نحلل المقام 6 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $6=2\times3$ أي أن المقام

يشتمل في تحليله إلى جداء عوامل أولية عددا أوليا يختلف عن 2 و يختلف عن 5 و هو 3 ؛ إذن من الخاصية المميزة

لعدد عشري نستنتج أن العدد $\frac{330}{396}\notin\mathbb{D}$.

التمرين رقم 04 :

أكتب الأعداد التالية على شكل كسر :

$A=-0.\underline{35}35....$ ؛ $B=12.\underline{37}37...$

حل مقترح :

$A=-0.\underline{35}35....=-0+0.3535...$ أي $A=-0.\underline{35}35....=0+0.3535...$ ؛ و بوضع :

$x=0.3535...$ تحصل على : $A=0+x$.

عدد أرقام الدور هو 2 و منه بضرب المعادلة $x=0.3535...$ في 10^2 أي في 100 نجد :

$100x=35.3535...$ و منه $100x=35+0.3535...$ أي $100x=35+x$ لأن $x=0.3535...$

و منه نجد : $100x-x=35$ أي $99x=35$ و منه : $x=\frac{35}{99}$.

إذن بتعويض قيمة x في المجموع $A=0+x$ نجد : $A=0+\frac{35}{99}$ أي $A=\frac{35}{99}$ و هو المطلوب .

$B=12.\underline{37}37...=12+0.3737...$ و بوضع : $x=0.3737...$ تحصل على : $B=12+x$.

عدد أرقام الدور هو 2 و منه بضرب المعادلة $x=0.3737...$ في 10^2 أي في 100 نجد :

$100x=37.3737...$ و منه $100x=37+0.3737...$ أي $100x=37+x$ لأن $x=0.3737...$

و منه نجد : $100x-x=37$ أي $99x=37$ و منه : $x=\frac{37}{99}$.

إذن بتعويض قيمة x في المجموع $B=12+x$ نجد : $B=12+\frac{37}{99}$ أي $B=\frac{12\times 99+37}{99}$ و منه :

$B=\frac{1225}{99}$ و هو المطلوب .

التمرين رقم 05 :

عين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$:

$-\sqrt{81}$ ؛ $\sqrt{49}$ ؛ 8×10^3 ؛ $73,0$ ؛ $\frac{-24}{3}$ ؛ $\frac{10}{2}$ ؛ -13 ؛ $3\sqrt{4}$ ؛ $2\sqrt{5}$.

عين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$:

$-\sqrt{121}$ ؛ $\sqrt{169}$ ؛ 8×10^{3} ؛ $73,0$ ؛ $\frac{-24}{5}$ ؛ $\frac{12}{3}$ ؛ -13 ؛ $3\sqrt{4}$ ؛ 2.5 .

عين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد العشرية $\mathbb{D}$:

3.14 ؛ $\frac{1123}{5}$ ؛ $\frac{10}{3}$ ؛ 7 ؛ $-\sqrt{0.01}$ ؛ $\frac{5}{2}$ ؛ -13 ؛ -9.3 ؛ $\sqrt{25}$.

عين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$:

3.14 ؛ $\frac{1123}{5}$ ؛ $\frac{10}{3}$ ؛ 9 ؛ $-\sqrt{0.01}$ ؛ -77 ؛ $\sqrt{17}$ ؛ -4.3 ؛ $3\sqrt{36}$.

عين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$ و لا تنتمي إلى $\mathbb{N}$:

$-\sqrt{36}$ ؛ 4×5^{3} ؛ 73.0 ؛ $\frac{-13}{6}$ ؛ $\frac{14}{2}$ ؛ -77 ؛ 100 ؛ $3\sqrt{36}$.

عين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ و لا تنتمي إلى مجموعة الأعداد العشرية $\mathbb{D}$:

3.14 ؛ $\frac{123}{11}$ ؛ $\frac{10}{3}$ ؛ 1 ؛ $\sqrt{0.49}$ ؛ $\sqrt{100}$ ؛ $\frac{5}{2}$ ؛ $\frac{13}{10}$ ؛ -9.07 ؛ $\frac{17}{100}$.

حل مقترح :

- تعيين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$:

$-\sqrt{81}$ ؛ $\sqrt{49}$ ؛ 8×10^{3} ؛ $73,0$ ؛ $\frac{-24}{3}$ ؛ $\frac{10}{2}$ ؛ -13 ؛ $3\sqrt{4}$ ؛ $2\sqrt{5}$.

81 مربع تام و منه يكون : $-\sqrt{81}=-9$ و هو عدد سالب ؛ إذن : $-\sqrt{81}\notin\mathbb{N}$.

49 مربع تام و منه يكون : $\sqrt{49}=7$ ، إذن : $\sqrt{49}\in\mathbb{N}$.

$8\times10^3=8000$ و منه : $8\times10^3\in\mathbb{N}$.

$73.0=73$ و منه : $73.0\in\mathbb{N}$.

$\frac{-24}{3}$ عدد سالب و منه $\frac{-24}{3}\notin\mathbb{N}$.

$\frac{10}{2}=5$ و منه يكون : $\frac{10}{2}\in\mathbb{N}$.

-13 عدد سالب و منه $-13\notin\mathbb{N}$.

4 مربع تام و منه $3\sqrt{4}=3\times2=6$ ، إذن : $3\sqrt{4}\in\mathbb{N}$.

5 ليس مربع تام و منه $\sqrt{5}$ عدد أصم و منه يكون $2\sqrt{5}$ عدد أصم ، إذن : $2\sqrt{5}\notin\mathbb{N}$.

- تعيين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$:

121 مربع تام بحيث $\sqrt{121}=11$ و منه $-\sqrt{121}=-11$ ، إذن : $-\sqrt{121}\in\mathbb{Z}$.

169 مربع تام بحيث $\sqrt{169}=13$ ، إذن : $\sqrt{169}\in\mathbb{Z}$.

$8\times10^3=8000$ ، إذن : $8\times10^3\in\mathbb{Z}$.

$73.0=73$ ، إذن : $73.0\in\mathbb{Z}$.

المقام 5 لا يقسم البسط -24 و منه يكون الكسر $\frac{-24}{5}$ لا يساوي عدد صحيح أي $\frac{-24}{5}\notin\mathbb{Z}$.

المقام 3 يقسم البسط 12 و منه يكون الكسر $\frac{12}{3}$ يساوي عدد صحيح بحيث $\frac{12}{3}=4$ إذن : $\frac{12}{3}\in\mathbb{Z}$.

$-13\in\mathbb{Z}$.

4 مربع تام بحيث $\sqrt{4}=2$ و منه $3\sqrt{4}=3\times 2=6$ ، إذن : $3\sqrt{4}\in\mathbb{Z}$.

2.5 عدد بالفاصلة (غير صحيح) و منه : $2.5\notin\mathbb{Z}$.

• تعيين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد العشرية $\mathbb{D}$:

3.14 عدد بالفاصلة المنتهية و منه يكون $3.14\in\mathbb{D}$ ، أو يمكن الإجابة كما يلي : نلاحظ أن

$\frac{314}{10^2}=\frac{314}{100}=3.14$ و منه فالعدد 3.14 يكتب على الشكل $\frac{p}{10^n}$ بحيث $p=314$ عدد صحيح نسبي و

$n=2$ عدد طبيعي ، إذن من التعريف نستنتج أن : $3.14\in\mathbb{D}$.

بدون إستعمال الآلة الحاسبة الكسر $\frac{1123}{5}$ غير قابل للإختزال و من جهة أخرى عند تحليل المقام إلى جداء عوامل

أولية نجد : $5=5^1$ أي أن تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية لا يشمل إلا العاملين 2 أو 5 و منه فالعدد $\frac{1123}{5}$

هو عدد عشري أي $\frac{1123}{5}\in\mathbb{D}$

بدون إستعمال الآلة الحاسبة الكسر $\frac{10}{3}$ غير قابل للإختزال و من جهة أخرى عند تحليل المقام إلى جداء عوامل

أولية نجد : $3=3^1$ أي أن تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية يشمل عاملا أوليا و هو 3 يختلف عن 2 و يختلف

عن 5 و منه فالعدد $\frac{10}{3}$ هو عدد ليس عشريا أي $\frac{10}{3}\notin\mathbb{D}$

$7\in\mathbb{D}$ لأن : $\frac{70}{10^1}=\frac{70}{10}=7$ أي أن العدد 7 يكتب على الشكل $\frac{p}{10^n}$ بحيث $p=70$ عدد صحيح نسبي و

$n=1$ عدد طبيعي .

$-\sqrt{0.01}=-0.1\in\mathbb{D}$ لأن الفاصلة منتهية أو يمكن الإجابة كما يلي : نلاحظ أن

$-\sqrt{0.01} = -0.1 = \frac{-1}{10} = \frac{-1}{10^1}$ أي أن العدد $-\sqrt{0.01}$ يكتب على الشكل $\frac{p}{10^n}$ بحيث $p=-1$ عدد صحيح نسبي و $n=1$ عدد طبيعي .

بدون إستعمال الآلة الحاسبة الكسر $\frac{5}{2}$ غير قابل للإختزال و من جهة أخرى عند تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية نجد : $2 = 2^1$ أي أن تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية لا يشمل إلا العاملين 2 أو 5 و منه فالعدد $\frac{5}{2}$ هو عدد عشري أي $\frac{5}{2} \in \mathbb{D}$

-13 هو عدد صحيح نسبي و منه -13 هو عدد عشري لأن مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية محتواة في مجموعة الأعداد العشرية ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$) أي $-13 \in \mathbb{D}$ أو يمكن الإجابة كما يلي :

$-13 = \frac{-130}{10} = \frac{-130}{10^1}$ أي أن العدد -13 يكتب على الشكل $\frac{p}{10^n}$ بحيث $p=-130$ عدد صحيح نسبي و $n=1$ عدد طبيعي و منه : $-13 \in \mathbb{D}$.

$-9.3 \in \mathbb{D}$ لأن الفاصلة منتهية أو يمكن الإجابة كما يلي :

$-9.3 = \frac{-93}{10} = \frac{-93}{10^1}$ أي أن العدد -9.3 يكتب على الشكل $\frac{p}{10^n}$ بحيث $p=-93$ عدد صحيح نسبي و $n=1$ عدد طبيعي و منه : $-9.3 \in \mathbb{D}$.

25 مربع تام بحيث $\sqrt{25} = 5$ و بما أن 5 هو عدد طبيعي فإن 5 هو عدد عشري لأن مجموعة الأعداد الطبيعية محتواة في مجموعة الأعداد العشرية ($\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$) أي $\sqrt{25} \in \mathbb{D}$.

$\sqrt{25} = 5 = \frac{50}{10} = \frac{50}{10^1}$ أي أن العدد $\sqrt{25}$ يكتب على الشكل $\frac{p}{10^n}$ بحيث $p=50$ عدد صحيح نسبي و $n=1$ عدد طبيعي و منه : $\sqrt{25} \in \mathbb{D}$.

• تعيين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$:

$3.14 \in \mathbb{Q}$ لأن $3.14 = \frac{314}{100}$.

$\frac{1123}{5} \in \mathbb{Q}$ و $\frac{10}{3} \in \mathbb{Q}$.

9 عدد طبيعي و بما أن مجموعة الأعداد الطبيعية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$) فإن $9 \in \mathbb{Q}$.

أو يمكن الإجابة كما يلي : $\frac{9}{1} = 9$ أي أن العدد 9 يكتب على الشكل $\frac{p}{q}$ بحيث p عدد صحيح نسبي و q عدد صحيح نسبي غير معدوم و منه : $9 \in \mathbb{Q}$.

$-\sqrt{0.01} = -0.1$ أي أن العدد $-\sqrt{0.01}$ عدد عشري (الفاصلة منتهية) و بما أن مجموعة الأعداد العشرية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة ($\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$) فإن $-\sqrt{0.01} \in \mathbb{Q}$ أو يمكن الإجابة كما يلي :

$\frac{-1}{10} = -0.1 = -\sqrt{0.01}$ أي أن العدد $-\sqrt{0.01}$ يكتب على الشكل $\frac{p}{q}$ بحيث p عدد صحيح نسبي و q عدد صحيح نسبي غير معدوم و منه يكون : $-\sqrt{0.01} \in \mathbb{Q}$.

-77 عدد صحيح نسبي و بما أن مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$) فإن $-77 \in \mathbb{Q}$. أو يمكن الإجابة كما يلي : $\frac{-77}{1} = -77$ أي أن العدد -77 يكتب على الشكل $\frac{p}{q}$ بحيث p عدد صحيح و q عدد صحيح نسبي غير معدوم و منه : $-77 \in \mathbb{Q}$.

17 ليس مربع تام و منه مباشرة نستنتج أن : $\sqrt{17} \notin \mathbb{Q}$.

-4.3 عدد عشري (الفاصلة منتهية) و بما أن مجموعة الأعداد العشرية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة ($\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$) فإن $-4.3 \in \mathbb{Q}$. أو يمكن الإجابة كما يلي :

$\frac{-43}{10}=-4.3$ أي أن العدد -4.3 يكتب على الشكل $\frac{p}{q}$ بحيث p عدد صحيح و q عدد صحيح نسبي غير معدوم و منه : $-4.3\in\mathbb{Q}$.

36 مربع تام بحيث $\sqrt{36}=6$ و منه $3\sqrt{36}=3\times6=18$ ؛ 18 عدد طبيعي و بما أن مجموعة الأعداد الطبيعية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة ($\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}$) فإن $18\in\mathbb{Q}$. أو يمكن الإجابة كما يلي :

$\frac{18}{1}=18$ أي أن العدد 18 يكتب على الشكل $\frac{p}{q}$ بحيث p عدد صحيح و q عدد صحيح نسبي غير معدوم و منه : $18\in\mathbb{Q}$.

- تعيين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$ و لا تنتمي إلى $\mathbb{N}$:

$-\sqrt{36}=-6$ و منه يكون : $-\sqrt{36}\in\mathbb{Z}$ و $-\sqrt{36}\notin\mathbb{N}$ لأن -6 عدد سالب .

$4\times5^3=500$ و منه يكون : $4\times5^3\in\mathbb{Z}$ و $4\times5^3\in\mathbb{N}$.

$73.0=73$ و منه يكون : $73.0\in\mathbb{Z}$ و $73.0\in\mathbb{N}$.

المقام 6 لا يقسم البسط -13 و منه فالكسر $\frac{-13}{6}$ لا يمكن أن يساوي عددا صحيحا ($\frac{-13}{6}=-2.166\ldots\notin\mathbb{Z}$) و كذلك : $\frac{-13}{6}\notin\mathbb{N}$

$\frac{14}{2}=7$ و منه : $\frac{14}{2}\in\mathbb{Z}$ و $\frac{14}{2}\in\mathbb{N}$.

$-77\in\mathbb{Z}$ و $-77\notin\mathbb{N}$ لأن : -77 عدد سالب .

$100\in\mathbb{Z}$ و $100\in\mathbb{N}$.

36 مربع تام بحيث $\sqrt{36}=6$ و منه $3\sqrt{36}=18$ ؛ إذن $3\sqrt{36}\in\mathbb{Z}$ و $3\sqrt{36}\in\mathbb{N}$.

• تعيين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ و لا تنتمي إلى مجموعة الأعداد العشرية $\mathbb{D}$:

$\frac{314}{100} = 3.14$ و منه $3.14 \in \mathbb{Q}$ و كذلك $3.14 \in \mathbb{D}$ (الفاصلة منتهية) .

$\frac{123}{11} \in \mathbb{Q}$ و هو كسر غير قابل للإختزال ؛ و من جهة أخرى تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية يكون :

$11 = 11^1$ أي أن هذا التحليل يشتمل على 11 و هو عدد أولي يختلف عن 2 و يختلف عن 5 ؛ إذن $\frac{123}{11} \notin \mathbb{D}$.

$\frac{10}{3} \in \mathbb{Q}$ و هو كسر غير قابل للإختزال ؛ و من جهة أخرى تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية يكون : $3 = 3^1$

أي أن هذا التحليل يشتمل على 3 و هو عدد أولي يختلف عن 2 و يختلف عن 5 ؛ إذن $\frac{10}{3} \notin \mathbb{D}$.

1 هو عدد طبيعي و بما أن مجموعة الأعداد الطبيعية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$) فإن $1 \in \mathbb{Q}$. أو يمكن الإجابة كما يلي : $\frac{1}{1} = 1 \in \mathbb{Q}$ ؛ كذلك نعلم أن مجموعة الأعداد الطبيعية محتواة في مجموعة الأعداد العشرية ($\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$) و منه $1 \in \mathbb{D}$. أو يمكن الإجابة كما يلي : $1 = \frac{10}{10} = \frac{10}{10^1} \in \mathbb{D}$ (من الشكل $\frac{p}{10^n}$) .

$\sqrt{0.49} = 0.7 \in \mathbb{D}$ (فاصلة منتهية) و بما أن و بما أن مجموعة الأعداد العشرية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة ($\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$) فإن $\sqrt{0.49} = 0.7 \in \mathbb{Q}$. أو يمكن الإجابة كما يلي : $\sqrt{0.49} = 0.7 = \frac{7}{10} \in \mathbb{Q}$

100 مربع تام بحيث $\sqrt{100} = 10$ أي أن $\sqrt{100}$ طبيعي و بما أن مجموعة الأعداد الطبيعية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$) فإن $\sqrt{100} = 10 \in \mathbb{Q}$. أو يمكن الإجابة كما يلي : $\sqrt{100} = 10 = \frac{10}{1} \in \mathbb{Q}$.

$\sqrt{100}$ طبيعي و بما أن مجموعة الأعداد الطبيعية محتواة في مجموعة الأعداد العشرية ($\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$) فإن :

$\sqrt{100}=10\in\mathbb{D}$. أو يمكن الإجابة كما يلي : $\sqrt{100}=10=\frac{100}{10}=\frac{100}{10^1}\in\mathbb{D}$ (من الشكل $\frac{p}{10^n}$) .

$\frac{2}{5}\in\mathbb{Q}$ (من الشكل $\frac{p}{q}$) و هو كسر غير قابل للإختزال ؛ و من جهة أخرى تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية

يكون : $5=5^1$ أي أن هذا التحليل يشتمل فقط على العاملين 2 أو 5 إذن $\frac{2}{5}\in\mathbb{D}$ (دون استعمال الحاسبة) .

$\frac{13}{10}\in\mathbb{Q}$ (من الشكل $\frac{p}{q}$) و هو كسر غير قابل للإختزال ؛ و من جهة أخرى تحليل المقام إلى جداء عوامل

أولية يكون : $10=2^1\times5^1$ أي أن هذا التحليل يشتمل فقط على العاملين 2 أو 5 إذن $\frac{13}{10}\in\mathbb{D}$ (دون

استعمال الحاسبة) .

$-9.07\in\mathbb{D}$ لأن الفاصلة منتهية أو يمكن الإجابة كما يلي : $-9.07=\frac{-907}{100}=\frac{-907}{10^2}\in\mathbb{D}$ (من الشكل

$\frac{p}{10^n}$) ؛ و بما أن و بما أن مجموعة الأعداد العشرية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة ($\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}$) فإن

$-9.07\in\mathbb{Q}$ أو يمكن الإجابة كما يلي : $-9.07=\frac{-907}{100}\in\mathbb{Q}$.

$\frac{17}{100}=\frac{17}{10^2}\in\mathbb{D}$ (من الشكل $\frac{p}{10^n}$) و بما أن مجموعة الأعداد العشرية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة (

$\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}$) فإن $\frac{17}{100}\in\mathbb{Q}$ أو يمكن الإجابة كما يلي : $\frac{17}{100}\in\mathbb{Q}$ لأن العدد $\frac{17}{100}$ من الشكل $\frac{p}{q}$ بحيث

$p=17$ و $q=100$.

التمرين رقم 06 :

1/ بين أن العدد $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ طبيعي .

2/ بين أن العدد $\frac{2}{3}-\frac{1}{15}$ عشري .

3/ بين أن العدد $a=\sqrt{1-\frac{12}{13}}\times\sqrt{1+\frac{12}{13}}$ ناطق .

حل مقترح :

1/ نبين أن العدد $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ طبيعي : نوحد المقامات بملاحظة أن المقام المشترك هو 6 و منه :

$\frac{1}{6}+\frac{1\times2}{3\times2}+\frac{1\times3}{2\times3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ أي $\frac{3+2+1}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ أي $\frac{6}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ و منه نجد :

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1\in\mathbb{N}$.

2/ نبين أن العدد $\frac{1}{15}-\frac{2}{3}$ عشري : نوحد المقامات فنجد : $\frac{1-10}{15}=\frac{1}{15}-\frac{2\times5}{3\times5}=\frac{1}{15}-\frac{2}{3}$ أي :

$\frac{1}{15}-\frac{2}{3}=\frac{-9}{15}=\frac{-3}{5}$ ، هذا العدد هو كسر غير قابل للإختزال و تحليل مقامه إلى جداء عوامل أولية هو $5=5^1$

هذا التحليل لا يشتمل عددا أوليا يختلف عن 2 و يختلف عن 5 ، إذن العدد $\frac{1}{15}-\frac{2}{3}=\frac{-3}{5}\in\mathbb{D}$

3/ نبين أن العدد $a=\sqrt{1+\frac{12}{13}}\times\sqrt{1-\frac{12}{13}}$ ناطق : من خواص الجداء في الجذور نجد :

$a=\sqrt{\left(1+\frac{12}{13}\right)\left(1-\frac{12}{13}\right)}$ و منه $a=\sqrt{1^2-\left(\frac{12}{13}\right)^2}$ أي $a=\sqrt{1-\frac{144}{169}}$ أي $a=\sqrt{\frac{169-144}{169}}$

و منه $a=\sqrt{\frac{25}{169}}$ و من خواص القسمة في الجذور نتحصل على : $a=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{169}}$ أي $a=\frac{5}{13}\in\mathbb{Q}$.

التمرين رقم 07 :

حدد أصغر مجموعة تنتمي إليها الأعداد التالية :

$A=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2$ ؛ $B=\frac{3}{\sqrt{2}+1}-3\sqrt{2}$ ؛ $C=\left(\sqrt{18}-4\right)\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}+1\right)$ ؛

$D=\frac{3\sqrt{2}+15}{7\sqrt{2}+35}$ ؛ $E=\frac{2\pi}{3.14}$ ؛ $F=\frac{\left(\sqrt{2}-3\right)\left(\sqrt{2}+3\right)}{700}$ ؛ $G=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\right)$

حل مقترح :

$A=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{3}+3}{4}+\frac{1+2\sqrt{3}+3}{4}$ أي :

$A=\frac{4-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}}{4}$ و منه $A=\frac{8}{4}$ أي $A=2\in\mathbb{N}$.

$B=\frac{3}{\sqrt{2}+1}-3\sqrt{2}=\frac{3-3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}+1}$ أي $B=\frac{3-3\sqrt{4}-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ و منه $B=\frac{3-6-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

أي $B=\frac{-3-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ و منه $B=\frac{-3\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}+1}$ ، إذن نجد $B=-3\in\mathbb{Z}$.

$C=\left(\sqrt{18}-4\right)\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}+1\right)=\left(3\sqrt{2}-4\right)\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}+1\right)$ لأن $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ و منه :

$C=3\sqrt{2}\times\frac{3}{4}\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\times\frac{3}{4}\sqrt{2}-4$ أي $C=\frac{18}{4}+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}-4$ أي $C=\frac{18-16}{4}$ و

منه نجد $C=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\in\mathbb{D}$.

$D=\dfrac{3\sqrt{2}+15}{7\sqrt{2}+35}$ و بضرب الكسر في المرافق $\left(7\sqrt{2}-35\right)$ نجد $D=\dfrac{\left(3\sqrt{2}+15\right)\left(7\sqrt{2}-35\right)}{\left(7\sqrt{2}+35\right)\left(7\sqrt{2}-35\right)}$ أي

$D=\dfrac{3\sqrt{2}\times7\sqrt{2}-35\times3\sqrt{2}+15\times7\sqrt{2}-15\times35}{\left(7\sqrt{2}\right)^2-35^2}$ و منه

$D=\dfrac{42-105\sqrt{2}+105\sqrt{2}-525}{98-1225}$ أي $D=\dfrac{483}{1127}\in\mathbb{Q}$

بما أن : π عدد أصم فإن $E=\dfrac{2\pi}{3.14}\notin\mathbb{Q}$ و منه : $E=\dfrac{2\pi}{3.14}\in\mathbb{R}$

$F=\dfrac{\left(\sqrt{2}-3\right)\left(\sqrt{2}+3\right)}{700}$ و بالنشر نجد $F=\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2-3^2}{700}$ أي $F=\dfrac{2-9}{700}$ أي

$F=-\dfrac{7}{700}=-\dfrac{1}{100}\in\mathbb{D}$.

$G=\dfrac{5}{3}+\dfrac{4}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{5}\right)$ أي $G=\dfrac{5}{3}+\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{5}$ و منه $G=\dfrac{5}{3}+\dfrac{4}{6}-\dfrac{12}{15}$ و بتوحيد المقامات نجد

$G=\dfrac{5\times2+4}{6}-\dfrac{12}{15}$ أي $G=\dfrac{14\times15-12\times6}{6\times15}$ و منه $G=\dfrac{138}{90}=\dfrac{23}{15}\in\mathbb{Q}$.

التمرين رقم 08 :

إختزل إلى أقصى حد ممكن الأعداد التالية مع ذكر أصغر مجموعة ينتمي إليها كل عدد :

$\left(a\in\mathbb{R}\text{ و }b\in\mathbb{R}\right)$ $A=\dfrac{\left(a+b\right)^2-\left(a-b\right)^2}{ab}$ ؛ $B=\dfrac{\sqrt{96}\times\sqrt{50}}{\sqrt{147}}$ ؛ $C=\dfrac{\sqrt{288}+\sqrt{162}}{\sqrt{147}}$

؛ $D=\sqrt{\dfrac{4^{80}+5\times8^{53}}{28\times2^{155}}}$ ؛ $L=\sqrt{\dfrac{8^4+4^{11}}{8^{10}+4^{10}}}$ ؛ $K=\dfrac{7\pi+14}{3\pi+6}$

حل مقترح :

$A=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{ab}=\frac{a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)}{ab}$ أي $A=\frac{4ab}{ab}$ و منه نجد

$A=4\in\mathbb{N}$.

$B=\frac{\sqrt{96}\times\sqrt{50}}{\sqrt{147}}=\frac{\sqrt{2^5\times3}\times\sqrt{2\times5^2}}{\sqrt{3\times7^2}}$ أي $B=\frac{2^2\times\sqrt{2\times3}\times5\sqrt{2}}{7\sqrt{3}}$ أي $B=\frac{20\sqrt{2\times3\times2}}{7\sqrt{3}}$ و

منه $B=\frac{40\sqrt{3}}{7\sqrt{3}}$ أي $B=\frac{40}{7}\in\mathbb{Q}$.

$C=\frac{\sqrt{288}+\sqrt{162}}{\sqrt{147}}=\frac{\sqrt{2^5\times3^2}+\sqrt{2\times3^4}}{\sqrt{3\times7^2}}$ أي $C=\frac{4\times3\sqrt{2}+9\sqrt{2}}{7\sqrt{3}}$ أي $C=\frac{21\sqrt{2}}{7\sqrt{3}}$ و منه

$C=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ أي $C=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ و منه $C=\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ أي $C=\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$ و منه

$C=\sqrt{6}\in\mathbb{R}$.

$D=\sqrt{\frac{4^{80}+5\times8^{53}}{28\times2^{155}}}=\sqrt{\frac{4^{80}+5\times(2\times4)^{53}}{28\times2^{155}}}$ أي $D=\sqrt{\frac{4^{80}+5\times2^{53}\times4^{53}}{28\times2^{155}}}$ أي

$D=\sqrt{\frac{2^{160}+5\times2^{53}\times2^{106}}{28\times2^{155}}}$ أي $D=\sqrt{\frac{2^{106}(2^{54}+5\times2^{53})}{28\times2^{155}}}$ أي $D=\sqrt{\frac{2^{54}+5\times2^{53}}{28\times2^{49}}}$ و منه

$D=\sqrt{\frac{2^{53}(2+5)}{28\times2^{49}}}$ أي $D=\sqrt{\frac{2^4\times7}{28}}$ أي $D=\sqrt{\frac{2^4\times7}{2^2\times7}}$ و منه $D=\sqrt{\frac{2^2\times2^2\times7}{2^2\times7}}$ أي

$D=\sqrt{2^2}$ و منه نجد $D=2\in\mathbb{N}$.

$L=\sqrt{\frac{8^4+4^{11}}{8^{10}+4^{10}}}=\sqrt{\frac{(2^3)^4+(2^2)^{11}}{(2^3)^{10}+(2^2)^{10}}}$ أي $L=\sqrt{\frac{2^{12}+2^{22}}{2^{30}+2^{20}}}$ أي $L=\sqrt{\frac{2^{12}(1+2^{10})}{2^{20}(1+2^{10})}}$ و منه

$L=\sqrt{\frac{2^{12}}{2^{20}}}$ أي $L=\sqrt{\frac{1}{2^8}}$ أي $L=\frac{1}{2^4}$ و منه نجد $L=\frac{1}{16}\in\mathbb{D}$. (لأن $16=2^4$)

$K=\frac{7\pi+14}{3\pi+6}=\frac{7(\pi+2)}{3(\pi+2)}$ أي $K=\frac{7}{3}\in\mathbb{Q}$.

التمرين رقم 09 :

حل المعادلات التالية ذات المجهول x ثم عين أصغر مجموعة ينتمي إليها ذلك الحل :

1/ $(x+1)^2=4$ 2/ $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=2$ 3/ $(2x-7)(\sqrt{2}x-\sqrt{8})=0$

4/ $(2x+5)^2=-9$ 5/ $(7x-1)(2x-5)+(2x-1)(7x-1)=0$

6/ $(3x-4)(2x-\pi)=(3x-4)(x+\pi)$

حل مقترح :

1/ $(x+1)^2=4$ أي $(x+1)^2=2^2$ و منه $x+1=2$ أو $x+1=-2$ و منه $x=1\in\mathbb{N}$ أو $x=-3\in\mathbb{Z}$.

2/ $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=2$ أي $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ و منه $x-\frac{3}{2}=\sqrt{2}$ أو $x-\frac{3}{2}=-\sqrt{2}$ و منه

$x=\frac{3}{2}+\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ أي $x=\frac{3}{2}+\sqrt{2}\in\mathbb{R}$ أو $x=\frac{3}{2}-\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ أي $x=\frac{3}{2}-\sqrt{2}\in\mathbb{R}$.

3/ $(2x-7)(\sqrt{2}x-\sqrt{8})=0$ و منه $2x-7=0$ أي $x=\frac{7}{2}\in\mathbb{D}$ أو $\sqrt{2}x-\sqrt{8}=0$ و منه

$x=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ أي $x=\frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{2}}$ و منه $x=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ أي $x=2\in\mathbb{N}$.

4/ $(2x+5)^2=-9$ نلاحظ أن الطرف الأيسر لهذه المعادلة موجب الإشارة بينما الطرف الأيمن سالب الإشارة

و منه فالمعادلة $(2x+5)^2=-9$ لا تقبل حلا في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

5/ $(7x-1)(2x-5)+(2x-1)(7x-1)=0$ و بالتحليل إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى نجد :

$(7x-1)\left[(2x-5)+(2x-1)\right]=0$ أي $(7x-1)(4x-6)=0$ و منه :

$7x-1=0$ أي $x=\frac{1}{7}\in\mathbb{Q}$ أو $4x-6=0$ أي $x=\frac{6}{4}$ أي $x=\frac{3}{2}\in\mathbb{D}$.

6/ $(3x-4)(2x-\pi)=(3x-4)(x+\pi)$ و منه $(3x-4)(2x-\pi)-(3x-4)(x+\pi)=0$

و بالتحليل إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى نجد : $(3x-4)\left[(2x-\pi)-(x+\pi)\right]=0$ أي

$(3x-4)(x-2\pi)=0$ و منه يكون : $3x-4=0$ أي $x=\frac{4}{3}\in\mathbb{Q}$ أو $x-2\pi=0$ أي

$x=2\pi\notin\mathbb{Q}$ (أصم) و منه $x=2\pi\in\mathbb{R}$.

التمرين رقم 10 :

عين الكتابة الكسرية للأعداد الناطقة التالية إنطلاقا من الكتابة العشرية الدورية :

$A=0.\underline{14}1414\ldots$ ، $B=34.\underline{21}2121\ldots$ ، $C=5.\underline{245}245245\ldots$

حل مقترح :

$A=0.\underline{14}1414\ldots$ و منه $A=0+0.\underline{14}1414\ldots$. نضع $x=0.\underline{14}1414\ldots$ فيصبح لدينا :

$A=0+x$.

نضرب المعادلة $x=0.\underline{14}1414\ldots$ في 10^2 (لأن عدد أرقام الدور هو 2) فنتحصل على :

$100x=14.1414\ldots$ أي $100x=14+0.1414\ldots$ و منه $100x=14+x$ لأن $x=0.1414\ldots$

$x = 14 + 100x$ معناه $100x - x = 14$ أي $99x = 14$ و منه نجد : $\boxed{x = \frac{14}{99}}$.

إذن : $A = 0 + \frac{14}{99}$ و عليه نتحصل على $\boxed{A = \frac{14}{99}}$.

$B = 34.\underline{21}2121...$ و منه $B = 34 + 0.\underline{21}2121...$. نضع $x = 0.\underline{21}2121...$ فيصبح لدينا :

$B = 34 + x$.

نضرب المعادلة $x = 0.\underline{21}2121...$ في 10^2 (لأن عدد أرقام الدور هو 2) فنتحصل على :

$100x = 21.\underline{21}2121...$ أي $100x = 21 + 0.\underline{21}2121...$ و منه $100x = 21 + x$ لأن

$x = 0.\underline{21}2121...$.

$100x = 21 + x$ معناه $100x - x = 21$ أي $99x = 21$ و منه نجد : $\boxed{x = \frac{21}{99}}$.

إذن : $B = 21 + \frac{21}{99}$ و عليه نتحصل على $B = \frac{34 \times 99 + 21}{99}$ أي $\boxed{B = \frac{3387}{99}}$.

$C = 5.\underline{245}245245...$ و منه $C = 5 + 0.\underline{245}245245...$. نضع $x = 0.\underline{245}245245...$ فيصبح

لدينا : $C = 5 + x$.

نضرب المعادلة $x = 0.\underline{245}245245...$ في 10^3 (لأن عدد أرقام الدور هو 3) فنتحصل على :

$1000x = 245.\underline{245}245...$ أي $1000x = 245 + 0.\underline{245}245...$ و منه $1000x = 245 + x$ لأن

$x = 0.\underline{245}245...$.

$1000x = 245 + x$ معناه $1000x - x = 245$ أي $999x = 245$ و منه نجد : $\boxed{x = \frac{245}{999}}$.

إذن : $C=5+\frac{245}{999}$ و عليه نتحصل على $C=\frac{5\times999+245}{999}$ أي $C=\frac{5240}{999}$.

التمرين رقم 11 : أكمل الفراغ بأحد الرمزين $\in$ أو $\notin$:

$-4\ldots\mathbb{N}$ ، $\frac{1}{2}\ldots\mathbb{N}$ ، $4.5\ldots\mathbb{Z}$ ، $\frac{1}{3}\ldots\mathbb{Q}$ ، $\frac{16}{4}\ldots\mathbb{N}$ ، $3\times10^2\ldots\mathbb{N}$ ، $\sqrt{2}\ldots\mathbb{R}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}\ldots\mathbb{Q}$

$\frac{\pi}{2}\ldots\mathbb{Q}$ ، $\sqrt{0.25}\ldots\mathbb{Q}$ ، $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}\ldots\mathbb{Q}$ ، $\frac{75}{15}\ldots\mathbb{N}$ ، $\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}\ldots\mathbb{Z}$

حل مقترح :

$-4\notin\mathbb{N}$ لأن -4 عدد سالب .

$\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$ لأن $\frac{1}{2}=0.5\notin\mathbb{N}$.

$4.5\notin\mathbb{Z}$ (العدد غير صحيح)

$\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}$ لأن العدد $\frac{1}{3}$ كسر يكتب من الشكل $\frac{p}{q}$ بحيث p عدد صحيح نسبي و q عدد صحيح نسبي $\neq 0$.

$\frac{16}{4}\in\mathbb{N}$ لأن $\frac{16}{4}=4\in\mathbb{N}$.

$3\times10^2\in\mathbb{N}$ لأن $3\times10^2=300\in\mathbb{N}$.

$\sqrt{2}\notin\mathbb{R}$ لأن جميع الأعداد المدروسة خلال السنة الأولى ثانوي هي أعداد حقيقية .

$\frac{\sqrt{3}}{2}\notin\mathbb{Q}$ لأن $\sqrt{3}$ عدد أصم ($\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$)

$\frac{\pi}{2}\notin\mathbb{Q}$ لأن π عدد أصم ($\pi\notin\mathbb{Q}$)

$\sqrt{0.25} \in \mathbb{Q}$ لأن $\sqrt{0.25} = 0.5 \in \mathbb{Q}$.

$\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}} \in \mathbb{Q}$ لأن $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}} = \dfrac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{2\times 3^2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{2}{3} \in \mathbb{Q}$

$\dfrac{75}{15} \in \mathbb{N}$ لأن $\dfrac{75}{15} = 5 \in \mathbb{N}$

$\sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} \in \mathbb{Z}$ لأنه بتوحيد المقامات نجد :

$$\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{2-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{-\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}-1}$$ أي :

$\sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = -1 \in \mathbb{Z}$.

التمرين رقم 12 :

لتكن الأعداد التالية : 2.503 ، 5×10^{-2} ، $0.\underline{3}...$ ، $\dfrac{1}{2000}$ ، $-\dfrac{7}{3\times 10^{-2}}$ ، $\sqrt{4\pi}$

هل الأعداد السابقة هي أعداد عشرية ؟

حل مقترح :

$2.503 \in \mathbb{D}$ لأن الفاصلة منتهية أو يمكن الإجابة كما يلي : $2.503 = \dfrac{2503}{1000} = \dfrac{2503}{10^3} \in \mathbb{D}$

$5\times 10^{-2} \in \mathbb{D}$ لأن $5\times 10^{-2} = \dfrac{5}{10^2} \in \mathbb{D}$.

$0.\underline{3}...$ هي كتابة عشرية دورية (الدور هو 3) و هي ذات فاصلة غير منتهية (أي أن الجزء العشري غير منته)

و منه يكون : $0.\underline{3}... \notin \mathbb{D}$.

من الواضح أن الكسر $\frac{1}{2000}$ غير قابل للإختزال ؛ نقوم بتحليل المقام إلى جداء عوامل أولية فنجد

$2000 = 2^4 \times 5^3$ أي أن تحليل المقام لا يشتمل على عوامل أولية تختلف عن 2 و تختلف عن 5 ؛ إذن العدد

$\frac{1}{2000}$ عشري .

$-\frac{700}{3} = -\frac{7\times 10^2}{3} = -\frac{7}{3\times 10^{-2}}$ ؛ من الواضح أن الكسر $-\frac{700}{3}$ غير قابل للإختزال ؛ نقوم بتحليل المقام

إلى جداء عوامل أولية فنجد $3 = 3^1$ و منه فالتحليل يشتمل على عدد أولي يختلف عن 2 و يختلف عن 5 فهو إذن

عدد غير عشري .

$\sqrt{4\pi} \notin \mathbb{D}$ لأن $\sqrt{4\pi} = \sqrt{4}\times\sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi} \notin \mathbb{D}$ (π عدد أصم)

التمرين رقم 13 :

1/ بسط ما يلي : $\sqrt{28}$ ، $\sqrt{32}$ ، $\sqrt{40}$ ، $\sqrt{63}$ ، $\sqrt{75}$ ، $\sqrt{243}$.

2/ بسط الكتابات التالية : $A = 2\sqrt{20} + 3\sqrt{50} - 10\sqrt{18}$ ؛ $B = \sqrt{12} + 2\sqrt{20} - 7\sqrt{27} - \sqrt{75}$

؛ $C = 3\sqrt{147} - 2\sqrt{144} + \sqrt{75}$ ؛ $D = \sqrt{\frac{7}{5}} \times \sqrt{\frac{343}{125}}$

حل مقترح :

1/ تبسيط ما يلي : $\sqrt{28}$ ، $\sqrt{32}$ ، $\sqrt{40}$ ، $\sqrt{75}$ ، $\sqrt{243}$.

نحلل العدد 28 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $28 = 2^2 \times 7$ و منه $\sqrt{28} = \sqrt{2^2\times 7} = 2\sqrt{7}$.

نحلل العدد 32 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $32 = 2^5$ و منه $\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

نحلل العدد 40 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $40=2^3\times5$ و منه

$\sqrt{40}=\sqrt{2^3\times5}=2\sqrt{2\times5}=2\sqrt{10}$

نحلل العدد 75 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $75=3\times5^2$ و منه $\sqrt{75}=\sqrt{3\times5^2}=5\sqrt{3}$

نحلل العدد 243 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $243=3^5$ و منه $\sqrt{243}=\sqrt{3^5}=3^2\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

2/ تبسيط الكتابات التالية :

$A=2\sqrt{20}+3\sqrt{50}-10\sqrt{18}$: بالتحليل إلى جداء عوامل أولية نتحصل على :

$20=2^2\times5$ و $50=2\times5^2$ و $18=2\times3^2$ و منه :

$A=2\sqrt{20}+3\sqrt{50}-10\sqrt{18}=2\sqrt{2^2\times5}+3\sqrt{2\times5^2}-10\sqrt{2\times3^2}$ أي :

$A=4\sqrt{5}+15\sqrt{2}-30\sqrt{2}$ و منه $A=4\sqrt{5}-15\sqrt{2}$.

$B=\sqrt{12}+2\sqrt{20}-7\sqrt{27}-\sqrt{75}$: بالتحليل إلى جداء عوامل أولية نتحصل على :

$12=2^2\times3$ و $20=2^2\times5$ و $27=3^3$ و $75=3\times5^2$ و منه :

$B=\sqrt{12}+2\sqrt{20}-7\sqrt{27}-\sqrt{75}=\sqrt{2^2\times3}+2\sqrt{2^2\times5}-7\sqrt{3^3}-\sqrt{3\times5^2}$ أي :

$B=2\sqrt{3}+4\sqrt{5}-21\sqrt{3}-5\sqrt{3}$ و منه $B=4\sqrt{5}-24\sqrt{3}$.

$C=3\sqrt{147}-2\sqrt{144}+\sqrt{75}$: بالتحليل إلى جداء عوامل أولية نتحصل على :

$147=3\times7^2$ و $144=2^4\times3^2$ و $75=3\times5^2$ و منه :

$C=3\sqrt{147}-2\sqrt{144}+\sqrt{75}=3\sqrt{3\times7^2}-2\sqrt{2^4\times3^2}+\sqrt{3\times5^2}$ أي :

$C=21\sqrt{3}-2\times2^2\times3+5\sqrt{3}$ و منه $C=26\sqrt{3}-24$.

بالتحليل إلى جداء عوامل أولية للعددين 343 و 125 نحصل على : $343=7^3$ و $125=5^3$ إذن :

$D=\sqrt{\frac{7}{5}}\times\sqrt{\frac{343}{125}}=\sqrt{\frac{7}{5}}\times\sqrt{\frac{7^3}{5^3}}$ أي $D=\sqrt{\frac{7}{5}}\times\frac{7}{5}\times\sqrt{\frac{7}{5}}$ و منه $D=\sqrt{\frac{7^2}{5^2}}\times\frac{7}{5}$ أي

$D=\frac{7}{5}\times\frac{7}{5}$ و منه نجد $D=\frac{49}{25}$.

التمرين رقم 14 :

أنشر ثم إختزل ما يلي : $\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ ، $\left(6-\sqrt{2}\right)\left(6+\sqrt{2}\right)$ ، $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$

حل مقترح :

$\left(2+\sqrt{3}\right)^2=2^2+2\times2\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2$ أي $\left(2+\sqrt{3}\right)^2=4+4\sqrt{3}+3$ و منه نتحصل على :

$\left(2+\sqrt{3}\right)^2=7+4\sqrt{3}$.

$\left(6-\sqrt{2}\right)\left(6+\sqrt{2}\right)=6^2-\sqrt{2}^2$ أي $\left(6-\sqrt{2}\right)\left(6+\sqrt{2}\right)=36-2$ و منه نتحصل على :

$\left(6-\sqrt{2}\right)\left(6+\sqrt{2}\right)=34$.

$\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=2\times1+2\times\sqrt{2}+\sqrt{3}\times1+\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ أي

$\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=\sqrt{6}+\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2$.

التمرين رقم 15 :

يعطى العدد $A=\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

1/ أحسب العدد A^2 .

2/ إستنتج قيمة مبسطة لـ A .

حل مقترح :

1/ لدينا $A=\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ و منه يكون : $A^2=\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2$ و باستعمال

النشر بالمطابقات الشهيرة نجد $A^2=\sqrt{7+4\sqrt{3}}^2-2\sqrt{7+4\sqrt{3}}\times\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}^2$ أي

$A^2=7+4\sqrt{3}-2\sqrt{\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)}+7-4\sqrt{3}$ و منه نجد :

$A^2=14-2\sqrt{\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)}$ أي $A^2=14-2\sqrt{7^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}$ أي

$A^2=14-2\sqrt{49-48}$ و منه $A^2=14-2\sqrt{1}$ أي $A^2=14-2$ ، إذن : $A^2=12$.

2/ إستنتاج قيمة مبسطة لـ A : من السؤال 1/ نعلم أن $A^2=12$ و بإدخال الجذر على الطرفين نحصل على :

$\sqrt{A^2}=\sqrt{12}$ أي $A=\sqrt{12}$ ، لكن $12=2^2\times3$ ، إذن $A=\sqrt{2^2\times3}$ و منه $A=3\sqrt{2}$.

التمرين رقم 16 :

أجب مع تعليل الإجابة :

1/ هل العدد $X=\frac{330}{396}$ عشري ؟ (لا تستعمل الآلة الحاسبة)

2/ هل العدد $Y=\frac{266}{560}$ عشري ؟ (لا تستعمل الآلة الحاسبة)

حل مقترح :

1/ العدد $X=\frac{330}{396}$ غير عشري :

أولا نكتب العدد $X=\frac{330}{396}$ على شكل كسر غير قابل للإختزال ؛ من أجل ذلك نعين $PGCD(330;396)$:

نحلل العددين 330 و 396 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $330=2\times3\times5\times11$ و $396=2^2\times3^2\times11$

إذن : $PGCD(330;396)=2\times3\times11=66$ و منه الشكل غير قابل للإختزال للكسر $\frac{330}{396}$ هو :

$X=\frac{330}{396}=\frac{330/66}{396/66}=\frac{5}{6}$ ؛ ثانيا نقوم بتحليل مقام الكسر الناتج $\frac{5}{6}$ إلى جداء عوامل أولية فنجد $6=2\times3$

أي أنه يشتمل على العدد الأولي 3 الذي يختلف عن 2 و يختلف عن 5 و منه نستنتج أن العدد X هو عدد غير عشري .

2/ العدد $Y=\frac{266}{560}$ عشري :

أولا نكتب العدد $Y=\frac{266}{560}$ على شكل كسر غير قابل للإختزال ؛ من أجل ذلك نعين $PGCD(266;560)$:

نحلل العددين 266 و 396 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $266=2\times7\times19$ و $560=2^4\times5\times7$

إذن : $PGCD(266;560)=2\times7=14$ و منه الشكل غير قابل للإختزال للكسر $\frac{266}{560}$ هو :

$Y=\frac{266}{560}=\frac{266/14}{560/14}=\frac{19}{40}$ ؛ ثانيا نقوم بتحليل مقام الكسر الناتج $\frac{19}{40}$ إلى جداء عوامل أولية فنجد :

$40=2^3\times5$ أي أنه لا يشتمل على أي عدد أولي يختلف عن 2 و يختلف عن 5 و منه نستنتج أن العدد Y هو عدد عشري .

التمرين رقم 17 :

1/ عين أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد A بحيث $A=\left(2+\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{2}$.

2/ عين أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد B بحيث $B=\dfrac{-3\sqrt{2^3-4}}{6}$.

3/ عين أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد C بحيث $C=\dfrac{2\pi}{5}$.

4/ عين أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد D بحيث $D=\sqrt{1-\dfrac{7}{25}}\times\sqrt{1+\dfrac{7}{25}}$.

حل مقترح :

1/ تعيين أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد A بحيث $A=\left(2+\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{2}$:

$A=\left(2+\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{2}=2^2+2\times2\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2-4\sqrt{2}$ أي $A=4+4\sqrt{2}+2-4\sqrt{2}$ و منه

تحصل على $A=6$. إذن أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد A هي $\mathbb{N}$.

2/ تعيين أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد B بحيث $B=\dfrac{-3\sqrt{2^3-4}}{6}$:

$B=\dfrac{-3\sqrt{2^3-4}}{6}=\dfrac{-3\sqrt{8-4}}{6}$ أي $B=\dfrac{-3\sqrt{4}}{6}$ أي $B=\dfrac{-3\times2}{6}$ و منه تحصل على $B=-1$.

إذن أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد B هي $\mathbb{Z}$.

3/ تعيين أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد C بحيث $C=\dfrac{2\pi}{5}$:

نعلم أن π عدد أصم (غير ناطق) ومنه يكون : $C=\dfrac{2\pi}{5}\in\mathbb{R}$ أي أن أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد C هي

مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

4/ تعيين أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد D بحيث $D=\sqrt{1-\frac{7}{25}}\times\sqrt{1+\frac{7}{25}}$:

$D=\sqrt{1-\frac{7}{25}}\times\sqrt{1+\frac{7}{25}}=\sqrt{\left(1-\frac{7}{25}\right)\left(1+\frac{7}{25}\right)}$ و منه نجد $D=\sqrt{1^2-\left(\frac{7}{25}\right)^2}$ (متطابقة ش)

و منه ينتج : $D=\sqrt{1-\frac{49}{625}}$ أي $D=\sqrt{\frac{625-49}{625}}$ أي $D=\frac{\sqrt{576}}{\sqrt{625}}$ و منه $D=\frac{24}{25}$.

باستعمال الآلة الحاسبة نتحصل على $D=0.96$ أي أن أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد D هي مجموعة الأعداد العشرية $\mathbb{D}$ (أو باستعمال الخاصية المميزة لعدد عشري) .

التمرين رقم 18 :

إختزل العددين : $X=\frac{108^5\times1125^{-2}}{(-2)^4\times\left(-5^3\right)^{-4}}$ و $Y=\frac{\sqrt{225}\times3\sqrt{12}}{\sqrt{24}\times\sqrt{135}}$

حل مقترح :

نحلل العددين 108 و 1125 إلى جداء عوامل أولية : $108=2^2\times3^3$ و $1125=3^2\times5^3$ إذن :

$X=\frac{\left(2^2\times3^3\right)^5\times\left(3^2\times5^3\right)^{-2}}{(-2)^4\times\left(-5^3\right)^{-4}}=\frac{108^5\times1125^{-2}}{(-2)^4\times\left(-5^3\right)^{-4}}$ أي $X=\frac{2^{10}\times3^{15}\times3^{-4}\times5^{-6}}{(-2)^4\times\left(-5^3\right)^{-4}}$ و منه

$X=\frac{2^{10}\times3^{11}\times5^{-6}\times\left(-5^3\right)^4}{2^4}$ أي $X=\frac{2^{10}\times3^{11}\times5^{-6}\times5^{12}}{2^4}$ لأن 4 عدد زوجي ؛ و منه نجد

$X=2^6\times3^{11}\times5^6$ أي $X=(2\times5)^6\times3^{11}$ أي $X=10^6\times3^{11}$.

نحلل الأعداد 225 ، 12 ، 24 و 135 إلى جداء عوامل أولية :

$225=3^2\times5^2$ و $12=2^2\times3$ و $24=2^3\times3$ و $135=3^3\times5$ إذن :

$Y=\frac{\sqrt{3^2\times5^2}\times3\sqrt{2^2\times3}}{\sqrt{2^3\times3}\times\sqrt{3^3\times5}}=\frac{\sqrt{225}\times3\sqrt{12}}{\sqrt{24}\times\sqrt{135}}$ أي $Y=\frac{3\times5\times3\times2\sqrt{3}}{2\sqrt{2\times3}\times3\sqrt{3\times5}}$ و منه :

$Y=\frac{90\sqrt{3}}{6\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}}$ أي $Y=\frac{15}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}}$ أي $Y=\frac{\sqrt{15}\times\sqrt{15}}{\sqrt{2}\times\sqrt{15}}$ و منه نجد

$Y=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}$ أي $Y=\sqrt{\frac{15}{2}}$.

التمرين رقم 19 : عين طبيعة كل من الأعداد التالية :

$A=\frac{4\times75\times13}{26\times2^5\times5^3}$ ، $B=\frac{\sqrt{75}+\sqrt{49}}{2}$ ، $C=\sqrt{6^2\times8}-\sqrt{288}$

حل مقترح :

نحلل الأعداد 75 و 26 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $4=2^2$ و $75=3\times5^2$ و $26=2\times13$.

إذن : $\frac{3}{80}=\frac{3}{2^4\times5}=\frac{\cancel{2}^2\times3\times\cancel{5}^2\times\cancel{13}}{\cancel{2}\times\cancel{13}\times2^5\times\cancel{5}^3}=\frac{4\times75\times13}{26\times2^5\times5^3}=A$ ، هل العدد $\frac{3}{80}$ عشري ؟

العدد $\frac{3}{80}$ هو كسر غير قابل للإختزال ، نحلل المقام 80 إلى جداء عوامل أولية فنتحصل على :

$80=2^4\times5$ أي أن تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية لا يشتمل على عدد أولي يختلف عن 2 و يختلف عن

5 إذن : $\frac{3}{80}\in\mathbb{D}$ ، و منه نستنتج أن : $A\in\mathbb{D}$ (عدد عشري)

نحلل العددين 75 و 49 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $75=3\times5^2$ و $49=7^2$ إذن :

$B=\frac{\sqrt{3\times5^2}+\sqrt{7^2}}{2}=\frac{\sqrt{75}+\sqrt{49}}{2}$ و منه $B=\frac{5\sqrt{3}+7}{2}$ و منه B عدد أصم ($B\notin\mathbb{Q}$ أي

$B\in\mathbb{R}$) .

لدينا $6^2 \times 8 = 288$ و منه $C = \sqrt{6^2 \times 8} - \sqrt{288} = \sqrt{288} - \sqrt{288} = 0$ ، إذن أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد C هي مجموعة الأعداد الطبيعية أي $C \in \mathbb{N}$.

التمرين رقم 20 : ليكن العدد : $A = \sqrt{\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}}$

1/ أنشر $\left(2-\sqrt{3}\right)^2$ و $\left(2+\sqrt{3}\right)^2$.

2/ إستنتج أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد A .

حل مقترح :

1/ نشر $\left(2-\sqrt{3}\right)^2$ و $\left(2+\sqrt{3}\right)^2$:

$\left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 2^2 - 2\times 2\times\sqrt{3} + \sqrt{3}^2$ و منه $\left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 7-4\sqrt{3}$.

$\left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 2^2 + 2\times 2\times\sqrt{3} + \sqrt{3}^2$ و منه $\left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 7+4\sqrt{3}$.

2/ إستنتاج أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد A :

لدينا $A = \sqrt{\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}}$ و من السؤال 1/ نعلم أن $7-4\sqrt{3} = \left(2-\sqrt{3}\right)^2$ و $7+4\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^2$ إذن يكون $A = \sqrt{\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}} = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right) + \left(2-\sqrt{3}\right)}$ ، و منه $A = \sqrt{4} = 2$. إذن أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد A هي $\mathbb{N}$.

التمرين رقم 21 : أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل :

1/ العدد $\dfrac{\pi}{3.14}$ طبيعي .

2/ العدد $\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ صحيح نسبي .

3/ $\sqrt{3}=1+\frac{2}{1+\sqrt{3}}$

4/ $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

حل مقترح :

1/ خطأ لأن $\pi\neq 3.14$ (π عدد أصم) و منه فالعدد $\frac{\pi}{3.14}$ ليس طبيعيا .

2/ خطأ لأن $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ أي

$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$.

3/ صحيح لأن $1+\frac{2}{1+\sqrt{3}}=1+\frac{2\times\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}=1+\frac{2-2\sqrt{3}}{1^2-\sqrt{3}^2}$ أي

$1+\frac{2}{1+\sqrt{3}}=1+\frac{2-2\sqrt{3}}{-2}$ و منه $1+\frac{2}{1+\sqrt{3}}=1+\frac{2\left(1-\sqrt{3}\right)}{-2}$ أي $1+\frac{2}{1+\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}-1$ و

منه نجد $1+\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

4/ صحيح لأن $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$ أي $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}$ و منه

$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}$ أي $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

التمرين رقم 22 : أكتب على أبسط شكل ممكن العبارات التالية :

$$A=49^{-4}\times 35^{8}\times 25^{-3} \quad ، \quad B=\frac{(-2)^5\times(-5)^8\times(-9)^3}{(-6)^4\times(30)^5}\times\frac{(-18)^7\times(-2)^4\times(-50)^3}{(-25)^6\times(-4)^5\times(-27)^2}$$

$$C=\left(\frac{5}{7}\right)^{-4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{8}\times(3\times 5)^{6} \quad و \quad D=\frac{15^{-4}\times 18^{7}}{25^{-3}\times 16^{-3}}$$

حل مقترح :

نحلل إلى جداء عوامل أولية الأعداد 49 ، 35 و 25 فنجد $49=7^2$ و $35=5\times 7$ و $25=5^2$.

و منه $A=49^{-4}\times 35^{8}\times 25^{-3}=\left(7^2\right)^{-4}\times(5\times 7)^{8}\times\left(5^2\right)^{-3}$ أي $A=7^{-8}\times 5^{8}\times 7^{8}\times 5^{-6}$ و منه

$\boxed{A=5^2=25}$.

$$B=\frac{(-2)^5\times(-5)^8\times(-9)^3}{(-6)^4\times(30)^5}\times\frac{(-18)^7\times(-2)^4\times(-50)^3}{(-25)^6\times(-4)^5\times(-27)^2}$$ و منه نجد

$$B=\frac{-2^5\times 5^8\times -9^3}{6^4\times 30^5}\times\frac{-18^7\times 2^4\times\left(-50^3\right)}{25^6\times\left(-4^5\right)\times 27^2}$$ و بالتحليل إلى جداء عوامل أولية نتحصل على :

$$B=\frac{-2^5\times 5^8\times\left(-\left(3^2\right)^3\right)}{(2\times 3)^4\times(2\times 3\times 5)^5}\times\frac{-\left(2\times 3^2\right)^7\times 2^4\times\left(-\left(2\times 5^2\right)^3\right)}{\left(5^2\right)^6\times\left(-\left(2^2\right)^5\right)\times\left(3^3\right)^2}$$ أي

$$B=\frac{2^5\times 5^8\times 3^6}{2^4\times 3^4\times 2^5\times 3^5\times 5^5}\times\frac{2^7\times 3^{14}\times 2^4\times 2^3\times 5^6}{-5^{12}\times 2^{10}\times 3^6}$$ و منه $$B=-\frac{5^3}{2^4\times 3^3}\times\frac{2^4\times 3^8}{5^6}$$ أي

$B=-\frac{3^5}{5^3}$ و منه نجد $\boxed{B=-\frac{243}{125}}$.

$$C=\left(\frac{5}{7}\right)^{-4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{8}\times(3\times 5)^{6}=\frac{5^{-4}}{7^{-4}}\times\frac{3^8}{4^8}\times 3^6\times 5^6$$ أي $$C=7^4\times\frac{3^{14}}{4^8}\times 5^2$$ و منه

. $C=4^{-8}\times3^{14}\times5^{2}\times7^{4}$

$D=\frac{15^{-4}\times18^{7}}{25^{-3}\times16^{-3}}=\frac{(3\times5)^{-4}\times(2\times3^{2})^{7}}{(5^{2})^{-3}\times(2^{4})^{-3}}$ أي $D=\frac{3^{-4}\times5^{-4}\times2^{7}\times3^{14}}{5^{-6}\times2^{-12}}$ و منه نجد

. $D=2^{19}\times3^{10}\times5^{2}$

التمرين رقم 23 :

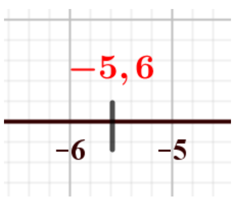
أنقل ثم أكمل الجدول الآتي :

الكتابة العشرية	الكتابة العلمية	رتبة مقدار
$0,00452$		
	$2,011\times10^{3}$	
$-80,25$		
	$-5,6\times10^{3}$	
4300000		

حل مقترح :

الكتابة العشرية	الكتابة العلمية	رتبة مقدار
$0,00452$	$4,524\times10^{-3}$	5×10^{-3}
2011	$2,011\times10^{3}$	2×10^{3}
$-80,25$	$-8,025\times10$	-8×10
-5600	$-5,6\times10^{3}$	-6×10^{3}
4300000	$4,3\times10^{6}$	4×10^{6}

ملاحظة : بالنسبة لرتبة مقدار العدد -5600 و بعد كتابته على الشكل العلمي وجدنا : $-5,6\times10^{3}$ و لإيجاد رتبة مقداره نعيين أقرب عدد صحيح للعدد $-5,6$ فنجد -6 (و ليس -5)



التمرين رقم 24 :

1) A ، B و C أعداد حقيقية بحيث :

$$A=\frac{6\sqrt{288}\times\sqrt{75}}{\sqrt{90}\times\sqrt{20}} \quad ; \quad B=\frac{(-3)^2\times 9^6\times 75^2}{3^8\times 5^4} \quad ; \quad C=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-1}$$

/1 أكتب كلا من A ، B و C على أبسط شكل ممكن .

/2 بين أن العدد $7C$ طبيعي .

حل مقترح :

/1 نحلل الأعداد 288 و 75 و 20 و 90 إلى جداء عوامل أولية فنتحصل على :

$$288=2^5\times 3^2 \quad ; \quad 75=3\times 5^2 \quad ; \quad 20=2^2\times 5 \quad ; \quad 90=2\times 3^2\times 5$$

و منه نجد : $A=\frac{6\sqrt{288}\times\sqrt{75}}{\sqrt{90}\times\sqrt{20}}=\frac{6\sqrt{2^5\times 3^2}\times\sqrt{3\times 5^2}}{\sqrt{2\times 3^2\times 5}\times\sqrt{2^2\times 5}}$ أي :

$A=\frac{6\times 3\times 4\sqrt{2}\times 5\sqrt{3}}{3\sqrt{2\times 5}\times 2\sqrt{5}}$ أي $A=\frac{6\times 3\times 4\sqrt{2}\times 5\sqrt{3}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}$ أي $A=\frac{6\times 3\times 4\times 5\sqrt{3}}{3\times 5\times 2}$ و منه

$A=12\sqrt{3}$.

نحلل الأعداد 9 و 75 إلى جداء عوامل أولية فنتحصل على :

$9=3^2$ ؛ $75=3\times 5^2$.

و منه نجد : $\frac{3^2\times(3^2)^6\times(3\times 5^2)^2}{3^8\times 5^4}=B=\frac{(-3)^2\times 9^6\times 75^2}{3^8\times 5^4}$ أي $B=\frac{3^2\times 3^{12}\times 3^2\times 5^4}{3^8\times 5^4}$ أي

$B=\frac{3^{16}}{3^8}$ و منه $B=3^{16-8}=3^8$ أي $B=6561$.

نوحد المقامات بين الكسور فنتحصل على : $C=\dfrac{\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{6}}{\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{2}-1}=\dfrac{\dfrac{3\times3}{2\times3}-\dfrac{2\times2}{3\times2}+\dfrac{1}{6}}{\dfrac{2\times2}{3\times2}+\dfrac{3\times3}{2\times3}-\dfrac{1\times6}{1\times6}}$ أي :

$C=\dfrac{\dfrac{9-4+1}{6}}{\dfrac{4+9-6}{6}}$ أي $C=\dfrac{\dfrac{6}{6}}{\dfrac{7}{6}}$ و منه $C=\dfrac{6}{6}\times\dfrac{6}{7}$ إذن نجد : $C=\dfrac{6}{7}$ و هو كسر غير قابل للإختزال .

2/ نبين أن العدد $7C$ طبيعي :

نعلم بعد التبسيط أن : $C=\dfrac{6}{7}$ و منه يكون $7C=\cancel{7}\times\dfrac{6}{\cancel{7}}$ أي : $7C=6$ طبيعي .

التمرين رقم 25 :

ليكن العددان الطبيعيان a و b بحيث :

$$a=\frac{4^2\times7^2\times112\times\left(2^3\right)^2}{2^3} \qquad ; \qquad b=\frac{\left(10^{-2}\right)^2\times10^7\times5^{-3}\times(1,2)^2}{10^{-4}\times8}$$

1/ بسط كلا من a و b .

2/ عين القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

3/ أوجد الكتابة العلمية ثم رتبة مقدار للعددين a و b .

حل مقترح :

1/ تبسيط العددين a و b :

$a=\dfrac{4^2\times7^2\times112\times\left(2^3\right)^2}{2^3}$ و منه نجد $a=\dfrac{4^2\times7^2\times112\times2^3\times2^3}{2^3}$ أي $a=4^2\times7^2\times112\times2^3$

و منه بتحليل العددين 4 و 112 إلى جداء عوامل أولية نجد : $4=2^2$ و $112=2^4\times7$ و منه يكون :

$a=\left(2^2\right)^2\times7^2\times2^4\times7\times2^3$ أي $a=2^{4+4+3}\times7^{2+1}$ أي $a=2^{11}\times7^3$.

$b=\dfrac{\left(10^{-2}\right)^2\times10^7\times5^{-3}\times\left(1,2\right)^2}{10^{-4}\times8}$ و منه نجد $b=\dfrac{10^{-4}\times10^7\times5^{-3}\times\left(12\times10^{-1}\right)^2}{10^{-4}\times8}$ أي

$b=\dfrac{10^3\times5^{-3}\times10^{-2}\times12^2}{10^{-4}\times8}$ أي $b=\dfrac{10^5\times5^{-3}\times12^2}{8}$ و منه بتحليل الأعداد 10 ، 12 و 8 إلى جداء عوامل أولية نجد : $10=2\times5$ و $12=2^2\times3$ و $8=2^3$.

إذن : $b=\dfrac{\left(2\times5\right)^5\times5^{-3}\times\left(2^2\times3\right)^2}{2^3}$ أي $b=\dfrac{2^5\times5^5\times5^{-3}\times2^4\times3^2}{2^3}$ أي $b=2^6\times3^2\times5^2$.

2/ تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b :

$PGCD(a;b)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين a و b مأخوذة مرة واحدة و بأصغر أس

و منه نجد : $PGCD(a;b)=2^6$ أي $PGCD(a;b)=64$.

3/ إيجاد الكتابة العلمية ثم رتبة مقدار للعددين a و b :

$\begin{cases}a=702464\\b=14400\end{cases}$ و منه العدد a يكتب على الشكل العلمي كما يلي :

$7,02464\times10^5$ و بالتالي رتبة مقدار العدد a هي : 7×10^5 لأن أقرب عدد صحيح إلى $7,02464$ هو 7 .

و العدد b يكتب على الشكل العلمي كما يلي :

$1,44\times10^4$ و بالتالي رتبة مقدار العدد b هي : 1×10^4 أي 10^4 لأن أقرب عدد صحيح إلى $1,44$ هو 1 .

التمرين رقم 26 :

1/ تحقق من أن : $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2$ و $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$ هما عددان ناطقان .

2/ a عدد طبيعي . بين أن : $\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$ و $\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$ هما عددان ناطقان .

حل مقترح :

1/ التحقق من أن : $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2$ و $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$ هما عددان ناطقان .

بالنشر ثم التبسيط نجد : $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2=\sqrt{\frac{3}{4}}^2-2\sqrt{\frac{3}{4}}\times\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{\frac{4}{3}}^2$ أي

$\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2=\frac{3}{4}-2\sqrt{\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}}+\frac{4}{3}$ أي $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2=\frac{3}{4}-2\sqrt{1}+\frac{4}{3}$ أي

$\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2=\frac{3}{4}-2+\frac{4}{3}$ و بتوحيد المقامات (المقام المشترك هو 12) نجد :

$\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2=\frac{3\times3}{4\times3}-\frac{2\times12}{12}+\frac{4\times4}{3\times4}$ أي $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2=\frac{9-24+16}{12}$ و منه نجد

$$\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2=\frac{1}{12}\in\mathbb{Q}$$

بالنشر ثم التبسيط نجد : $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2=\sqrt{\frac{5}{2}}^2-2\sqrt{\frac{5}{2}}\times\sqrt{\frac{2}{5}}+\sqrt{\frac{2}{5}}^2$ أي

$\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2=\frac{5}{2}-2\sqrt{\frac{5}{2}\times\frac{2}{5}}+\frac{2}{5}$ أي $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2=\frac{5}{2}-2\sqrt{1}+\frac{2}{5}$ أي

$\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2=\frac{5}{2}-2+\frac{2}{5}$ و بتوحيد المقامات (المقام المشترك هو 10) نجد :

$\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2=\frac{5\times5}{2\times5}-\frac{2\times10}{10}+\frac{2\times2}{5\times2}$ أي $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2=\frac{25-20+4}{10}$ و منه نجد

$$\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2=\frac{9}{10}\in\mathbb{Q}$$

2/ a عدد طبيعي . نبين أن : $\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$ و $\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$ هما عددان ناطقان .

بالنشر ثم التبسيط نجد : $\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2=\sqrt{a}^2-2\sqrt{a}\times\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{\frac{1}{a}}^2$ أي

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2=a-2\sqrt{a\times\frac{1}{a}}+\frac{1}{a}$ أي $\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2=a-2\sqrt{1}+\frac{1}{a}$ أي

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2=a-2+\frac{1}{a}$ و بتوحيد المقامات (المقام المشترك هو a) نجد :

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2=\frac{a\times a}{a}-\frac{2\times a}{a}+\frac{1}{a}$ أي $\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2=\frac{a^2-2a+1}{a}$ و منه نجد

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2=\frac{(a-1)^2}{a}$ لأن $a^2-2a+1=(a-1)^2$ و منه فالعدد $\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$ ناطق .

بالنشر ثم التبسيط نجد : $\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2=\sqrt{a}^2+2\sqrt{a}\times\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{\frac{1}{a}}^2$ أي

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2=a+2\sqrt{a\times\frac{1}{a}}+\frac{1}{a}$ أي $\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2=a+2\sqrt{1}+\frac{1}{a}$ أي

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2=a+2+\frac{1}{a}$ و بتوحيد المقامات (المقام المشترك هو a) نجد :

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2=\frac{a\times a}{a}+\frac{2\times a}{a}+\frac{1}{a}$ أي $\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2=\frac{a^2+2a+1}{a}$ و منه نجد

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2=\frac{(a+1)^2}{a}$ لأن $a^2+2a+1=(a+1)^2$ و منه فالعدد $\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$ ناطق .

التمرين رقم 27 :

أنقل ثم أتمم الجدول التالي :

رتبة مقدار العدد	الكتابة العلمية	المدور إلى 10^{-3}	المدور إلى 10^{-1}	العدد
				$87,4741$
				$0,0295$
				$7,8987$
				$0,0003$
				$-0,0003$
				537×10^6

حل مقترح :

رتبة مقدار العدد	الكتابة العلمية	المدور إلى 10^{-3}	المدور إلى 10^{-1}	العدد
9×10	$8,74741\times10$	$87,474$	$87,5$	$87,4741$
3×10^{-2}	$2,95\times10^{-2}$	$0,030$	$0,0$	$0,0295$

8×10^{0}	$7,8987\times10^{0}$	$7,899$	$7,9$	$7,8987$
3×10^{-4}	3×10^{-4}	$0,000$	$0,0$	$0,0003$
-4×10^{-4}	$-3,7\times10^{-4}$	$-0,000$	$-0,0$	$-0,00037$
5×10^{8}	$5,37\times10^{8}$	$537000000,000$	$537000000,0$	537×10^{6}

التمرين رقم 28 :

بسط كل عدد من الأعداد التالية ثم حدد أصغر مجموعة ينتمي إليها ذلك العدد :

$$a=\frac{\pi^2\times(3,14)}{\pi\times(3,14)^2} \quad ، \quad b=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}} \quad ، \quad c=\frac{2}{\sqrt{2}-1}-2\sqrt{2} \quad ، \quad d=\frac{1001}{140}$$

$$e=\frac{(-12)^{16}\times(75)^{-4}\times(-4)^{-9}}{\left[(25)^{-2}\right]^4\times(10)^4\times(18)^6}$$

حل مقترح :

$a=\dfrac{\pi^2\times(3,14)}{\pi\times(3,14)^2}=\dfrac{\pi}{3,14}$ و هذا هو أبسط شكل ممكن للعدد a ؛ إذن : a عدد أصم ($\notin\mathbb{Q}$) و منه

تكون أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد a هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

حذار : $\pi\neq3,14$

نوحد مقامات الكسور (المقام المشترك هو 10) فنجد : $b=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}=\dfrac{\frac{1\times5}{2\times5}+\frac{1\times2}{5\times2}}{\frac{1\times5}{2\times5}-\frac{1\times2}{5\times2}}$ و منه :

$b=\dfrac{\frac{5+2}{10}}{\frac{5-2}{10}}$ أي $b=\dfrac{\frac{7}{10}}{\frac{3}{10}}$ و منه $b=\dfrac{7}{10}\times\dfrac{10}{3}$ أي $b=\dfrac{7}{3}$ و هو كسر غير قابل للإختزال .

باستعمال الآلة الحاسبة نجد : $b = 2,3333333...$ أي أن جزأه العشري غير منته و بالتالي فهو عدد غير عشري ؛

إذن أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد b هي مجموعة الأعداد الناطقة أي $b \in \mathbb{Q}$.

ملاحظة : للتحقق أن العدد $\frac{7}{3}$ غير عشري دون إستعمال الآلة الحاسبة يمكن أن نستعمل **الخاصية المميزة** :

الكسر $\frac{7}{3}$ غير قابل للإختزال ؛ و من جهة أخرى تحليل مقامه إلى جداء عوامل أولية يكون كما يلي : $3 = 3^1$

نلاحظ أن تحليل المقام يشتمل على عدد أولي و هو 3 يختلف عن 2 و يختلف عن 5 ، إذن $\frac{7}{3}$ غير عشري .

نوحد المقامات فنجد : $c = \frac{2}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2} = \frac{2-2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}-1}$ أي

$c = \frac{2-2\sqrt{2}\times\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ و منه $c = \frac{2-2\times 2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ أي $c = \frac{-2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ و منه نجد

$c = \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}-1}$ أي : $c = 2$ و منه

أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد c هي مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

أولا نكتب العدد d على شكل كسر غير قابل للإختزال : من أجل ذلك نحلل كلا من البسط و المقام إلى جداء

عوامل أولية فنتحصل على : $1001 = 7\times 11\times 13$ و $140 = 2^2\times 5\times 7$ و منه يصبح :

$d = \frac{1001}{140} = \frac{7\times 11\times 13}{2^2\times 5\times 7}$ و باختزال كل العوامل الأولية المشتركة نحصل على : $d = \frac{11\times 13}{2^2\times 5}$

أي : $d = \frac{143}{20}$ و هو كسر غير قابل للإختزال .

نحقق هل العدد d عشريا أم غير عشري و ذلك باستعمال **الخاصية المميزة** :

تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية فنجد : $20=2^2\times 5$ ، نلاحظ أن تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية لا يشتمل على أي عدد أولي يختلف عن 2 و يختلف عن 5 ، إذن : $\frac{143}{20}$ عدد عشري و منه تكون أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد d هي مجموعة الأعداد العشرية $\mathbb{D}$.

ملاحظة : يمكن إستعمال الآلة الحاسبة فنجد : $d=\frac{143}{20}=7{,}15\in\mathbb{D}$ لأن جزأه العشري منته .

$e=\frac{(-12)^{16}\times(75)^{-4}\times(-4)^{-9}}{\left[(25)^{-2}\right]^4\times(10)^4\times(18)^6}$:

نحلل الأعداد 12 ، 75 ، 4 ، 25 ، 10 و 18 فنجد :

$12=2^2\times 3$ ، $75=3\times 5^2$ ، $4=2^2$ ، $25=5^2$ ، $10=2\times 5$ ، $18=2\times 3^2$ و منه ينتج :

$e=\frac{(-2^2\times 3)^{16}\times(3\times 5^2)^{-4}\times(-2^2)^{-9}}{\left[(5^2)^{-2}\right]^4\times(2\times 5)^4\times(2\times 3^2)^6}$ أي $e=\frac{2^{32}\times 3^{16}\times 3^{-4}\times 5^{-8}\times(-2^{-18})}{5^{-16}\times 2^4\times 5^4\times 2^6\times 3^{12}}$ لأن الأس 16 عدد زوجي و منه نجد : $e=-\frac{2^{14}\times 3^{12}\times 5^{-8}}{5^{-12}\times 2^{10}\times 3^{12}}$ أي $e=-2^4\times 5^4$ و منه نجد $e=-10000$.

إذن أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد e هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$.

التمرين رقم 29 :

1) حلل إلى جداء عوامل أولية العددين : 156 و 84 .

2) عين القاسم المشترك الأكبر $PGCD(156;84)$ و المضاعف المشترك الأصغر $PPCM(156;84)$.

3) إختزل الكسر : $\frac{156}{84}$

4) عين أصغر عدد طبيعي n بحيث يكون $84n$ مربعا تاما .

حل مقترح :

1) التحليل إلى جداء عوامل أولية للعددين : 156 و 84 .

$$\begin{cases} 156 = 2^2 \times 3 \times 13 \\ 84 = 2^2 \times 3 \times 7 \end{cases}$$

2) تعيين القاسم المشترك الأكبر $PGCD(156;84)$ و المضاعف المشترك الأصغر $PPCM(156;84)$:

نعلم أن $PGCD(156;84)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين 156 و 84 إلى جداء عوامل أولية مأخوذة مرة واحدة و بأصغر أس .

و منه نجد : $PGCD(156;84) = 2^2 \times 3$ أي $PGCD(156;84) = 12$.

نعلم أن $PPCM(156;84)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة و غير المشتركة في تحليل العددين 156 و 84 إلى جداء عوامل أولية مأخوذة مرة واحدة و بأكبر أس .

و منه نجد : $PPCM(156;84) = 2^2 \times 3 \times 13 \times 7$ أي $PPCM(156;84) = 1092$.

3) إختزال الكسر : $\dfrac{156}{84}$

لإختزال الكسر $\dfrac{156}{84}$ نستعمل نتيجة السؤال السابق : نعلم أن $PGCD(156;84) = 12$ إذن بقسمة كل من البسط و المقام على 12 نحصل على : $\dfrac{13}{7} = \dfrac{156/12}{84/12} = \dfrac{156}{84}$ و هو كسر غير قابل للإختزال .

4) تعيين أصغر عدد طبيعي n بحيث يكون $84n$ مربعا تاما :

نعلم أن : $84=2^2\times3\times7$ و منه يكون : $84n=(2^2\times3\times7)n$. إذن حتى يكون العدد $84n$ مربعا تاما

يجب أن يكون $(2^2\times3\times7)n$ مربعا تاما أي $\sqrt{(2^2\times3\times7)n}\in\mathbb{N}$ أي $2\sqrt{21n}\in\mathbb{N}$

و منه نجد أن أصغر عدد طبيعي n يحقق $2\sqrt{21n}\in\mathbb{N}$ هو $n=21$ و من أجل ذلك يكون :

$2\sqrt{21n}=2\sqrt{21\times21}=2\times21=42\in\mathbb{N}$.

نتيجة : من أجل $n=21$ يكون : $84n=1764$ مربعا تاما .

التمرين رقم 30 :

1) حلل إلى جداء عوامل أولية كلا من الأعداد : 37800 ، 267696 ، 236 ، 1617 ، 378

2) إستنتج تحليلا للعددين : $378^4\times1617^3$ و $267696^3\times1617^4$

3) عين العددين الطبيعيين d و m بحيث : $d=PGCD(1617;378)$ و $m=PPCM(1617;378)$

ثم تحقق من صحة المساواة : $m\times d=1617\times378$

4) إختزل الكسرين : $\frac{378}{1617}$ و $\frac{37800}{267696}$

5) بسط العددين : $\sqrt{37800}$ و $\sqrt{267696}$

حل مقترح :

1) التحليل إلى جداء عوامل أولية كلا من الأعداد : 37800 ، 267696 ، 236 ، 1617 ، 378

$\begin{cases}37800=2^3\times3^3\times5^2\times7\\267696=2^4\times3^2\times11\times13^2\end{cases}$ و $\begin{cases}236=2^2\times59\\1617=3\times7^2\times11\end{cases}$ و $378=2\times3^3\times7$.

2) إستنتاج تحليلا للعددين : $378^4\times1617^3$ و $267696^3\times1617^4$

أي $378^4 \times 1617^3 = \left(2\times 3^3 \times 7\right)^4 \times \left(3\times 7^2 \times 11\right)^3$

أي $378^4 \times 1617^3 = 2^4 \times 3^{12} \times 7^4 \times 3^3 \times 7^6 \times 11^3$ أي $378^4 \times 1617^3 = 2^4 \times 3^{15} \times 7^{10} \times 11^3$.

و كذلك نجد : $267696^3 \times 1617^4 = \left(2^4 \times 3^2 \times 11 \times 13^2\right)^3 \times \left(3\times 7^2 \times 11\right)^4$ أي

أي $267696^3 \times 1617^4 = 2^{12} \times 3^6 \times 11^3 \times 13^6 \times 3^4 \times 7^8 \times 11^4$

$267696^3 \times 1617^4 = 2^{12} \times 3^{10} \times 7^8 \times 11^7 \times 13^6$.

3) تعيين العددين الطبيعيين d و m بحيث : $d = PGCD(1617;378)$ و

$m = PPCM(1617;378)$.

نعلم أن $PGCD(1617;378)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين 1617 و 378 إلى جداء عوامل أولية مأخوذة مرة واحدة و بأصغر أس .

و منه نجد : $d = 3\times 7$ أي $d = 21$.

نعلم أن $PPCM(1617;378)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة و غير المشتركة في تحليل العددين 1617 و 378 إلى جداء عوامل أولية مأخوذة مرة واحدة و بأكبر أس .

و منه نجد : $m = 2\times 3^3 \times 7^2 \times 11$ أي $m = 29106$.

• التحقق من صحة المساواة : $m\times d = 1617\times 378$

من جهة : $1617\times 378 = 611226$ و من جهة أخرى نعلم أن : $PGCD(1617;378) = 21$ و $PPCM(1617;378) = 29106$ فيكون إذن : $m\times d = 29106\times 21 = 611226$ و منه المساواة $m\times d = 1617\times 378$ محققة .

4) إختزال الكسرين : $\dfrac{378}{1617}$ و $\dfrac{37800}{267696}$

نعلم أن : $PGCD(1617;378)=21$ و منه بقسمة البسط و المقام في الكسر على 21 نتحصل على :

$\dfrac{378}{1617}=\dfrac{378/21}{1617/21}=\dfrac{18}{77}$ و هو كسر غير قابل للإختزال .

لإختزال الكسر $\dfrac{37800}{267696}$ نستعمل التحليل إلى جداء عوامل أولية لكل من البسط و المقام فنتحصل على :

$\dfrac{37800}{267696}=\dfrac{2^3\times3^3\times5^2\times7}{2^4\times3^2\times11\times13^2}$ و باختزال كل العوامل الأولية المشتركة نجد :

$\dfrac{37800}{267696}=\dfrac{3\times5^2\times7}{2\times11\times13^2}$ أي $\dfrac{37800}{267696}=\dfrac{525}{3718}$ و هو كسر غير قابل للإختزال .

5) تبسيط العددين : $\sqrt{37800}$ و $\sqrt{267696}$

نعلم أن تحليل العددين 37800 و 267696 إلى جداء عوامل أولية هو : $\begin{cases}37800=2^3\times3^3\times5^2\times7\\267696=2^4\times3^2\times11\times13^2\end{cases}$

و منه نجد : $\sqrt{37800}=\sqrt{2^3\times3^3\times5^2\times7}$ أي $\sqrt{37800}=2\times3\times5\sqrt{2\times3\times7}$

إذن ينتج :

$\sqrt{37800}=30\sqrt{42}$ و هي الكتابة المبسطة من الشكل $a\sqrt{b}$ للعدد $\sqrt{37800}$.

$\sqrt{267696}=\sqrt{2^4\times3^2\times11\times13^2}$ أي $\sqrt{267696}=2^2\times3\times13\sqrt{11}$ ، إذن ينتج :

$\sqrt{267696}=156\sqrt{11}$ و هي الكتابة المبسطة من الشكل $a\sqrt{b}$ للعدد $\sqrt{267696}$.

التمرين رقم 31 :

إختر الإجابة الصحيحة لكل من الإقتراحات التالية :

1/ العدد $\sqrt{150}-2\sqrt{24}$ يساوي :

أ- 0 ب- $\sqrt{6}$ جـ- $4\sqrt{6}$

2/ العدد $1^4+2^4+3^4$ يساوي :

أ- 2×7^2 ب- $(1+2+3)^4$ جـ- $(1\times2\times3)^4$

3/ رتبة مقدار العدد -4589 هي :

أ- -4×10^3 ب- -5×10^3 جـ- -3×10^3

حل مقترح :

1/ الإجابة الصحيحة هي : جـ-

التعليل : نحلل كلا من العددين 150 و 6 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $\begin{cases}6=2\times3\\150=2\times3\times5^2\end{cases}$

و منه نجد $\sqrt{150}-\sqrt{6}=\sqrt{2\times3\times5^2}-\sqrt{2\times3}$ أي $\sqrt{150}-\sqrt{6}=5\sqrt{2\times3}-\sqrt{2\times3}$ و منه

$\sqrt{150}-\sqrt{6}=4\sqrt{6}$.

2/ الإجابة الصحيحة هي : أ-

التعليل : $1^4+2^4+3^4=1+16+81$ أي $1^4+2^4+3^4=98$ ، و بتحليل العدد 98 إلى جداء عوامل أولية نجد : $98=2\times7^2$.

3/ الإجابة الصحيحة هي : ب-

التعليل : نكتب أولا العدد -4589 على الشكل العلمي فنجد : $-4,589\times10^{3}$.

و بالتالي يكون أقرب عدد صحيح للعدد العشري $-4,589$ هو -5 ، إذن رتبة مقدار العدد -4589 هي :

-5×10^{3} .

التمرين رقم 32 :

بين أن الأعداد التالية طبيعية :

$$A=\frac{\sqrt{722}}{\sqrt{2}} \quad ، \quad B=\frac{(a+b)^{2}-(a-b)^{2}}{ab} \quad ، \quad C=\frac{3^{10}}{243}$$

حل مقترح :

نحلل العدد 722 إلى جداء عوامل أولية فنتحصل على : $722=2\times19^{2}$

و منه نجد : $A=\frac{\sqrt{722}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2\times19^{2}}}{\sqrt{2}}$ أي $A=\frac{19\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}$ و منه : $A=19\in\mathbb{N}$

بالنشر و التبسيط نجد : $B=\frac{(a+b)^{2}-(a-b)^{2}}{ab}=\frac{(a^{2}+2ab+b^{2})-(a^{2}-2ab+b^{2})}{ab}$ أي

$B=\frac{\cancel{a^{2}}+2ab+\cancel{b^{2}}-\cancel{a^{2}}+2ab-\cancel{b^{2}}}{ab}$ و منه $B=\frac{4\cancel{ab}}{\cancel{ab}}$ أي : $B=4\in\mathbb{N}$

نحلل العدد 243 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $243=3^{5}$

و منه ينتج : $C=\frac{3^{10}}{243}=\frac{3^{10}}{3^{5}}=3^{10-5}$ أي : $C=3^{5}=243\in\mathbb{N}$

التمرين رقم 33 :

نضع : $A=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ و $B=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}$

1/ أوجد قيمة A و B من أجل $x=5$.

2/ بين أن : $B=A$.

حل مقترح :

1/ إيجاد قيمة A و B من أجل $x=5$:

من أجل $x=5$: $A=\sqrt{5^2+5+1}-\sqrt{5^2-5+1}$ و منه نجد : $A=\sqrt{31}-\sqrt{21}$ و هي الكتابة المبسطة للعدد A .

2/ نبين أن $B=A$:

$B=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}$ و بضرب العدد B في **مرافق المقام** أي في العدد : $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ نتحصل على :

$$B=\frac{2x\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$ أي :

$$B=\frac{2x\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}^2-\sqrt{x^2-x+1}^2}$$ (المتطابقة الشهيرة رقم 3) و منه نجد :

$$B=\frac{2x\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)}{(x^2+x+1)-(x^2-x+1)}$$ أي $$B=\frac{2x\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)}{x^2+x+1-x^2+x-1}$$ و منه نجد

$$B=\frac{\cancel{2x}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)}{\cancel{2x}}$$ أي $B=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ ، إذن يكون :

. $B=A$

التمرين رقم 34 :

A و B عددان طبيعيان بحيث $A=(4\times5)^3\times2^2\times45$ و $B=396$

1) حلل كلا من العددين A و B إلى جداء عوامل أولية .

2) عين كلا من $PGCD(A;B)$ و $PPCM(A;B)$.

3) هل العدد $\frac{A}{B}$ عشري ؟ علل جوابك .

حل مقترح :

1) تحليل كلا من العددين A و B إلى جداء عوامل أولية :

نحلل العدد 45 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $45=3^2\times5$ و منه نجد

$A=(4\times5)^3\times2^2\times3^2\times5$ أي : $A=2^8\times3^2\times5^4$.

و كذلك نجد : $396=2^2\times3^2\times11$.

2) تعيين كلا من $PGCD(A;B)$ و $PPCM(A;B)$:

نعلم أن $PGCD(A;B)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين A و B إلى جداء عوامل أولية مأخوذة مرة واحدة و بأصغر أس .

و منه نجد : $PGCD(A;B)=2^2\times3^2$ أي $PGCD(A;B)=36$.

نعلم أن $PPCM(A;B)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة و غير المشتركة في تحليل العددين A و B إلى جداء عوامل أولية مأخوذة مرة واحدة و بأكبر أس .

و منه نجد : $PPCM(A;B)=2^8\times3^2\times5^4\times11$ أي $PPCM(A;B)=15840000$.

3) هل العدد $\frac{A}{B}$ عشري ؟ علل جوابك .

باختزال كل العوامل الأولية المشتركة في تحليل البسط A و المقام B نتحصل على :

$\frac{A}{B}=\frac{2^8\times3^2\times5^4}{2^2\times3^2\times11}=\frac{2^6\times5^4}{11}$ و منه نجد $\frac{A}{B}=\frac{40000}{11}$ ؛ الكسر $\frac{40000}{11}$ غير قابل للإختزال

و بتحليل مقامه إلى جداء عوامل أولية نجد $11=11^1$ إذن هذا التحليل يشتمل على عدد أولي و هو 11 يختلف عن 2 و يختلف عن 5 و منه العدد $\frac{A}{B}$ غير عشري .

ملاحظة : يمكن إستعمال الآلة الحاسبة فنجد : $\frac{A}{B}=\frac{40000}{11}=3636,362636...$ أي أن جزأه العشري غير منته و بالتالي فهو عدد غير عشري .

التمرين رقم 35 :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x=\sqrt{75}-4\sqrt{3}+\sqrt{2}\times\frac{6}{\sqrt{18}}$ و $y=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\sqrt{3}-2$

1/ أثبت أن : $x=2+\sqrt{3}$ و $y=2-\sqrt{3}$.

2/ أحسب الجداء $x\times y$ ثم إستنتج أن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$

3/ z عدد حقيقي بحيث : $z=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2y-\left(x-y\right)^2$

بسط العدد الحقيقي z ثم حدد أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد z .

حل مقترح :

1/ التحقق أن : $x=2+\sqrt{3}$ و $y=2-\sqrt{3}$

نحلل العددين 75 و 18 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $75=3\times5^2$ و $18=2\times3^2$.

و منه يكون $x=\sqrt{3\times5^2}-4\sqrt{3}+\sqrt{2}\times\frac{6}{\sqrt{2\times3^2}}$ أي $x=5\sqrt{3}-4\sqrt{3}+\cancel{\sqrt{2}}\times\frac{6}{3\cancel{\sqrt{2}}}$ أي

$x=5\sqrt{3}-4\sqrt{3}+2$ و منه نجد $x=\sqrt{3}+2$ و هو المطلوب .

$y=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\sqrt{3}-2$ و بالنشر نجد : $y=\sqrt{3}^2-2\times1\sqrt{3}+1^2+\sqrt{3}-2$ أي

$y=3-2\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-2$ و منه نجد $y=2-\sqrt{3}$ و هو المطلوب .

2/ $x\times y=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$ و منه نجد $x\times y=2^2-\sqrt{3}^2$ أي $x\times y=1$.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1\times y}{x\times y}+\frac{1\times x}{y\times x}=\frac{x+y}{x\times y}$ أي $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=x+y$ لأن $x\times y=1$ و منه نجد :

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\sqrt{3}+2+2-\sqrt{3}$ أي $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$ و هو المطلوب .

3/ $z=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2y-(x-y)^2$ و من السؤال 2/ نعلم أن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$ و كذلك :

$(x-y)^2=\left(\sqrt{3}+2-2+\sqrt{3}\right)^2$ أي $(x-y)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2=12$ و منه نجد

$z=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4+2\left(2-\sqrt{3}\right)-12$ أي $z=2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-12$ و منه $z=-8$.

• أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد z هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية أي $z\in\mathbb{Z}$.

التمرين رقم 36 :

الجزء I :

x ، y عددان حقيقيان بحيث : $x=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ و $y=\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1/ أحسب كلا من : x^2+y^2 و xy ثم إستنتج قيمة المجموع $x+y$.

2/ إجعل مقام النسبة $\frac{x}{y}$ عددا ناطقا .

الجزء II :

w ، z عددان حقيقيان بحيث : $z=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$ و $w=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$

1/ أحسب كلا من : w^2+z^2 و wz ثم بين أن : $w+z=4$.

2/ إجعل مقام كل من w و z عددا ناطقا .

حل مقترح :

الجزء I :

x ، y عددان حقيقيان بحيث : $x=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ و $y=\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1/ حساب كلا من : x^2+y^2 و xy ثم إستنتاج قيمة المجموع $x+y$.

$x^2+y^2=\sqrt{2-\sqrt{3}}^2+\sqrt{2+\sqrt{3}}^2$ أي $x^2+y^2=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}$ و منه نجد

$x^2+y^2=4$.

$x\times y=\sqrt{2-\sqrt{3}}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}$ أي $x\times y=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}$ و منه نجد

$x\times y=\sqrt{2^2-\sqrt{3}^2}$ أي $x\times y=\sqrt{4-3}$ و منه ينتج : $x\times y=1$.

لإيجاد قيمة المجموع $x+y$ نستعمل مثلا المتطابقة الشهيرة 1 فنتحصل على : $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$

و نعلم أن : $x^2+y^2=4$ و $x\times y=1$ و منه نجد $(x+y)^2=4+2\times1$ أي $(x+y)^2=6$ و منه ينتج :

$x+y=\sqrt{6}$ (القيمة $x+y=-\sqrt{6}$ مرفوضة لأن كل من $x\geq0$ و $y\geq0$ و منه يكون $x+y\geq0$)

2/ جعل مقام النسبة $\frac{x}{y}$ عددا ناطقا :

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$ و منه نجد $$\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}$$ أي $$\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{2^2-\sqrt{3}^2}}$$

و منه نجد $$\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{1}}$$ أي $$\frac{x}{y}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$$ و بما أن : $2-\sqrt{3}\geq0$ فإنه ينتج :

$\frac{x}{y}=2-\sqrt{3}$ و هي نسبة مقامها عدد ناطق (1 عدد ناطق) .

الجزء II :

w ، z عددان حقيقيان بحيث : $z=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$ و $w=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$

1/ حساب كلا من : w^2+z^2 و wz ثم نبين أن : $w+z=4$.

$$w^2+z^2=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}^2+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}^2$$ أي $$w^2+z^2=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$ و منه بتوحيد المقامات نجد

$w^2+z^2=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}+\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}$ أي :

$w^2+z^2=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{2^2-\sqrt{3}^2}+\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{2^2-\sqrt{3}^2}$ أي

$w^2+z^2=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$ و منه نجد :

$w^2+z^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(2-\sqrt{3}\right)^2$ و بالنشر نجد

$w^2+z^2=2^2+2\times2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2+2^2-2\times2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2$ أي $w^2+z^2=8+6$ أي

$w^2+z^2=14$.

بالضرب نجد $w\times z=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}\times\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$ أي $w\times z=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\times\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$ و منه يكون :

$w\times z=\sqrt{\dfrac{\cancel{\left(2+\sqrt{3}\right)}\cancel{\left(2-\sqrt{3}\right)}}{\cancel{\left(2-\sqrt{3}\right)}\cancel{\left(2+\sqrt{3}\right)}}}$ و منه نجد $w\times z=\sqrt{1}$ أي $w\times z=1$.

لإيجاد قيمة المجموع $w+z$ نستعمل مثلا المتطابقة الشهيرة 1 فنتحصل على : $(w+z)^2=w^2+z^2+2wz$

و نعلم أن : $w^2+z^2=14$ و $wz=1$ و منه نجد $(w+z)^2=14+2\times1$ أي $(w+z)^2=16$ و منه ينتج

$w+z=4$ (القيمة $w+z=-4$ مرفوضة لأن كل من $w\geq0$ و $z\geq0$ و منه يكون $w+z\geq0$)

2/ جعل مقام كل من w و z عددا ناطقا :

$w=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$ و منه $w=\sqrt{\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}}$ أي $w=\sqrt{\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{2^2-\sqrt{3}^2}}$ أي $w=\dfrac{2+\sqrt{3}}{1}$ لأن

$2+\sqrt{3}\leq 0$ و منه نجد $w=2+\sqrt{3}$ و هي نسبة مقامها عدد ناطق (1 عدد ناطق) .

$z=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$ و منه $z=\sqrt{\dfrac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}$ أي $z=\sqrt{\dfrac{(2-\sqrt{3})^2}{2^2-\sqrt{3}^2}}$ أي $z=\dfrac{2-\sqrt{3}}{1}$ لأن

$2-\sqrt{3}\geq 0$ و منه نجد $z=2-\sqrt{3}$ و هي نسبة مقامها عدد ناطق (1 عدد ناطق) .

التمرين رقم 37 :

a ، b عددان حقيقيان بحيث : $a=\sqrt{98}+\sqrt{32}+\sqrt{8}$ و $b=\sqrt{162}+\sqrt{72}+\sqrt{18}$

1) أكتب على أبسط شكل ممكن العددين a و b .

2) أوجد قيمة الأعداد : $\dfrac{a+b}{2}$ و $\sqrt{ab}$

حل مقترح :

1) كتابة على أبسط شكل ممكن العددين a و b :

من أجل ذلك نبدأ بتحليل الأعداد 8 ، 32 ، 98 ، 18 ، 72 و 162 إلى جداء عوامل أولية :

$8=2^3$ ؛ $32=2^5$ ؛ $98=2\times 7^2$ ؛ $18=2\times 3^2$ ؛ $72=2^3\times 3^2$ ؛ $162=2\times 3^4$

إذن نجد : $a=\sqrt{98}+\sqrt{32}+\sqrt{8}=a=\sqrt{2\times 7^2}+\sqrt{2^5}+\sqrt{2^3}$ أي :

$a=7\sqrt{2}+2^2\sqrt{2}+2\sqrt{2}$ أي $a=7\sqrt{2}+4\sqrt{2}+2\sqrt{2}$ و منه $a=13\sqrt{2}$.

$b=\sqrt{162}+\sqrt{72}+\sqrt{18}=\sqrt{2\times 3^4}+\sqrt{2^3\times 3^2}+\sqrt{2\times 3^2}$ أي $b=3^2\sqrt{2}+3\times 2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

أي $b=9\sqrt{2}+6\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ و منه نجد $b=18\sqrt{2}$.

2) إيجاد قيمة الأعداد : $\frac{a+b}{2}$ و $\sqrt{ab}$

من السؤال 1) نعلم أن : $a=13\sqrt{2}$ و $b=18\sqrt{2}$ و منه نجد : $\frac{a+b}{2}=\frac{13\sqrt{2}+18\sqrt{2}}{2}$ أي

$\frac{a+b}{2}=\frac{31\sqrt{2}}{2}$. و كذلك : $\sqrt{ab}=\sqrt{13\sqrt{2}\times18\sqrt{2}}$ أي $\sqrt{ab}=\sqrt{234\times2}$ أي :

$\sqrt{ab}=\sqrt{468}$ و بتحليل العدد 468 إلى جداء عوامل أولية نحصل على : $\sqrt{ab}=\sqrt{2^2\times3^2\times13}$ أي

$\sqrt{ab}=2\times3\sqrt{13}$ و منه نجد $\sqrt{ab}=6\sqrt{13}$.

التمرين رقم 38 :

1) أحسب $\left(4-\sqrt{5}\right)^2$.

2) x ، y عددان حقيقيان بحيث : $x=\sqrt{5-\sqrt{4+8\sqrt{5}}}$ و $y=\sqrt{5+\sqrt{4+8\sqrt{5}}}$

أ) أحسب كلا من العددين : x^2+y^2 و xy .

ب) إستنتج قيمة مبسطة للعدد $\left(x+y\right)^2$.

حل مقترح :

1) حساب $\left(4-\sqrt{5}\right)^2$:

بالنشر ثم التبسيط : $\left(4-\sqrt{5}\right)^2=4^2-2\times4\sqrt{5}+\sqrt{5}^2$ أي $\left(4-\sqrt{5}\right)^2=16-8\sqrt{5}+5$ و منه نجد

$\left(4-\sqrt{5}\right)^2=21-8\sqrt{5}$.

2) x ، y عددان حقيقيان بحيث : $x=\sqrt{5-\sqrt{4+8\sqrt{5}}}$ و $y=\sqrt{5+\sqrt{4+8\sqrt{5}}}$

أ) حساب كلا من العددين : x^2+y^2 و xy :

$x^2+y^2=\sqrt{5-\sqrt{4+8\sqrt{5}}}^2+\sqrt{5+\sqrt{4+8\sqrt{5}}}^2$ و منه نجد :

$x^2+y^2=5-\sqrt{4+8\sqrt{5}}+5+\sqrt{4+8\sqrt{5}}$ أي $x^2+y^2=5+5$ و منه نجد $x^2+y^2=10$.

و كذلك نجد : $xy=\sqrt{5-\sqrt{4+8\sqrt{5}}}\times\sqrt{5+\sqrt{4+8\sqrt{5}}}$ أي

$xy=\sqrt{\left(5-\sqrt{4+8\sqrt{5}}\right)\left(5+\sqrt{4+8\sqrt{5}}\right)}$ أي $xy=\sqrt{5^2-\sqrt{4+8\sqrt{5}}^2}$ أي

$xy=\sqrt{25-4-8\sqrt{5}}$ أي $xy=\sqrt{21-8\sqrt{5}}$ و من السؤال 1/ نعلم أن : $\left(4-\sqrt{5}\right)^2=21-8\sqrt{5}$ و

منه نجد $xy=\sqrt{\left(4-\sqrt{5}\right)^2}$ أي $xy=4-\sqrt{5}$ لأن $4-\sqrt{5}\geq 0$ و هي الكتابة المبسطة للعدد xy .

ب) إستنتاج قيمة مبسطة للعدد $\left(x+y\right)^2$:

بالنشر نتحصل على : $\left(x+y\right)^2=x^2+y^2+2xy$ بحيث : $x^2+y^2=10$ و $xy=4-\sqrt{5}$ و منه

نجد : $\left(x+y\right)^2=10+2\left(4-\sqrt{5}\right)$ أي $\left(x+y\right)^2=10+8-2\sqrt{5}$ إذن نتحصل على :

$\left(x+y\right)^2=18-2\sqrt{5}$.

التمرين رقم 39 : هل الأعداد الطبيعية التالية هي أعداد أولية ؟

151 ، 407 ، 259 .

هل العدد يقبل القسمة على ...	2	3	5	7	11	13	نلاحظ أن
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	$11 \prec 13$
حاصل القسمة	75	50	30	21	13	11	

آخر باقي غير معدوم و منه فالعدد 151 أولي .

هل العدد يقبل القسمة على ...	2	3	5	7	11
الإجابة	لا	لا	لا	لا	نعم
حاصل القسمة	203	135	81	58	37

آخر باقي معدوم لأن العدد 407 يقبل القسمة على 11 و منه يكون العدد 407 ليس أوليا .

هل العدد يقبل القسمة على ...	2	3	5	7
الإجابة	لا	لا	لا	نعم
حاصل القسمة	129	86	51	37

آخر باقي معدوم لأن العدد 259 يقبل القسمة على 7 و منه يكون العدد 259 ليس أوليا .

التمرين رقم 40 : هل الأعداد الطبيعية التالية هي أعداد أولية ؟

307 ، 2001 .

هل العدد يقبل القسمة على ...	2	3	5	7	11	13	17	19	نلاحظ أن $16 \prec 19$
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	
حاصل القسمة	153	102	61	43	27	23	18	16	

آخر باقي غير معدوم و منه فالعدد 307 أولي .

هل العدد يقبل القسمة على ...	2	3
الإجابة	لا	نعم
حاصل القسمة	1000	667

آخر باقي معدوم لأن العدد 2001 يقبل القسمة على 3 و منه يكون العدد 2001 ليس أوليا .

التمرين رقم 41 :

a ، a عددان حقيقيان موجبان بحيث $a \succ b$ يحققان ما يلي :

$a+b=\sqrt{5}$ و $ab=1$

1/ أحسب المجموع : $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ثم الفرق : $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

2/ إستنتج قيمة الفرق $a-b$ ثم قيمة كل من a و b .

حل مقترح :

1/ حساب المجموع : $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ثم الفرق : $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

حتى نتمكن من حساب المجموع $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ يمكن مثلا الإعتماد على المتطابقة الشهيرة $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$ فنجد :

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=\sqrt{a}^2+2\sqrt{a}\times\sqrt{b}+\sqrt{b}^2$ أي $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+b+2\sqrt{ab}$ بحيث نعلم أن :

$a+b=\sqrt{5}$ و $ab=1$ و بالتالي نحصل على : $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=\sqrt{5}+2\sqrt{1}$ أي

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=2+\sqrt{5}$ و منه نجد : $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

حتى نتمكن من حساب الفرق $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ يمكن مثلا الإعتماد على المتطابقة الشهيرة $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$ فنجد :

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=\sqrt{a}^2-2\sqrt{a}\times\sqrt{b}+\sqrt{b}^2$ أي $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=a+b-2\sqrt{ab}$ بحيث نعلم أن :

$a+b=\sqrt{5}$ و $ab=1$ و بالتالي نحصل على : $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=\sqrt{5}-2\sqrt{1}$ أي

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=\sqrt{5}-2$ و منه نجد : $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

2/ إستنتاج قيمة الفرق $a-b$ ثم قيمة كل من a و b :

نعلم أن : $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2+\sqrt{5}}$ و $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt{5}-2}$ و بالجداء طرفا لطرف نحصل على :

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\sqrt{\sqrt{5}+2}\times\sqrt{\sqrt{5}-2}$ أي $\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2=\sqrt{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}$ و

منه نجد $a-b=\sqrt{\sqrt{5}^2-2^2}$ أي $a-b=\sqrt{5-4}$ و منه $a-b=1$

• إستنتاج قيمتي a و b : من المعطيات نعلم أن : $a+b=\sqrt{5}$ و من السؤال السابق : $a-b=1$

إذن نتحصل على جملة معادلتين هي : $\begin{cases} a+b=\sqrt{5} \\ a-b=1 \end{cases}$ ذات المجهولين a و b .

بطريقة الجمع نتحصل على : $2a=1+\sqrt{5}$ و منه نجد : $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

و بتعويض قيمة a في المعادلة $a-b=1$ نجد : $b=a-1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-1$ أي $b=\dfrac{1+\sqrt{5}-2}{2}$ و منه نجد

$b=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

التمرين رقم 42 :

1) حلل إلى جداء عوامل أولية كلا من 540 و 1500 .

2) عين $PGCD(540;1500)$.

إجعل الكسر $\dfrac{540}{1500}$ كسرا غير قابل للإختزال .

3) عين $PPCM(540;1500)$ ثم أوجد قيمة الفرق $\dfrac{1}{540}-\dfrac{3}{1500}$.

حل مقترح :

1) تحليل إلى جداء عوامل أولية كلا من 540 و 1500 :

$\begin{cases} 540=2^2\times3^3\times5 \\ 1500=2^2\times3\times5^3 \end{cases}$ و هو تحليل 540 و 1500 .

2) تعيين $PGCD(540;1500)$:

نعلم أن $PGCD(540;1500)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل 540 و 1500 مأخوذة مرة واحدة

و بأصغر أس : $PGCD(540;1500)=2^2\times3\times5$ أي : $PGCD(540;1500)=60$.

- جعل الكسر $\frac{540}{1500}$ كسرا غير قابل للإختزال :

يكفي قسمة كل من البسط و المقام على $PGCD(540;1500)$ أي على 60 فنتحصل على :

$\frac{9}{25}=\frac{540/60}{1500/60}=\frac{540}{1500}$ و هو كسر غير قابل للإختزال .

3) تعيين $PPCM(540;1500)$ ثم إيجاد قيمة الفرق $\frac{1}{540}-\frac{3}{1500}$:

نعلم أن $PPCM(540;1500)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة و غير المشتركة في تحليل 540 و 1500

مأخوذة مرة واحدة و بأكبر أس : $PPCM(540;1500)=2^2\times3^3\times5^3$ أي :

$PPCM(540;1500)=13500$.

- إيجاد قيمة الفرق $\frac{1}{540}-\frac{3}{1500}$: بتوحيد المقامات نجد :

$\frac{3\times540-1\times1500}{1500\times540}=\frac{1}{540}-\frac{3}{1500}$ أي $\frac{3\times2^2\times3^3\times5-2^2\times3\times5^3}{2^2\times3\times5^3\times2^2\times3^3\times5}=\frac{1}{540}-\frac{3}{1500}$ أي

$\frac{2^2\times3^4\times5-2^2\times3\times5^3}{2^4\times3^4\times5^4}=\frac{1}{540}-\frac{3}{1500}$ أي $\frac{(2^2\times3\times5)(3^3-5^2)}{2^4\times3^4\times5^4}=\frac{1}{540}-\frac{3}{1500}$ أي

$\frac{3^3-5^2}{2^2\times3^3\times5^3}=\frac{1}{540}-\frac{3}{1500}$ و منه $\frac{2}{13500}=\frac{1}{540}-\frac{3}{1500}$ أي $\frac{1}{6750}=\frac{1}{540}-\frac{3}{1500}$.

التمرين رقم 43 :

n ، α و β أعداد طبيعية بحيث $\alpha = 7^{n+1} - 7^n$ و $\beta = 2^{n+3} - 2^{n+1} + 2^n$

أثبت أن α يقبل القسمة على 3 و β يقبل القسمة على 7 .

حل مقترح :

لدينا $\alpha = 7^{n+1} - 7^n$ أي $\alpha = 7 \times 7^n - 7^n$ أي $\alpha = 7^n(7-1)$ و منه $\alpha = 7^n \times 6$ ؛ لكن $6 = 3 \times 2$

و منه نجد $\alpha = 7^n \times 3 \times 2$ أي أن العدد α يقبل القسمة على 3 لأن 3 ظهر في تحليل العدد α إلى جداء عوامل أولية .

لدينا $\beta = 2^{n+3} - 2^{n+1} + 2^n$ أي $\beta = 2^n \times 2^3 - 2^n \times 2 + 2^n$ أي $\beta = 2^n(2^3 - 2 + 1)$ أي

$\beta = 2^n \times 7$ و منه فالعدد β يقبل القسمة على 7 لأن 7 ظهر في تحليل العدد β إلى جداء عوامل أولية .

التمرين رقم 44 : أكمل الجدول الآتي :

العدد	الكتابة العلمية	رتبة مقدار العدد
$6485,412$		
154		
$0,000364 \times 10^3$		
$-80,25$		

حل مقترح :

العدد	الكتابة العلمية	رتبة مقدار العدد
$6485,412$	$6,485412 \times 10^3$	6×10^3
154	$1,54 \times 10^2$	2×10^2
$0,000364 \times 10^3$	$3,64 \times 10^{-1}$	4×10^{-1}
$-80,25$	$-8,025 \times 10^1$	-8×10^1

التمرين رقم 45 :

1) أكتب الأعداد الناطقة على شكل كسر : $a = 5,\underline{245}245245\ldots$ ؛ $b = 16,4\underline{212}212212\ldots$

2) أكتب على شكل أبسط شكل ممكن :

$$C=\left(\frac{5}{7}\right)^{-4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{8}\times(3\times5)^{6} \text{ ، } B=\frac{15^{-4}\times18^{7}}{25^{-3}\times16^{-3}} \text{ ، } A=49^{-4}\times35^{8}\times25^{-3}$$

$$D=\frac{(-2)^{5}\times(-5)^{8}\times(-9)^{3}}{(-6)^{4}\times(30)^{5}}\times\frac{(-18)^{7}\times(-2)^{4}\times(-50)^{3}}{(-25)^{6}\times(-4)^{5}\times(-27)^{2}}$$

حل مقترح :

1) كتابة الأعداد الناطقة على شكل كسر : $a=5,\underline{245}245245\ldots$ ؛ $b=16,4\underline{212}212212\ldots$

$a=5,\underline{245}245245\ldots=5+0,\underline{245}245\ldots$ و بوضع $x=0,\underline{245}245\ldots$ نتحصل على $\boxed{a=5+x}$.

نضرب المعادلة $x=0,\underline{245}245\ldots$ في 10^{3} لأن عدد أرقام الدور هو 3 فنجد :

$1000x=245,\underline{245}245\ldots$ أي $1000x=245+0,\underline{245}245\ldots$ أي $1000x=245+x$ لأن :

$x=0,\underline{245}245\ldots$ و منه يكون : $1000x-x=245$ أي $999x=245$ و منه $\boxed{x=\frac{245}{999}}$.

نعوض الآن قيمة x في المعادلة $a=5+x$ فنجد : $a=5+\frac{245}{999}$ و بتوحيد المقامات نحصل على :

$a=\frac{5\times999+245}{999}$ أي $\boxed{a=\frac{5240}{999}}$.

نلاحظ أن الدور في الكتابة العشرية الدورية للعدد b لا يظهر بعد الفاصلة مباشرة إنما يظهر إبتداءا من الرقم الثاني بعد الفاصلة و من أجل حل هذه المشكلة نضرب المساواة $b=16,4\underline{212}212212\ldots$ في 10 فنتحصل على :

$10b=164,\underline{212}212212\ldots$ الآن أصبح الأمر جيدا لأن الدور يظهر بعد الفاصلة مباشرة .

$10b=164,\underline{212}212212\ldots=164+0,212212212\ldots$ و بوضع :

$x=0,\underline{212}212212\ldots$ يصبح لدينا : $10b=164+x$.

نضرب المعادلة $x=0,\underline{212}212212\ldots$ في 10^3 لأن عدد أرقام الدور هو 3 فنجد :

$1000x=212,\underline{212}212212\ldots$ أي $1000x=212+0,\underline{212}212212\ldots$ أي $1000x=212+x$

لأن : $x=0,\underline{212}212212\ldots$ و منه يكون : $1000x-x=212$ أي $999x=212$ و منه $x=\dfrac{212}{999}$.

نعوض الآن قيمة x في المعادلة $10b=164+x$ فنجد : $10b=164+\dfrac{212}{999}$ و بتوحيد المقامات نتحصل على

: $10b=\dfrac{164\times999+212}{999}$ أي $10b=\dfrac{164048}{999}$ ، إذن لإيجاد قيمة العدد b يكفي قسمة المعادلة

$10b=\dfrac{164048}{999}$ على 10 فنتحصل على : $b=\dfrac{164048}{999}\times\dfrac{1}{10}$ أي $b=\dfrac{164048}{9990}$.

ملاحظة : لو كان الدور لا يظهر بعد الفاصلة مباشرة إنما يظهر إبتداءا من الرقم الثالث بعد الفاصلة نضرب في 100 و هكذا ....

2) كتابة على شكل أبسط شكل ممكن :

$$A=49^{-4}\times35^{8}\times25^{-3} \text{ ، } B=\frac{15^{-4}\times18^{7}}{25^{-3}\times16^{-3}} \text{ ، } C=\left(\frac{5}{7}\right)^{-4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{8}\times(3\times5)^{6}$$

$$D=\frac{(-2)^5\times(-5)^8\times(-9)^3}{(-6)^4\times(30)^5}\times\frac{(-18)^7\times(-2)^4\times(-50)^3}{(-25)^6\times(-4)^5\times(-27)^2}$$

$A=49^{-4}\times35^{8}\times25^{-3}$: يمكن كتابة العدد A على الشكل : $A=\dfrac{1}{49^4}\times35^8\times\dfrac{1}{25^3}$

نحلل الأعداد 49 ، 35 و 25 إلى جداء عوامل أولية : $49=7^2$ و $35=5\times7$ و $25=5^2$

و منه نجد : $A=\dfrac{1}{(7^2)^4}\times(5\times7)^8\times\dfrac{1}{(5^2)^3}$ أي $A=\dfrac{1}{7^8}\times5^8\times7^8\times\dfrac{1}{5^6}$ و منه بالإختزال نجد :

$A=5^2=25$.

$B=\dfrac{15^{-4}\times 18^7}{25^{-3}\times 16^{-3}}$: يمكن كتابة B على الشكل : $B=\dfrac{25^3\times 16^3\times 18^7}{15^4}$

نحلل الأعداد 25 ، 16 ، 18 و 15 إلى جداء عوامل أولية : $18=2\times 3^2$ ، $16=2^4$ ، $25=5^2$ ،

$15=3\times 5$.

و منه نجد : $B=\dfrac{(5^2)^3\times(2^4)^3\times(2\times 3^2)^7}{(3\times 5)^4}$ أي $B=\dfrac{5^6\times 2^{12}\times 2^7\times 3^{14}}{3^4\times 5^4}$ و منه بالإختزال نجد :

$B=5^2\times 2^{19}\times 3^{10}$.

$C=\left(\dfrac{5}{7}\right)^{-4}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^{8}\times(3\times 5)^6$: يمكن كتابة C على الشكل : $C=\dfrac{5^{-4}}{7^{-4}}\times\dfrac{3^8}{4^8}\times 3^6\times 5^6$

أي $C=\dfrac{7^4}{5^4}\times\dfrac{3^8}{(2^2)^8}\times 3^6\times 5^6$ أي $C=\dfrac{7^4}{5^4}\times\dfrac{3^8}{2^{16}}\times 3^6\times 5^6$ و منه بالإختزال نجد :

$C=\dfrac{3^{14}\times 5^2\times 7^4}{2^{16}}$.

يمكن كتابة العدد D وفق الشكل الآتي تبعا لشفعية الأس (زوجي أو فردي) :

$$D=\frac{2^5\times 5^8\times 9^3}{6^4\times 30^5}\times\frac{18^7\times 2^4\times 50^3}{-25^6\times 4^5\times 27^2}$$

نحلل الأعداد 4 ، 9 ، 6 ، 18 ، 25 ، 27 ، 30 و 50 إلى جداء عوامل أولية :

$4=2^2$ ، $9=3^2$ ، $6=2\times 3$ ، $18=2\times 3^2$ ، $25=5^2$ ، $27=3^3$ ، $30=2\times 3\times 5$ ،

$50=2\times 5^2$ و منه نجد :

أي $D=-\frac{2^5\times5^8\times(3^2)^3}{(2\times3)^4\times(2\times3\times5)^5}\times\frac{(2\times3^2)^7\times2^4\times(2\times5^2)^3}{(5^2)^6\times(2^2)^5\times(3^3)^2}$

و بالإختزال نجد : $D=-\frac{2^5\times5^8\times3^6}{2^4\times3^4\times2^5\times3^5\times5^5}\times\frac{2^7\times3^{14}\times2^4\times2^3\times5^6}{5^{12}\times2^{10}\times3^6}$

$D=-\frac{5^3}{2^4\times3^3}\times\frac{2^4\times3^8}{5^6}$ أي $D=-\frac{3^5}{5^3}$ و منه نجد $D=-\frac{243}{125}$.

التمرين رقم 46 :

ليكن العددان : $X=12,858585...$ و $Y=\frac{7\times2^5\times9^3\times3^2}{7^{-2}\times2^4\times3^4}$

1/ أكتب العدد Y على أبسط شكل ممكن .

2/ هل Y عدد عشري ؟

3/ أكتب X على شكل كسر غير قابل للإختزال .

حل مقترح :

1/ كتابة العدد Y على أبسط شكل ممكن :

نحلل العدد 9 إلى جداء عوامل أولية : $9=3^2$ و منه نجد

$Y=\frac{7\times2^5\times(3^2)^3\times3^2}{7^{-2}\times2^4\times3^4}$ أي $Y=\frac{7\times2^5\times3^6\times3^2}{7^{-2}\times2^4\times3^4}$ أي $Y=\frac{7^3\times2^5\times3^6\times3^2}{2^4\times3^4}$ أي

$Y=2\times3^4\times7^3$ أي $Y=55566$.

2/ هل Y عدد عشري ؟

نعم Y عدد عشري لأن Y عدد طبيعي و $\mathbb{N}\subset\mathbb{D}$ (كل عدد طبيعي هو عدد عشري)

3/ كتابة X على شكل كسر غير قابل للإختزال :

معناه الإنتقال من الكتابة العشرية الدورية إلى الكتابة الكسرية :

$X = 12,\underline{85}8585...$ أي $X = 12 + 0,\underline{85}8585...$ و بوضع $x = 0,\underline{85}8585...$ نحصل على :

$X = 12 + x$.

عدد أرقام الدور هو 2 و بالتالي نضرب المعادلة $x = 0,\underline{85}8585...$ في العدد 10^2 نحصل على :

$100x = 85,\underline{85}8585...$ أي $100x = 85 + 0,\underline{85}8585...$ أي $100x = 85 + x$ لأن

$x = 0,\underline{85}8585...$ و منه $100x - x = 85$ أي $99x = 85$ و منه نحصل على : $x = \frac{85}{99}$.

نعوض الآن قيمة x في المعادلة $X = 12 + x$ فنجد : $X = 12 + \frac{85}{99}$ و بتوحيد المقامات نحصل على :

$X = \frac{12 \times 99 + 85}{99}$ أي $X = \frac{1273}{99}$.

الآن نتحقق إن كان الكسر $\frac{1273}{99}$ غير قابل للإختزال أو لا :

من أجل ذلك نحلل العددين 1273 و 99 إلى جداء عوامل أولية كالآتي :

$$\begin{cases} 1273 = 19 \times 67 \\ 99 = 3^2 \times 11 \end{cases}$$

نلاحظ أنه لا توجد أية عوامل أولية مشتركة بين البسط و المقام فيكون الكسر $\frac{1273}{99}$ غير قابل للإختزال .

التمرين رقم 47 :

1) بين أن العدد 401 أولي .

2) عين العددين الطبيعيين a و b بحيث : $a^2-b^2=401$

حل مقترح :

1) نبين أن العدد 401 أولي :

هل العدد يقبل القسمة على ...	2	3	5	7	11	13	17	19	23	نلاحظ أن $17 \prec 23$
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	
حاصل القسمة	200	133	80	57	36	30	23	21	17	

آخر باقي غير معدوم و منه فالعدد 401 أولي .

2) تعيين العددين الطبيعيين a و b بحيث : $a^2-b^2=401$

باستعمال التحليل بالمتطابقات الشهيرة نحصل على : $(a-b)(a+b)=401$

و منه فالعدد $a-b$ يقسم 401 و العدد $a+b$ يقسم 401 ؛ لكن من السؤال 1/ نعلم أن 401 عدد أولي أي أنه يقبل بالضبط قاسمين هما 1 و 401 ؛ إذن يكون : $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=401 \end{cases}$ لأن $a+b \succ a-b$ ($a \in \mathbb{N}$ و $b \in \mathbb{N}$) :

و بجمع المعادلتين نحصل على : $2a=402$ و منه نجد $a=201$.

و لإيجاد قيمة b يكفي تعويض قيمة a في المعادلة 2 فنجد $b=401-201$ أي $b=200$.

التمرين رقم 48 :

برهن صحة المساواتين الآتيتين : $1+\sqrt{3}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}$ و

$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1$.

حل مقترح :

للبرهان على صحة المساواة 1) نبدأ بحساب المقدار $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$:

$\left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 1^2+2\times1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2$ أي $\left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 1+2\sqrt{3}+3$ أي $\left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 4+2\sqrt{3}$

و منه نجد $1+\sqrt{3}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

من جهة أخرى : $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2\times2+2\sqrt{3}}$ أي $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2\left(2+\sqrt{3}\right)}$ و منه نجد

$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}$ ومنه $1+\sqrt{3}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}$ و منه صحة المساواة 1

للبرهان على صحة المساواة 2) نبدأ بتنطيق المقامات (نكتبها على شكل أعداد ناطقة خالية من الجذور) :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)}$$

و منه $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3}$ أي :

$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\cancel{\sqrt{2}}-1+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}+\sqrt{4}-\cancel{\sqrt{3}}$ أي :

$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\sqrt{4}-1$ أي $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=2-1=1$

و منه صحة المساواة 2) .

التمرين رقم 49 :

a و b عددان لهما على الترتيب كرتبة مقدار 7×10^{8} و 6×10^{-15}

1/ عين رتبة مقدار a^2 ، b^2 ثم a^2b^2 .

2/ عين رتبة مقدار ab و $(ab)^2$.

3/ ماذا تستنتج ؟

حل مقترح :

1/ تعيين رتبة مقدار a^2 ، b^2 ثم a^2b^2 :

$a^2 = a \times a$ و نعلم أن رتبة مقدار الجداء هي جداء رتبتي مقداري العددين بحيث :

$7\times10^8 \times 7\times10^8 = 49\times10^{16}$ ، الآن نكتب العدد 49×10^{16} على الشكل العلمي فنجد : $4,9\times10^{17}$

و منه تكون رتبة مقدار العدد a^2 هي : 5×10^{17} .

$b^2 = b \times b$ و نعلم أن رتبة مقدار الجداء هي جداء رتبتي مقداري العددين بحيث :

$6\times10^{-15} \times 6\times10^{-15} = 36\times10^{-30}$ ، الآن نكتب العدد 36×10^{-30} على الشكل العلمي فنجد : $3,6\times10^{-29}$

و منه تكون رتبة مقدار العدد b^2 هي : 4×10^{-29} .

$a^2b^2 = a^2 \times b^2$ و نعلم أن رتبة مقدار الجداء هي جداء رتبتي مقداري العددين بحيث :

$5\times10^{17} \times 4\times10^{-29} = 20\times10^{-12}$ ، الآن نكتب العدد 20×10^{-12} على الشكل العلمي فنجد : 2×10^{-11}

و منه تكون رتبة مقدار العدد a^2b^2 هي : 2×10^{-11} .

2/ تعيين رتبة مقدار ab و $(ab)^2$:

نعلم أن رتبة مقدار الجداء هي جداء رتبتي مقداري العددين بحيث :

$7\times10^8 \times 6\times10^{-15} = 42\times10^{-7}$ ، الآن نكتب العدد 42×10^{-7} على الشكل العلمي فنجد : $4,2\times10^{-6}$

و منه تكون رتبة مقدار العدد ab هي : 4×10^{-6} .

$(ab)^2 = ab \times ab$ و نعلم أن رتبة مقدار الجداء هي جداء رتبتي مقداري العددين بحيث :

$4\times10^{-6}\times4\times10^{-6}=16\times10^{-12}$ ، الآن نكتب العدد 16×10^{-12} على الشكل العلمي فنجد : $1,6\times10^{-11}$

و منه تكون رتبة مقدار العدد $(ab)^2$ هي : 2×10^{-11} .

3/ الإستنتاج :

رتبة مقدار العدد a^2b^2 مساوية لرتبة مقدار العدد $(ab)^2$.

التمرين رقم 50 :

1) إختزل الأعداد الآتية باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية : $A=\dfrac{(-4)^2(-25)^3}{36\times10^2}$ ،

$B=\dfrac{6\sqrt{288}\times\sqrt{75}}{\sqrt{90}\times\sqrt{20}}$ ، $C=\dfrac{17303}{792}$ ، $D=\dfrac{180}{126}$: هل العدد D عشري ؟

2) أكتب على الشكل $a\sqrt{b}$ بحيث $b\in\mathbb{N}$ و b أصغر ما يمكن الأعداد التالية : $\sqrt{252}$ ، $\sqrt{1000}$.

حل مقترح :

1) إختزال الأعداد الآتية باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية :

$A=\dfrac{(-4)^2(-25)^3}{36\times10^2}=-\dfrac{4^2\times25^3}{36\times10^2}$ و بالتحليل إلى جداء عوامل أولية نجد :

$4=2^2$ ، $25=5^2$ ، $36=2^2\times3^2$ ، $10=2\times5$ و منه نجد :

$A=-\dfrac{(2^2)^2\times(5^2)^3}{(2\times3)^2\times(2\times5)^2}$ أي $A=-\dfrac{2^4\times5^6}{2^2\times3^2\times2^2\times5^2}$ أي $A=-\dfrac{5^4}{3^2}$ أي $A=-\dfrac{625}{9}$.

$B=\dfrac{6\sqrt{288}\times\sqrt{75}}{\sqrt{90}\times\sqrt{20}}$: نحلل الأعداد 288 ، 75 ، 90 ، 20 فنجد :

و منه نتحصل على الشكل : $\begin{cases} 288 = 2^5 \times 3^2 & 90 = 2 \times 3^2 \times 5 \\ 75 = 3 \times 5^2 & 20 = 2^2 \times 5 \end{cases}$

$B = \dfrac{6\sqrt{2^5 \times 3^2} \times \sqrt{3 \times 5^2}}{\sqrt{2 \times 3^2 \times 5} \times \sqrt{2^2 \times 5}}$ أي $B = \dfrac{6 \times 2^2 \times 3\sqrt{2} \times 5\sqrt{3}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}$ أي $B = \dfrac{6 \times 2 \times 5\sqrt{3}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$ أي

$B = \dfrac{6 \times 2 \times 5\sqrt{3}}{5}$ و منه نجد : $B = 12\sqrt{3}$.

$C = \dfrac{17303}{792}$: نحلل كلا من البسط و المقام إلى جداء عوامل أولية : $\begin{cases} 17303 = 11^3 \times 13 \\ 792 = 2^3 \times 3^2 \times 11 \end{cases}$

إذن : $C = \dfrac{17303}{792} = \dfrac{11^3 \times 13}{2^3 \times 3^2 \times 11}$ و بإختزال كل العوامل الأولية المشتركة نتحصل على :

$C = \dfrac{11^2 \times 13}{2^3 \times 3^2}$ أي : $C = \dfrac{1573}{72}$.

$D = \dfrac{180}{126}$: نحلل كلا من البسط و المقام إلى جداء عوامل أولية : $\begin{cases} 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 126 = 2 \times 3^2 \times 7 \end{cases}$

إذن : $D = \dfrac{180}{126} = \dfrac{2^2 \times 3^2 \times 5}{2 \times 3^2 \times 7}$ و بإختزال كل العوامل الأولية المشتركة نتحصل على :

$D = \dfrac{2 \times 5}{7}$ أي : $D = \dfrac{10}{7}$ (العدد D ليس عشريا لأن تحليل مقام الكسر الغير قابل للإختزال $\dfrac{10}{7}$ يشتمل على عدد أولي و هو 7 يختلف عن 2 و يختلف عن 5) .

2) كتابة على الشكل $a\sqrt{b}$ بحيث $b \in \mathbb{N}$ و b أصغر ما يمكن الأعداد التالية : $\sqrt{252}$ ، $\sqrt{1000}$.

نحلل العددين 252 و 1000 إلى جداء عوامل أولية : $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ و $1000 = 2^3 \times 5^3$.

إذن نجد : $\sqrt{252} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 7} = 2 \times 3\sqrt{7}$ أي $\sqrt{252} = 6\sqrt{7}$ و هي أبسط كتابة من الشكل $a\sqrt{b}$

بحيث b طبيعي و b أصغر ما يمكن ؛ و كذلك $\sqrt{1000}=\sqrt{2^3\times5^3}$ أي $\sqrt{1000}=2\times5\sqrt{5\times2}$ أي

$\sqrt{1000}=10\sqrt{10}$ و هي أبسط كتابة من الشكل $a\sqrt{b}$ بحيث b طبيعي و b أصغر ما يمكن .

التمرين رقم 51 :

حدد أصغر مجموعة تنتمي إليها الأعداد التالية :

$$A=\sqrt{22+\sqrt{5+\sqrt{15+\sqrt{1}}}} \text{ ، } B=\sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} \text{ ، } C=\frac{1}{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{3+\sqrt{5}} \text{ ، }$$

$$D=\sqrt{4-\sqrt{7}}\sqrt{4+\sqrt{7}} \text{ ، } E=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}$$

حل مقترح :

لدينا $\sqrt{15+\sqrt{1}}=\sqrt{15+1}=\sqrt{16}=4$ و منه $A=\sqrt{22+\sqrt{5+4}}$ بحيث $\sqrt{5+4}=\sqrt{9}=3$ و

منه نجد $A=\sqrt{22+3}$ أي $A=\sqrt{25}$ و منه $A=5\in\mathbb{N}$.

$$B=\sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}} \text{ أي } B=\sqrt{\frac{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}} \text{ أي}$$

$$B=\sqrt{\frac{3-2}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}} \text{ أي } B=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \text{ و منه } B=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} \text{ أي}$$

$$B=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2} \text{ أي } B=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1} \text{ و منه } B=\sqrt{3}+\sqrt{2}\in\mathbb{R} \text{ (} B \text{ أصم)}$$

$C=\frac{1}{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{3+\sqrt{5}}$ و بكتابة المقامات على شكل أعداد ناطقة نجد :

$$C=\frac{3+\sqrt{5}}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}+\frac{3-\sqrt{5}}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)} \text{ أي } C=\frac{3+\sqrt{5}}{3^2-\sqrt{5}^2}+\frac{3-\sqrt{5}}{3^2-\sqrt{5}^2} \text{ أي}$$

أي $C=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$ أي $C=\dfrac{3+\cancel{\sqrt{5}}+3-\cancel{\sqrt{5}}}{4}$ و منه نجد $\boxed{C=\dfrac{6}{4}=1,5\in\mathbb{D}}$

$D=\sqrt{4-\sqrt{7}}\sqrt{4+\sqrt{7}}$ و منه $D=\sqrt{\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)}$ أي $D=\sqrt{4^2-\sqrt{7}^2}$ أي

$D=\sqrt{16-7}$ و منه $\boxed{D=\sqrt{9}=3\in\mathbb{N}}$

$E=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}$ و منه نجد $E=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1-\sqrt{2}}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}}}$ أي

$E=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1-\sqrt{2}}{\left(1^2-\sqrt{2}^2\right)}}}$ أي $E=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\sqrt{2}-1}}$ أي $E=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}}$ و منه

$E=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}}$ أي $E=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}^2-1^2}}$ أي $E=1+\dfrac{1}{2+\sqrt{2}-1}$ أي

$E=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ و منه $E=1+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}$ أي $E=1+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}^2-1^2}$ أي

$E=\cancel{1}+\sqrt{2}-\cancel{1}$ و منه نجد $\boxed{E=\sqrt{2}\in\mathbb{R}}$ (E أصم)

التمرين رقم 52 :

ليكن العددان الحقيقيان a و b بحيث :

$a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

1) أحسب ab و $a+b$

2) إستنتج قيمة كل من a^2+b^2 و a^4+b^4

3) بين أن : $a^2=a+1$ و $a^3=2a+1$

حل مقترح :

1) حساب ab و $a+b$:

$ab=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ أي $ab=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}{4}$ أي $ab=\frac{1^2-\sqrt{5}^2}{4}$ أي $ab=\frac{1-5}{4}$ و منه

نجد $ab=-1$.

2) إستنتاج قيمة كل من a^2+b^2 و a^4+b^4 :

قبل ذلك نحسب $(a+b)^2$ فنجد : $\left(\frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=(a+b)^2$ أي

$(a+b)^2=\left(\frac{2}{2}\right)^2$ أي $(a+b)^2=1$.

من جهة أخرى نعلم أن : $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ بحيث $(a+b)^2=1$ و $ab=-1$ و منه ينتج :

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ أي $a^2+b^2=1-2\times(-1)$ أي $a^2+b^2=3$.

و كذلك $\left(a^2+b^2\right)^2=3^2=9$ و من جهة أخرى $\left(a^2+b^2\right)^2=\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+b^2\right)$ أي

$\left(a^2+b^2\right)^2=a^4+b^4+a^2b^2+b^2a^2$ أي $\left(a^2+b^2\right)^2=a^4+b^4+2(ab)^2$ و منه يكون

$a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2(ab)^2$ بحيث $\left(a^2+b^2\right)^2=9$ و $(ab)^2=(-1)^2=1$ و منه نجد

$a^4+b^4=9-2\times1$ أي $a^4+b^4=7$.

3) نبين أن : $a^2=a+1$ و $a^3=2a+1$

$a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ و منه $a^2=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ أي $a^2=\dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4}$ أي $a^2=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}$ أي

$a^2=\dfrac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{2\times2}$ و منه نجد $a^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ أي $a^2=\dfrac{2+1+\sqrt{5}}{2}$ أي $a^2=\dfrac{2}{2}+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ أي

$a^2=1+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ و منه نجد $a^2=1+a$ و هو المطلوب .

بما أن $a^2=1+a$ فإن $a\times a^2=a\left(1+a\right)$ أي $a^3=a+a^2$ و منه $a^3=a+1+a$ أي $a^3=2a+1$

و هو المطلوب .

ملاحظة : العدد الحقيقي a يسمى العدد الذهبي (La section dorée)

التمرين رقم 53 :

ليكن x و y عددين من $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ ، نضع : $A=\dfrac{x+y}{1+xy}$

1) أوجد قيمة A من أجل $x=\dfrac{1}{3}$ و $y=\dfrac{-2}{5}$

2) أحسب $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ و $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$.

3) نضع $x=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ و $y=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

بين أن $A=\sqrt{3}$.

4) بين أنه من أجل كل x و y من $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ فإن :

$1-A=\frac{(x-1)(y-1)}{1+xy}$ و $1+A=\frac{(x+1)(y+1)}{1+xy}$

حل مقترح :

1) إيجاد قيمة A من أجل $x=\frac{1}{3}$ و $y=\frac{-2}{5}$

$A=\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}}$ أي $A=\frac{\frac{5-2\times 3}{15}}{1-\frac{2}{15}}$ أي $A=\frac{-\frac{1}{15}}{\frac{15-2}{15}}$ و منه $A=-\frac{1}{15}\times\frac{15}{13}$ أي $A=-\frac{1}{13}$

2) حساب $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ و $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$:

$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=\sqrt{3}^2-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2$ أي $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=3-2\sqrt{6}+2$ أي

$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=5-2\sqrt{6}$

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=\sqrt{3}^2+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2$ أي $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{6}+2$ أي

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=5+2\sqrt{6}$

3) نضع $x=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ و $y=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

نبين أن $A=\sqrt{3}$: $A=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{1+\sqrt{5+2\sqrt{6}}\times\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ أي $A=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{1+\sqrt{\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)}}$

أي $A=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{1+\sqrt{5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}}$ أي $A=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{1+\sqrt{25-24}}$ و من السؤال 3) نعلم أن

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=5+2\sqrt{6}$ و $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=5-2\sqrt{6}$ و منه نجد

$A=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}}{2}$ أي $A=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ أي $A=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}$ و منه نجد

$A=\sqrt{3}$ و هو المطلوب .

4) نبين أنه من أجل كل x و y من $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ فإن :

$$1+A=\frac{(x+1)(y+1)}{1+xy} \quad \text{و} \quad 1-A=\frac{(x-1)(y-1)}{1+xy}$$

$1+A=1+\dfrac{x+y}{1+xy}$ و بتوحيد المقامات نحصل على : $1+A=\dfrac{1+xy+x+y}{1+xy}$ أي

$1+A=\dfrac{(y+1)+x(y+1)}{1+xy}$ أي $1+A=\dfrac{(x+1)(y+1)}{1+xy}$ و هو المطلوب .

$1-A=1-\dfrac{x+y}{1+xy}$ و بتوحيد المقامات نحصل على : $1-A=\dfrac{1+xy-(x+y)}{1+xy}$ أي

$1-A=\dfrac{1+xy-x-y}{1+xy}$ أي $1-A=\dfrac{x(y-1)-(y-1)}{1+xy}$ أي $1-A=\dfrac{(x-1)(y-1)}{1+xy}$ و هو

المطلوب .

التمرين رقم 54 :

1) أكتب الأعداد التالية بمقامات ناطقة :

$\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ ، $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ، $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ بحيث n عدد طبيعي .

2) أحسب المجموع S الآتي : $S=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{144}+\sqrt{143}}$

حل مقترح :

1) كتابة الأعداد التالية بمقامات ناطقة :

$\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ بحيث n عدد طبيعي .

$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}^2-1^2}=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ أي $\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ أي $\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$.

$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ أي $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ أي

$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ أي

$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ أي $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

ملاحظة : جميع الكسور السابقة مقاماتها أعداد ناطقة تساوي 1 .

2) حساب المجموع S الآتي : $S=1+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{144}+\sqrt{143}}$

من السؤال السابق نعلم أن : $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}=\sqrt{2}-\sqrt{1}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ، ...... ،

$\frac{1}{\sqrt{144}+\sqrt{143}}=\sqrt{144}-\sqrt{143}$ لأنه بصفة عامة من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ و منه يصبح المجموع S كالآتي :

$S=1+\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{144}-\sqrt{143}$ ، و من الواضح أن الحدود من $\sqrt{2}$ حتى $\sqrt{143}$ توجد في المجموع مع معاكساتها أي (1 و $-\sqrt{1}$) و ($\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$) ($\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$) و ..... ($\sqrt{143}$ و $-\sqrt{143}$) بينما يوجد فقط $\sqrt{144}$ و لا يوجد معاكسه $-\sqrt{144}$ و منه نستنتج أن :

$S=\sqrt{144}$ أي $S=12$.

التمرين رقم 55 :

1) حلل كلا من العددين 1386 و 999 إلى جداء عوامل أولية .

2) إستنتج تحليلا للعدد $1386^2\times999^2$ إلى جداء عوامل أولية .

3) عين $PGCD(1386;999)$ و $PPCM(1386;999)$

4) أوجد قيمة المجموع : $\frac{1}{1386}+\frac{2}{999}$

5) ليكن العدد $\alpha=1,\underline{387}387\ldots$

- ما هي طبيعة العدد α ؟
- أعط الكتابة الكسرية لـ α ثم إستنتج شكله غير قابل للإختزال .

حل مقترح :

1) تحليل كلا من العددين 1386 و 999 إلى جداء عوامل أولية :

$$\begin{cases}1386=2\times3^2\times11\times7\\999=3^3\times37\end{cases}$$

2) إستنتاج تحليلا للعدد $1386^2\times999^2$ إلى جداء عوامل أولية :

أي $1386^2 \times 999^2 = \left(2\times 3^2 \times 11\times 7\right)^2 \times \left(3^3 \times 37\right)^2$

أي $1386^2 \times 999^2 = 2^2 \times 3^4 \times 11^2 \times 7^2 \times 3^6 \times 37^2$ $1386^2 \times 999^2 = 2^2 \times 3^{10} \times 11^2 \times 7^2 \times 37^2$.

3) تعيين $PGCD(1386;999)$ و $PPCM(1386;999)$:

$PGCD(1386;999)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة مأخوذة مرة واحدة و بأصغر أس و منه نجد :

$PGCD(1386;999) = 3^2$ أي $PGCD(1386;999) = 9$.

$PPCM(1386;999)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة و غير المشتركة مأخوذة مرة واحدة و بأكبر أس و منه

نجد : $PPCM(1386;999) = 2\times 3^3 \times 11\times 7\times 37$ أي $PPCM(1386;999) = 153846$.

4) إيجاد قيمة المجموع : $\frac{1}{1386}+\frac{2}{999}$

$$\frac{1}{1386}+\frac{2}{999}=\frac{1\times 999+2\times 1386}{1386\times 999}$$ أي $$\frac{1}{1386}+\frac{2}{999}=\frac{3^3\times 37+2^2\times 3^2\times 11\times 7}{2\times 3^2\times 11\times 7\times 3^3\times 37}$$ أي

$$\frac{1}{1386}+\frac{2}{999}=\frac{3^2\left(3\times 37+2^2\times 11\times 7\right)}{2\times 3^2\times 11\times 7\times 3^3\times 37}$$ أي $$\frac{1}{1386}+\frac{2}{999}=\frac{3\times 37+2^2\times 11\times 7}{2\times 11\times 7\times 3^3\times 37}$$ أي

$$\frac{1}{1386}+\frac{2}{999}=\frac{419}{153846}$$.

5) ليكن العدد $\alpha = 1,\underline{387}387\ldots$

- تحديد طبيعة العدد α :

α **عدد ناطق** مكتوب كتابة عشرية دورية بحيث الدور هو 387 .

- تعيين الكتابة الكسرية لـ α ثم إستنتاج شكله غير قابل للإختزال :

$\alpha = 1,\underline{387}387\ldots = 1+0,\underline{387}387\ldots$ و بوضع $x = 0,\underline{387}387\ldots$ ينتج : $\boxed{\alpha = 1+x}$.

بما أن عدد أرقام الدور هو 3 إذن نضرب المعادلة $x=0,\underline{3873}$ في 10^3 (في 1000) نحصل على :

$1000x=387,\underline{387}387\ldots$ أي $1000x=387+0,\underline{387}387\ldots$ ، و بما أن $x=0,\underline{387}387\ldots$

فينتج $1000x=387+x$ أي $1000x-x=387$ أي $999x=387$ و منه نجد $x=\dfrac{387}{999}$.

و منه ينتج : $\alpha=1+\dfrac{387}{999}$ أي $\alpha=\dfrac{1\times999+387}{999}$ أي $\alpha=\dfrac{1386}{999}$.

لإيجاد الشكل غير قابل للإختزال للكسر $\dfrac{1386}{999}$ يكفي أن نقسم كلا من البسط و المقام على نفس العدد و هو

$PGCD(1386;999)$ و من السؤال 3/ نعلم أن : $PGCD(1386;999)=9$ و منه نجد :

$\alpha=\dfrac{1386}{999}=\dfrac{1386/9}{999/9}=\dfrac{154}{111}$ و هو المطلوب .

التمرين رقم 56 :

ليكن العددين الحقيقيين a و b بحيث :

-1 $a+b=1$

-2 $a^2+b^2=2$

1) أنشر المقدار $(a+b)^2$ و إستنتج قيمة الجداء ab .

2) أنشر المقدار $(a^2+b^2)^2$ و إستنتج أن a^4+b^4 عدد عشري .

3) تحقق بالحساب أن : $a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ و $b=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ يحققان الشرطين -1 و -2

حل مقترح :

1) نشر المقدار $(a+b)^2$ و إستنتاج قيمة الجداء ab :

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ بحيث $a+b=1$ و $a^2+b^2=2$ و منه ينتج :

$1^2 = 2+2ab$ أي $2ab=-1$ و منه نجد $ab=-\frac{1}{2}$

2) نشر المقدار $(a^2+b^2)^2$ و إستنتاج أن a^4+b^4 عدد عشري :

$(a^2+b^2)^2 = (a^2)^2+(b^2)^2+2a^2\times b^2$ أي $(a^2+b^2)^2 = a^4+b^4+2(a\times b)^2$ بحيث

$a^2+b^2=2$ و $a\times b=-\frac{1}{2}$ و منه نجد $a^4+b^4=4-2\times\frac{1}{4}$ أي $a^4+b^4=4-\frac{1}{2}$ أي

$a^4+b^4=\frac{7}{2}$ ، و العدد $\frac{7}{2}$ عشري لأنه كسر غير قابل للإختزال و تحليل مقامه إلى جداء عوامل أولية لا يشتمل عددا أوليا يختلف عن 2 و يختلف عن 5 .

<u>طريقة أخرى</u> : يمكن كتابة $\frac{7}{2}=3,5$ و $3,5$ عدد عشري (لأن الجزء العشري منته) .

3) التحقق بالحساب أن : $a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ و $b=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ يحققان الشرطين 1- و 2-

لدينا : $\frac{2}{2}=\frac{1+\cancel{\sqrt{3}}+1-\cancel{\sqrt{3}}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ أي $a+b=1$

$a^2+b^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2$ و بالنشر نحصل على :

$a^2+b^2=\frac{1^2+2\times1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2+1^2-2\times1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2}{4}$ أي $a^2+b^2=\frac{1+3+1+3}{4}$ أي

$a^2+b^2=\frac{8}{4}$ و منه نجد $a^2+b^2=2$

التمرين رقم 57 :

n عدد طبيعي غير معدوم .

1) تحقق أن : $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$

2) باستعمال نتيجة السؤال 1) أوجد قيمة مبسطة للمجموع S الآتي :

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{99\times 100}$$

حل مقترح :

n عدد طبيعي غير معدوم .

1) التحقق أن : $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$

بتوحيد المقامات نحصل على : $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1(n+1)-1\times n}{n(n+1)}$ أي $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}$ و منه نجد :

$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ و هو المطلوب .

2) باستعمال نتيجة السؤال 1) إيجاد قيمة مبسطة للمجموع S الآتي :

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{99\times 100}$$

يمكن ملاحظة أن المجموع S يكتب من الشكل : $S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\ldots+\frac{1}{99\times 100}$

أي $S=\frac{1}{1\times(1+1)}+\frac{1}{2\times(2+1)}+\frac{1}{3\times(3+1)}+\frac{1}{4\times(4+1)}+\ldots+\frac{1}{99\times(99+1)}$ و بالتالي كل

حد في المجموع (كل كسر) يكتب من الشكل $\frac{1}{n(n+1)}$ و منه حسب السؤال 1) نتحصل على :

$$S=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$ أي

$$S=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\ldots-\cancel{\frac{1}{99}}+\cancel{\frac{1}{99}}-\frac{1}{100}$$ أي $S=\frac{1}{1}-\frac{1}{100}$

و منه نجد $S=\frac{100-1}{100}$ أي $S=\frac{99}{100}$

التمرين رقم 58 :

نعتبر العددين الطبيعيين $A=1200$ و $B=5292$.

1) حلل كلا من العددين A و B إلى جداء عوامل أولية ثم إستنتج تحليلا للجداء $A^2\times B^2$.

2) ما طبيعة العدد $\sqrt{A\times B}$ ؟

3) عين القيمة المضبوطة للعدد $\sqrt{A}-\sqrt{B}$.

4) عين $PGCD(A;B)$ و $PPCM(A;B)$

5) إختزل الكسر $\frac{A}{B}$ ثم أحسب المجموع $\frac{3}{A}+\frac{7}{B}-$

حل مقترح :

نعتبر العددين الطبيعيين $A=1200$ و $B=5292$.

1) تحليل كلا من العددين A و B إلى جداء عوامل أولية ثم إستنتاج تحليلا للجداء $A^2\times B^2$:

$$\begin{cases}A=1200=2^4\times3\times5^2\\B=5292=2^2\times3^3\times7^2\end{cases}$$ و منه يكون : $A^2\times B^2=\left(2^4\times3\times5^2\right)^2\times\left(2^2\times3^3\times7^2\right)^2$ أي

$A^2 \times B^2 = 2^8 \times 3^2 \times 5^4 \times 2^4 \times 3^6 \times 7^4$ أي $A^2 \times B^2 = 2^{12} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^4$.

2) تحديد طبيعة العدد $\sqrt{A \times B}$:

$\sqrt{A \times B} = \sqrt{2^4 \times 3 \times 5^2 \times 2^2 \times 3^3 \times 7^2}$ أي $\sqrt{A \times B} = \sqrt{2^6 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2}$ و منه نجد

$\sqrt{A \times B} = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ أي $\sqrt{A \times B} = 2520$ و هو عدد طبيعي أي $\sqrt{A \times B} \in \mathbb{N}$

3) تعيين القيمة المضبوطة للعدد $\sqrt{A} - \sqrt{B}$:

$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \sqrt{2^4 \times 3 \times 5^2} - \sqrt{2^2 \times 3^3 \times 7^2}$ و منه نجد $\sqrt{A} - \sqrt{B} = 2^2 \times 5\sqrt{3} - 2 \times 3 \times 7\sqrt{3}$

أي $\sqrt{A} - \sqrt{B} = 20\sqrt{3} - 42\sqrt{3}$ و منه نتحصل على : $\sqrt{A} - \sqrt{B} = -22\sqrt{3}$

4) تعيين $PGCD(A;B)$ و $PPCM(A;B)$:

$PGCD(A;B)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين A و A مأخوذة مرة واحدة و بأصغر أس

و منه نجد $PGCD(A;B) = 2^2 \times 3^1$ أي $PGCD(A;B) = 12$.

$PPCM(A;B)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة و غير المشتركة في تحليل العددين A و A مأخوذة مرة

واحدة و بأكبر أس و منه نجد $PPCM(A;B) = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2$ أي $PPCM(A;B) = 529200$

5) إختزال الكسر $\frac{A}{B}$:

الطريقة 1 : باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية

$\frac{A}{B} = \frac{2^4 \times 3 \times 5^2}{2^2 \times 3^3 \times 7^2}$ و بإختزال كل العوامل الأولية المشتركة نتحصل على : $\frac{A}{B} = \frac{2^2 \times 5^2}{3^2 \times 7^2}$ أي $\frac{A}{B} = \frac{100}{441}$

الطريقة 2 : باستعمال القاسم المشترك الأكبر $PGCD(A;B)$

نعلم أن $PGCD(A;B) = 12$ و منه بقسمة كل من البسط A و B على 12 نتحصل على :

$\frac{A}{B}=\frac{1200}{5292}=\frac{1200/12}{5292/12}=\frac{100}{441}$ و هو كسر غير قابل للإختزال .

حساب المجموع $-\frac{3}{A}+\frac{7}{B}$: $-\frac{3}{A}+\frac{7}{B}=-\frac{3}{1200}+\frac{7}{5292}$ و باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية

للعددين A و B نجد : $-\frac{3}{A}+\frac{7}{B}=-\frac{3}{2^4\times3\times5^2}+\frac{7}{2^2\times3^3\times7^2}$ أي بالإختزال نجد

$-\frac{3}{A}+\frac{7}{B}=-\frac{1}{2^4\times5^2}+\frac{1}{2^2\times3^3\times7}$ أي $-\frac{3}{A}+\frac{7}{B}=-\frac{1}{400}+\frac{1}{756}$ و منه ينتج :

$-\frac{3}{A}+\frac{7}{B}=\frac{-756+400}{400\times756}$ و منه نجد $-\frac{3}{A}+\frac{7}{B}=-\frac{356}{302400}$

ملاحظة : يمكن كتابة الكسر السابق على شكل كسر غير قابل للإختزال .

التمرين رقم 59 : x و y من $\mathbb{R}^+$.

1) بين أن : $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$

2) برهن صحة المساواة الآتية : $\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}=6$

3) برهن صحة المساواتين الآتيتين : $\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$ و

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=1$$

4) أحسب : $\left(1+\sqrt{5}\right)^2$ و $\left(2-\sqrt{5}\right)^2$ ثم إستنتج أن : $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-1$

حل مقترح : x و y من $\mathbb{R}^+$.

1) نبين أن : $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$

نبدأ أولا بحساب المقدار $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$ فنتحصل على :

$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2+2\sqrt{x}\times\sqrt{y}$ أي $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=x+y+2\sqrt{xy}$ و منه نجد

$\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}=\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$: يكافئ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$

2) البرهان على صحة المساواة الآتية : $\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}=6$

ننشر أولا المقدار $\left(\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}\right)^2$ فنتحصل على :

$$\left(\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}\right)^2=\sqrt{17+12\sqrt{2}}^2+\sqrt{17-12\sqrt{2}}^2+2\sqrt{17+12\sqrt{2}}\times\sqrt{17-12\sqrt{2}}$$

أي

$$\left(\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}\right)^2=17+12\sqrt{2}+17-12\sqrt{2}+2\sqrt{\left(17+12\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)}$$

و منه $\left(\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}\right)^2=17+12\sqrt{2}+17-12\sqrt{2}+2\left(17^2-\left(12\sqrt{2}\right)^2\right)$ أي

أي $\left(\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}\right)^2=34+2(289-288)$

$\left(\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}\right)^2=36$ و منه ينتج $\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{36}$ أي

$\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}=6$ و هو المطلوب .

3) البرهان على صحة المساواتين الآتيتين : $1+\sqrt{3}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}$ و

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=1$$

نبدأ أولا بحساب المقدار $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ فنتحصل على :

$\left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 1^2+\sqrt{3}^2+2\times1\times\sqrt{3}$ أي $\left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 4+2\sqrt{3}$ و منه $1+\sqrt{3}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

و كذلك $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2\left(2+\sqrt{3}\right)}$ أي $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}$

و منه صحة المساواة $1+\sqrt{3}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}$

من أجل المساواة الثانية نقوم بكتابة المقامات كأعداد ناطقة :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)}$$

أي $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3}$ أي

$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\cancel{\sqrt{2}}-1+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}+\sqrt{4}-\cancel{\sqrt{3}}$ أي

$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\sqrt{4}-1=2-1$ و منه

$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=1$ و هو المطلوب .

4) حساب : $\left(1+\sqrt{5}\right)^2$ و $\left(2-\sqrt{5}\right)^2$ ثم إستنتاج أن : $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-1$

بالنشر نجد : $\left(1+\sqrt{5}\right)^2=1^2+\sqrt{5}^2+2\times1\times\sqrt{5}$ و $\left(2-\sqrt{5}\right)^2=2^2+\sqrt{5}^2-2\times2\times\sqrt{5}$ و منه

$\left(1+\sqrt{5}\right)^2=6+2\sqrt{5}$ و $\left(2-\sqrt{5}\right)^2=9-4\sqrt{5}$

بما أن $6+2\sqrt{5}=\left(1+\sqrt{5}\right)^2$ فإن $\sqrt{6+2\sqrt{5}}=1+\sqrt{5}$ و بما أن $9-4\sqrt{5}=\left(2-\sqrt{5}\right)^2$ فإن

$\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$ أي $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=-\left(2-\sqrt{5}\right)$ أي $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$ لأن

$2-\sqrt{5}\prec 0$ و منه نحصل على :

$\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2+1+\sqrt{5}$ و منه $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-1$.

التمرين رقم 60 : برهن صحة المساويات التالية :

1) $\dfrac{\sqrt{8}+33}{7-\sqrt{2}}=\sqrt{2}+5$

2) $\dfrac{\left(9^{n+1}+9^n\right)^2}{\left(3^{2n+1}-3^{2n}\right)^2}=25$ ؛ $n\in\mathbb{N}$

3) $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}}-\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right)=-\dfrac{1}{4\sqrt{3}}$

حل مقترح :

1) بالضرب في المرافق نجد : $\dfrac{\sqrt{8}+33}{7-\sqrt{2}}=\dfrac{\left(\sqrt{8}+33\right)\left(7+\sqrt{2}\right)}{\left(7-\sqrt{2}\right)\left(7+\sqrt{2}\right)}$ أي

$\dfrac{\sqrt{8}+33}{7-\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{8}+\sqrt{16}+231+33\sqrt{2}}{7^2-\sqrt{2}^2}$ أي $\dfrac{\sqrt{8}+33}{7-\sqrt{2}}=\dfrac{14\sqrt{2}+235+33\sqrt{2}}{49-2}$ أي

$\dfrac{\sqrt{8}+33}{7-\sqrt{2}}=\dfrac{47\sqrt{2}+235}{47}$ و منه نجد $\dfrac{\sqrt{8}+33}{7-\sqrt{2}}=\sqrt{2}+5$

2) بكتابة $\dfrac{\left(9^{n+1}+9^n\right)^2}{\left(3^{2n+1}-3^{2n}\right)^2}=\dfrac{\left(9\times 9^n+9^n\right)^2}{\left(3\times 3^{2n}-3^{2n}\right)^2}$ ثم إستخراج 9^n كعامل مشترك من البسط و 3^{2n} كعامل

مشترك من المقام نجد :

$$\frac{\left(9^{n+1}+9^{n}\right)^{2}}{\left(3^{2n+1}-3^{2n}\right)^{2}}=\frac{\left(9^{n}\left(9+1\right)\right)^{2}}{\left(3^{2n}\left(3-1\right)\right)^{2}}$$ أي $$\frac{\left(9^{n+1}+9^{n}\right)^{2}}{\left(3^{2n+1}-3^{2n}\right)^{2}}=\frac{9^{2n}\times 10^{2}}{3^{4n}\times 2^{2}}$$ أي

$$\frac{\left(9^{n+1}+9^{n}\right)^{2}}{\left(3^{2n+1}-3^{2n}\right)^{2}}=\frac{9^{2n}\times 10^{2}}{\left(3^{2}\right)^{2n}\times 2^{2}}$$ أي $$\frac{\left(9^{n+1}+9^{n}\right)^{2}}{\left(3^{2n+1}-3^{2n}\right)^{2}}=\frac{\cancel{9^{2n}}\times 100}{\cancel{9^{2n}}\times 4}$$ و منه نجد

$$\boxed{\frac{\left(9^{n+1}+9^{n}\right)^{2}}{\left(3^{2n+1}-3^{2n}\right)^{2}}=\frac{100}{4}=25}$$.

3) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}-\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\right)$ بحيث $\sqrt{4}=2$ و منه نجد

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$ أي $$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}-2\times 2}{2\sqrt{3}}\right)$$ و منه

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3-4}{2\sqrt{3}}\right)$$ أي $$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{3}}$$ و منه نحصل على :

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=-\frac{1}{4\sqrt{3}}}$$.

التمرين رقم 61 :

ليكن العددان : $A=350$ و $B=315$

1) عين القاسم المشترك الأكبر $PGCD$ للعددين A و B

2) تحقق أن العددين $\frac{A}{PGCD\left(A;B\right)}$ و $\frac{B}{PGCD\left(A;B\right)}$ أوليان فيما بينهما .

3) ما هي طبيعة الكسر $\frac{B}{2A}$ ؟

4) عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين A و B ثم تحقق أن : $PPCM\left(A;B\right)=\dfrac{A\times B}{PGCD\left(A;B\right)}$

حل مقترح :

1) تعيين القاسم المشترك الأكبر $PGCD$ للعددين A و B :

أولا نحلل العددين A و B إلى جداء عوامل أولية فنتحصل على : $\begin{cases} A=2\times5^2\times7 \\ B=3^2\times5\times7 \end{cases}$

$PGCD\left(A;B\right)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل A و B مأخوذة مرة واحدة و بأصغر أس و منه

نجد : $PGCD\left(A;B\right)=5\times7$ أي $PGCD\left(A;B\right)=35$

2) التحقق أن العددين $\dfrac{A}{PGCD\left(A;B\right)}$ و $\dfrac{B}{PGCD\left(A;B\right)}$ أوليان فيما بينهما :

$\dfrac{A}{PGCD\left(A;B\right)}=\dfrac{350}{35}=10$ و $\dfrac{B}{PGCD\left(A;B\right)}=\dfrac{315}{35}=9$ بحيث $PGCD(10;9)=1$

لأنهما عددان متعاقبان ، و منه فالعددان 10 و 9 أوليان فيما بينهما .

3) ما هي طبيعة الكسر $\dfrac{B}{2A}$ ؟

$\dfrac{B}{2A}=\dfrac{315}{2\times350}$ و باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية نجد : $\dfrac{B}{2A}=\dfrac{3^2\times5\times7}{2\times2\times5^2\times7}$ أي

$\dfrac{B}{2A}=\dfrac{3^2}{2^2\times5}$ أي $\dfrac{B}{2A}=\dfrac{9}{20}$ و هو كسر غير قابل للإختزال ، و من جهة أخرى تحليل مقامه إلى جداء عوامل

أولية هو $20=2^2\times5$ لا يشتمل عددا أوليا باستثناء 2 و 5 و بالتالي فالعدد $\dfrac{9}{20}$ عشري أي $\dfrac{9}{20}\in\mathbb{D}$.

4) تعيين المضاعف المشترك الأصغر للعددين A و B ثم التحقق أن : $PPCM\left(A;B\right)=\dfrac{A\times B}{PGCD\left(A;B\right)}$

$PPCM(A;B)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة و غير المشتركة في تحليل A و B مأخوذة مرة واحدة و

بأكبر أس و منه نجد : $PPCM(A;B)=5^2\times7\times2\times3^2$ أي $PPCM(A;B)=3150$

من السؤال 1/ نعلم أن : $PGCD(A;B)=35$ ، إذن يكون : $\dfrac{350\times315}{35}=\dfrac{A\times B}{PGCD(A;B)}$ أي

$\dfrac{A\times B}{PGCD(A;B)}=3150$ و منه فعلا : $PPCM(A;B)=\dfrac{A\times B}{PGCD(A;B)}$.

التمرين رقم 62 : P و Q عددان معرفان كما يلي :

$P=15,714n8$ ، $Q=0,002349$ مع n عدد طبيعي .

1) عين n إذا علمت أن المدور إلى 10^{-4} للعدد P هو $15,7143$.

2) أكتب كلا من P و Q على الشكل العلمي .

3) حدد رتبة مقدار كل من P و Q ؛ ثم إستنتج رتبة مقدار العددين $P\times Q$ و $\dfrac{P}{Q}$.

حل مقترح :

1) تعيين n علما أن المدور إلى 10^{-4} للعدد P هو $15,7143$:

$P=15,\underline{714n}8$ و بما أن $8\geq5$ و المدور إلى 10^{-4} للعدد P هو $15,7143$ فإنه يكون حتما : $n=2$

أي $P=15,71428$.

2) كتابة كلا من P و Q على الشكل العلمي :

- الكتابة العلمية للعدد P هي : $1,571428\times10^1$ أزحنا الفاصلة بمرتبة واحدة نحو اليسار .
- الكتابة العلمية للعدد Q هي : $2,349\times10^{-3}$ أزحنا الفاصلة بثلاث مراتب نحو اليمين .

3) تحديد رتبة مقدار كل من P و Q :

- رتبة مقدار العدد P هي : 2×10^{1} لأن أقرب عدد صحيح إلى العدد $1,571428$ هو 2 .
- رتبة مقدار العدد Q هي : 2×10^{-3} لأن أقرب عدد صحيح إلى العدد $2,349$ هو 2 .

* إستنتاج رتبة مقدار العددين $P\times Q$ و $\frac{P}{Q}$:

تذكير : رتبة مقدار جداء عددين هي جداء رتبتي مقداري العددين و رتبة مقدار حاصل قسمة عددين هي حاصل قسمة رتبتي مقداري العددين .

و منه نجد : $\left(2\times10^{1}\right)\times\left(2\times10^{-3}\right)=4\times10^{1+(-3)}=4\times10^{-2}$ و كذلك نجد :

$$\frac{2\times10^{1}}{2\times10^{-3}}=1\times10^{1-(-3)}=10^{4}$$.

التمرين رقم 63 :

أعط الشكل العلمي ثم رتبة مقدار كل عدد من الأعداد الآتية :

$A=\frac{9\times14\times11^{2}}{15\times21\times22}$ ، $B=-0,1^{5}\times\left(-0,001^{2}\right)\times0,01^{3}$ ، $C=0,000359\times10^{13}$

$D=25120\times0,00935$ ، $E=550000\times39000$.

حل مقترح :

تحديد الكتابة العلمية و رتبة مقدار العدد A :

$A=\frac{9\times14\times11^{2}}{15\times21\times22}=\frac{9\times1,4\times10\times1,21\times10^{2}}{1,5\times10\times2,1\times10\times2,2\times10}$ أي $A=\frac{1,5246\times10^{4}}{6,93\times10^{3}}$ أي

$A=0,22\times10^{1}$ و منه فالكتابة العلمية للعدد A هي : $2,2\times10^{0}$.

أقرب عدد صحيح للعدد $2,2$ هو 2 و عليه رتبة مقدار العدد A هي : 2×10^{0} .

تحديد الكتابة العلمية و رتبة مقدار العدد B :

$B=-0,1^{5}\times\left(-0,001^{2}\right)\times0,01^{3}=-\left(1\times10^{-1}\right)^{5}\times\left(-\left(1\times10^{-3}\right)^{2}\right)\times\left(1\times10^{-2}\right)^{3}$ أي

$B=1\times10^{-5}\times1\times10^{-6}\times1\times10^{-6}$ و منه الشكل العلمي للعدد B هو : 1×10^{-17} .

رتبة مقدار العدد B هي : 1×10^{-17} .

تحديد الكتابة العلمية و رتبة مقدار العدد C :

$C=0,000359\times10^{13}=3,59\times10^{-4}\times10^{13}$ و منه يكون الشكل العلمي للعدد C هو : $3,59\times10^{9}$.

أقرب عدد صحيح للعدد $3,59$ هو 4 و عليه رتبة مقدار العدد C هي : 4×10^{9} .

تحديد الكتابة العلمية و رتبة مقدار العدد D :

$D=25120\times0,00935=2,5120\times10^{4}\times9,35\times10^{-3}$ أي $D=2,34872\times10^{1}\times10^{1}$ أي

$D=2,34872\times10^{2}$ و منه الشكل العلمي للعدد D هو : $2,34872\times10^{2}$.

أقرب عدد صحيح للعدد $2,34872$ هو 2 و عليه رتبة مقدار العدد D هي : 2×10^{2} .

تحديد الكتابة العلمية و رتبة مقدار العدد E :

$E=550000\times39000=5,5\times10^{5}\times3,9\times10^{4}$ أي

$E=2,145\times10^{1}\times10^{5}\times10^{4}$ أي $E=2,145\times10^{10}$

أي أن الشكل العلمي للعدد E هو : $2,145\times10^{10}$.

أقرب عدد صحيح للعدد $2,145$ هو 2 و عليه رتبة مقدار العدد E هي : 2×10^{10} .

التمرين رقم 64 : أعط رتبة مقدار الأعداد التالية :

$A=-0,0023$ ، $B=\dfrac{9,12\times10^{5}}{3,65\times10^{3}}$ ، $C=\dfrac{7860275,25}{0,002349}$ ،

. $D=0,00005734\times3274615,89$

حل مقترح :

الشكل العلمي للعدد A هو : $-2,3\times10^{-3}$.

أقرب عدد صحيح للعدد $-2,3$ هو -2 و عليه رتبة مقدار العدد A هي : -2×10^{-3} .

نعلم أن رتبة مقدار حاصل قسمة هي حاصل قسمة رتبتي المقدارين :

رتبة مقدار العدد $9,12\times10^{5}$ هي : 9×10^{5} لأن أقرب عدد صحيح للعدد $9,12$ هو 9

رتبة مقدار العدد $3,65\times10^{3}$ هي : 4×10^{3} لأن أقرب عدد صحيح للعدد $3,65$ هو 4

إذن نحصل على : $\dfrac{9\times10^{5}}{4\times10^{3}}=$ [illegible] $\times10^{2}$ بحيث أقرب عدد صحيح للعدد $2,5$ هو 3 و منه رتبة مقدار العدد

B هي : 3×10^{2} .

- نكتب أولا العدد $7860275,25$ على الشكل العلمي : $7,86027525\times10^{6}$ و منه رتبة مقدار العدد $7860275,25$ هي : 8×10^{6} لأن أقرب عدد صحيح للعدد $7,86027525$ هو 8

نكتب أولا العدد $0,002349$ على الشكل العلمي : $2,349\times10^{-3}$ و منه رتبة مقدار العدد $0,002349$ هي : 2×10^{-3} لأن أقرب عدد صحيح للعدد $2,349$ هو 2

إذن نحصل على : $\dfrac{8\times10^{6}}{2\times10^{-3}}=4\times10^{9}$ و منه رتبة مقدار العدد C هي : 4×10^{9} .

* نعلم أن رتبة مقدار جداء عددين هي جداء رتبتي المقدارين :

نكتب أولا العدد $0,00005734$ على الشكل العلمي : $5,734\times10^{-5}$ و منه رتبة مقدار العدد

$0,00005734$ هي : 6×10^{-5} لأن أقرب عدد صحيح للعدد $5,734$ هو 6

نكتب أولا العدد $3274615,89$ على الشكل العلمي : $3,27461589\times10^{6}$ و منه رتبة مقدار العدد

$3274615,89$ هي : 3×10^{6} لأن أقرب عدد صحيح للعدد $3,27461589$ هو 3

إذن نحصل على : $\left(6\times10^{-5}\right)\times\left(3\times10^{6}\right)$ أي 18×10^{1} و منه يكون الشكل العلمي هو : $1,8\times10^{2}$ و منه

رتبة مقدار العدد D هي : 2×10^{2} لأن أقرب عدد صحيح للعدد $1,8$ هو 2 .

التمرين رقم 65 :

ليكن العدد الحقيقي الغير معدوم x الذي يحقق : $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$

- أثبت أن $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ عدد طبيعي .

حل مقترح :

بما أن $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$ فإن : $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\sqrt{5}^2$ و بالنشر نجد : $x^2+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+2\times x\times\dfrac{1}{x}=5$ أي

$x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=5$ و منه نحصل على : $x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$ ، إذن $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ طبيعي .

تجدون هذا الملف في مجموعة الفايسبوك :

تلاميذ أستاذ الرياضيات حناش نبيل

لا تنسونا من صالح دعائكم ...