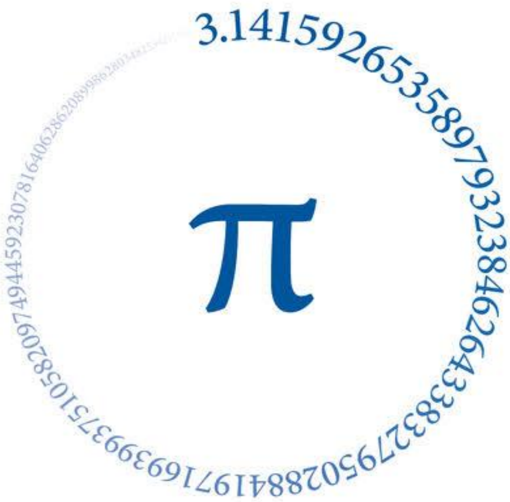
الرياضيات في الثانوية

تمارين متنوعة في محور الأعداد و الحساب

مرفقة بحلول مفصلة

34 تمرين

للسنة أولى ثانوي



$\boxed{\pi \neq 3,14}$

كتابة الأستاذ :

حناش نبيل

Octobre 2021

تمارين متنوعة في محور الأعداد و الحساب

التمرين رقم 01 :

بين أن الأعداد التالية هي أعداد طبيعية :

$A=\frac{3^{10}}{243}$ ، $B=\frac{\sqrt{722}}{\sqrt{2}}$ ، $C=\frac{(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta}$ حيث $\alpha\beta\neq 0$ ،

$D=\sqrt{22+\sqrt{5+\sqrt{15+\sqrt{1}}}}$ ، $E=\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$ ، $F=\left(\sqrt{\sqrt{17}}\right)^4$ ، $G=\sqrt{\sqrt{11^8}}$.

التمرين رقم 02 :

بسط الأعداد التالية ثم عين أصغر مجموعة تنتمي إليها :

$A=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2$ ، $B=\frac{3}{\sqrt{2}+1}-3\sqrt{2}$ ، $C=\left(\sqrt{18}-4\right)\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}+1\right)$ ،

$D=\frac{3\sqrt{2}+15}{7\sqrt{2}+35}$ ، $E=\frac{2\pi}{3,14}$ ، $F=\frac{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)}{700}$ ، $G=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\right)$ ،

$H=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ ، $I=\frac{7\pi+14}{3\pi+6}$ ، $J=\left(2+\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{2}$ ، $K=\sqrt{1-\frac{7}{25}}\times\sqrt{1+\frac{7}{25}}$ ،

$Y=\frac{1}{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{3+\sqrt{5}}$ ، $W=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}$ ، $Z=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}$

التمرين رقم 03 :

باستعمال قواعد الحساب على القوى الصحيحة ، بسط الأعداد التالية ثم حدد أصغر مجموعة تنتمي إليها :

$A=49^{-4}\times 35^{8}\times 25^{-3}$ ، $B=\left(\frac{5}{7}\right)^{-4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{8}(3\times 5)^{6}$ ، $C=\frac{15^{-4}\times 18^{7}}{25^{-3}\times 16^{-3}}$ ،

$D=\dfrac{(2)^{6}\times(15)^{3}\times(-3)^{6}}{(-16)^{4}\times(10)^{5}\times(27)^{-3}}$.

التمرين رقم 04 :

x و y عددان من $\mathbb{R}-\{-1,1\}$. نضع : $E=\dfrac{x+y}{1+xy}$

1- أوجد قيمة E من أجل $x=\dfrac{1}{3}$ و $y=-\dfrac{2}{5}$.

2- بسط : $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2}$ و $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2}$.

3- من أجل $x=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ و $x=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ ؛ أحسب قيمة E .

4- بين أنه من أجل كل x و y من $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ فإن :

$1-E=\dfrac{(x-1)(y-1)}{1+xy}$ و $1+E=\dfrac{(x+1)(y+1)}{1+xy}$.

التمرين رقم 05 :

x و y عددان حقيقيان حيث : $x=\sqrt{75}-4\sqrt{3}+\sqrt{2}\times\dfrac{6}{\sqrt{18}}$ و $y=\left(\sqrt{3}-1\right)^{2}+\sqrt{3}-2$

1- أثبت أن : $x=2+\sqrt{3}$ و $y=2-\sqrt{3}$.

2- أحسب الجداء $x\times y$ ثم إستنتج أن : $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4$

3- z عدد حقيقي حيث : $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)+2y-(x-y)^{2}$

✓ بسط العدد الحقيقي z ثم حدد أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد z (أصغر بمفهوم الإحتواء) .

التمرين رقم 06 :

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

عين الكتابة الكسرية للأعداد الناطقة التالية إنطلاقا من كتابتها العشرية الدورية :

$A=0,\underline{14}1414\ldots$ ، $B=34,\underline{21}2121\ldots$ ، $C=5,\underline{245}245245\ldots$ ، $D=-3,1\underline{72}7272\ldots$

التمرين رقم 07 :

ليكن العددان a و b حيث : $b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (a يسمى العدد الذهبي)

1- أحسب ab و $a+b$.

2- إستنتج قيمة كلا من a^2+b^2 و a^4+b^4 .

3- بين أن $a^2=a+1$ و أن $a^3=2a+1$.

التمرين رقم 08 :

ليكن a و b عددان حقيقيان يحققان :

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=2 \end{cases} \ldots\ldots(1)$$

1- أحسب ab .

2- برهن أن : a^4+b^4 عدد عشري .

3- برهن بالحساب أن : $a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ و $b=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ يحققان الشرطين (1) .

التمرين رقم 09 :

1- من دون إستعمال حاسبة ؛ بين أن العددين $A=\dfrac{231}{350}$ و $B=\dfrac{425}{200}$ عشريان .

2- هل العدد $C=\dfrac{71}{15}$ عشري ؟ علل .

3- من بين الأعداد التالية ؛ حدد تلك التي هي أولية :

223 ، 95578 ، 111111 ، 121 ، 317 ، 251 ، 1961 ، 633335

التمرين رقم 10 :

1- أكتب الأعداد التالية بمقامات ناطقة : $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(n عدد طبيعي) .

2- أحسب المجموع S التالي : $S=1+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+......+\frac{1}{\sqrt{1670}+\sqrt{1669}}$

التمرين رقم 11 :

ليكن n عدد طبيعي .

1- بين أن : $\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

2- إستنتج قيمة المجموع S حيث : $S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+......+\frac{1}{99\times 100}$

التمرين رقم 12 :

n عدد طبيعي غير معدوم .

1- أثبت صحة المساواة التالية : $\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

2- إستنتج قيمة المجموع S حيث : $S=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+......+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$

التمرين رقم 13 :

1- أكتب على أبسط صورة ممكنة العدد A حيث :

$$A=\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times......\times\left(1+\frac{1}{1441}\right)\times\left(1+\frac{1}{1442}\right)$$

2- n عدد طبيعي غير معدوم .

أ) بين أن : $1-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n+1}{n}$

ب) أكتب على أبسط شكل ممكن العدد B حيث :

$$B=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\times\ldots\ldots\times\left(1-\frac{1}{200^2}\right)$$

التمرين رقم 14 :

تعطى العبارة Q حيث : $Q=(n+1)^2-n^2$

1- أنشر ثم بسط العبارة Q .

2- إستنتج أن كل عدد فردي يمكن كتابته على شكل فرق مربعي عددين طبيعيين متتاليين .

3- تحقق من هذه الخاصية من أجل العددين 13 و 41 .

التمرين رقم 15 :

برهن ما يلي :

1- من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $\alpha=7^{n+1}-7^n$ يقبل القسمة على 3 و العدد $\beta=2^{n+3}-2^{n+1}+2^n$ يقبل القسمة على 7 .

2- من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $2\times5^{n+1}+5^n$ يقبل القسمة على 11 .

3- من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $\lambda=1+(n+1)^2+(n+2)^2$ زوجي .

4- مجموع عددين طبيعيين متتاليين يساوي فرق مربعيهما .

5- مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي .

6- جداء عددين فرديين هو عدد فردي .

7- مجموع ثلاثة أعداد طبيعية متتالية هو عدد مضاعف لـ 3 .

-8 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=4$.

التمرين رقم 16 :

إذا كان α عدد حقيقي غير معدوم يحقق : $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\sqrt{5}$ ؛

أثبت أن $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ عدد طبيعي .

التمرين رقم 17 :

ليكن α عدد حقيقي موجب و غير معدوم يحقق : $\alpha-\dfrac{1}{\alpha}=1$

-1 بين أن $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\sqrt{5}$.

-2 إستنتج أن : $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

التمرين رقم 18 :

نعتبر العدد الطبيعي a حيث : $a=1+7+7^2+7^3+\ldots\ldots+7^{15}$

-1 أكتب $7a+1$ بدلالة a .

-2 إستنتج أن : $6a=7^{16}-1$ و أن : $a=8\left(7^2+1\right)\left(7^4+1\right)\left(7^8+1\right)$

التمرين رقم 19 :

-1 برهن أنه من أجل كل $x,y\in\mathbb{R}^+$ فإن : $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$

-2 إستنتج أن : $\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}=6$

-3 برهن صحة المساوتين الآتيتين : $1+\sqrt{3}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}$ و

$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=1$.

-4 أحسب $\left(1+\sqrt{5}\right)^2$ و $\left(2-\sqrt{5}\right)^2$ ثم إستنتج أن : $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-1$.

التمرين رقم 20 :

α و β عددان طبيعيان حيث : $\begin{cases}\alpha+\beta=12\\ \alpha^2-\beta^2=96\end{cases}$

-1 أحسب $\alpha-\beta$.

-2 إستنتج قيمتي α و β .

-3 x و y عددان طبيعيان حيث : $x^2-y^2=401$

✓ تحقق أن العدد 401 أولي .

✓ عين قيمة كلا من x و y .

التمرين رقم 21 :

x و y عددان حقيقيان حيث : $x=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$ و $y=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$

-1 أحسب كلا من x^2+y^2 و xy ؛ ثم بين أن : $x+y=4$.

-2 إجعل مقام كل من x و y عددا ناطقا .

التمرين رقم 22 :

a و b عددان حقيقيان موجبان حيث $a>b$ يحققان ما يلي :

$a+b=\sqrt{5}$ و $ab=1$.

-1 أحسب $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ثم $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

2- إستنتج $a-b$ ثم قيمة كل من العددين a و b .

3- α و β عددان حقيقيان حيث : $\alpha=\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ و $\beta=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

أ) تحقق أن : $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$

ب) أحسب $\alpha^2+\beta^2$ و $\alpha\beta$ ثم استنتج قيمة مبسطة للمجموع $\alpha+\beta$.

التمرين رقم 23 :

برهن صحة المساويات الآتية :

1- $\frac{1000-0,00003^2-10^3}{6\times10^{-9}}=-0,15$

2- $n\in\mathbb{N}$ ؛ $\frac{\left(9^{n+1}+9^n\right)^2}{\left(3^{2n+1}-3^{2n}\right)^2}=25$

3- $44444^2+33333^2=55555^2$

4- $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=-\frac{1}{4\sqrt{3}}$

5- $\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}=16$

6- $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$

التمرين رقم 24 :

نعتبر العبارة : $P(n)=n^2+n+41$ حيث n عدد طبيعي .

1- أحسب $P(0)$ ؛ $P(1)$ ؛ $P(2)$ ؛ $P(3)$ ؛ $P(4)$.

2- بين أن الأعداد الناتجة أولية .

3- هل العبارة $P(n)$ تعطي دائما أعدادا أولية ؟

التمرين رقم 25 :

برهن أن العدد A حيث : $A=\sqrt{88-18\sqrt{7}}-\sqrt{71-16\sqrt{7}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ هو عدد طبيعي .

التحليل إلى جداء عوامل أولية (PGCD ، PPCM)

التمرين رقم 26 :

1- حلل إلى جداء عوامل أولية كلا من العددين 1386 و 999 .

2- إستنتج تحليلا إلى جداء عوامل أولية للعددين 1386×999 و $1386^2\times999^2$.

3- أحسب $PGCD(1386;999)$ و $PPCM(1386;999)$.

4- نعتبر العدد $\lambda=1,\underline{387}387\dots$:

- ✓ ما هي طبيعة العدد λ ؟
- ✓ عين الكتابة الكسرية للعدد λ إنطلاقا من كتابته العشرية الدورية السابقة .
- ✓ إستنتج الشكل غير قابل للإختزال للعدد λ .

التمرين رقم 27 :

α ، β و γ ثلاثة أعداد حقيقية حيث : $\alpha=\dfrac{2^3\times3^2\times5^2}{5\times10}$ ؛ $\beta=\dfrac{2^3\times3\times5\times10^2}{2^2\times5^2}$ و

$\gamma=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$.

1- بسط الأعداد α ، β و γ .

2- عين $PGCD(\alpha;\beta)$ و $PPCM(\alpha;\beta)$.

3- هل $\dfrac{\alpha}{\beta}$ عدد عشري ؟

التمرين رقم 28 :

نعتبر العددين الطبيعيين A و B حيث : $A=1200$ و $B=5292$

1- حلل إلى جداء عوامل أولية كلا من العددين A و B ثم إستنتج تحليلا للجداء $A^2\times B^2$.

2- ما طبيعة العدد $\sqrt{A\times B}$ ؟ برر جوابك .

3- عين القيمة المضبوطة للعدد $\sqrt{B}-\sqrt{A}$.

4- أحسب $PGCD(A;B)$ و $PPCM(A;B)$ ؛ ثم تحقق أن :

$$PGCD(A;B)\times PPCM(A;B)=A\times B$$

5- إختزل الكسر $\frac{B}{A}$ ؛ ثم أحسب المجموع $\frac{7}{B}+\frac{3}{A}-$.

التمرين رقم 29 :

ليكن α و β عددان طبيعيان حيث : $\alpha=350$ و $\beta=315$.

1- عين القاسم المشترك الأكبر $PGCD$ للعددين α و β .

2- تحقق أن العددين $\frac{\alpha}{PGCD(\alpha;\beta)}$ و $\frac{\beta}{PGCD(\alpha;\beta)}$ أوليان فيما بينهما .

3- ما هي طبيعة الكسر $\frac{\beta}{2\alpha}$ ؟

4- عين المضاعف المشترك الأصغر $PPCM$ للعددين α و β ثم تحقق أن :

$$PPCM(\alpha;\beta)=\frac{\alpha\times\beta}{PGCD(\alpha;\beta)}$$

التمرين رقم 30 :

1- حلل إلى جداء عوامل أولية كلا من العددين 156 و 84 .

2- أحسب $PGCD$ و $PPCM$ لـ 156 و 84 .

3- إختزل الكسر $\frac{156}{84}$ ؛ ثم أحسب الفرق $\frac{13}{84}-\frac{5}{156}$.

4- عين أصغر عدد طبيعي n بحيث يكون $n84$ مربعا تاما .

التمرين رقم 31 :

ليكن A **و** B **عددان طبيعيان حيث :** $A=2^2\times3\times7^2$ **و** $B=25^4\times3^4\times21^2$ **.**

1- ما هو عدد قواسم A **؟ عينها في جدول .**

2- أعط تحليلا إلى جداء عوامل أولية للأعداد : B **؛** B^2 **؛** A^2 **و** B^2A **.**

3- عين أصغر عدد طبيعي n **بحيث يكون** $n\times A$ **مربعا تاما .**

4- عين أصغر عدد طبيعي m **بحيث يكون** $m\times B$ **مكعبا لعدد طبيعي .**

حل التمرين رقم 01 :

نبين أن الأعداد التالية هي أعداد طبيعية :

$A=\frac{3^{10}}{243}$: نحلل المقام 243 إلى جداء عوامل أولية فنجد $243=3^5$ ، إذن

$A=\frac{3^{10}}{243}=\frac{3^{10}}{3^5}=3^{10-5}=3^5=243\in\mathbb{N}$.

$B=\frac{\sqrt{722}}{\sqrt{2}}$: نطبق قواعد الحساب على الجذور فنجد : $B=\frac{\sqrt{722}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{722}{2}}=\sqrt{361}=19\in\mathbb{N}$

$C=\frac{(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)-(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha\beta}$ حيث $\alpha\beta\neq 0$ أي

$C=\frac{\cancel{\alpha^2}+2\alpha\beta+\cancel{\beta^2}-\cancel{\alpha^2}+2\alpha\beta-\cancel{\beta^2}}{\alpha\beta}=\frac{4\alpha\beta}{\alpha\beta}=4\in\mathbb{N}$.

$D=\sqrt{22+\sqrt{5+\sqrt{15+\sqrt{1}}}}$: بما أن $\sqrt{15+\sqrt{1}}=\sqrt{16}=4$ فإن $5+\sqrt{15+\sqrt{1}}=5+4=9$ و منه $\sqrt{5+\sqrt{15+\sqrt{1}}}=\sqrt{9}=3$ ، إذن $22+\sqrt{5+\sqrt{15+\sqrt{1}}}=22+3=25$ و منه نتحصل على :

$D=\sqrt{22+\sqrt{5+\sqrt{15+\sqrt{1}}}}=\sqrt{25}=5\in\mathbb{N}$.

$E=\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}=\sqrt{\frac{(2^3)^{10}+(2^2)^{10}}{(2^3)^4+(2^2)^{11}}}=\sqrt{\frac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}}=\sqrt{\frac{2^{20}\cancel{(1+2^{10})}}{2^{12}\cancel{(1+2^{10})}}}=\sqrt{\frac{2^{20}}{2^{12}}}$ أي

$E=\sqrt{2^{20-12}}=\sqrt{2^8}=\sqrt{(2^4)^2}=2^4=16\in\mathbb{N}$.

$F=\left(\sqrt{\sqrt{17}}\right)^4=\sqrt{\sqrt{17}^{\,2}}^{\,2}=17\in\mathbb{N}$.

$G=\sqrt{\sqrt{11^8}}=\sqrt{\sqrt{(11^4)^2}}=\sqrt{11^4}=\sqrt{(11^2)^2}=11^2=121\in\mathbb{N}$

حل التمرين رقم 02 :

تبسيط الأعداد التالية ثم تعيين أصغر مجموعة تنتمي إليها : (أصغر بمفهوم الإحتواء)

$A=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{4}+\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{4}=\frac{4-2\sqrt{3}}{4}+\frac{4+2\sqrt{3}}{4}$ أي $A=\frac{8}{4}$ و منه

ينتج : $A=2$ و عليه تكون أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد A هي $\mathbb{N}$ (الطبيعية) .

$B=\frac{3}{\sqrt{2}+1}-3\sqrt{2}=\frac{3\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}-3\sqrt{2}=\frac{3\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}^2-1^2}-3\sqrt{2}=3\left(\sqrt{2}-1\right)-3\sqrt{2}$ أي

$B=\cancel{3\sqrt{2}}-3-\cancel{3\sqrt{2}}$ و منه ينتج : $B=-3$ و عليه تكون أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد B هي $\mathbb{Z}$ (الصحيحة النسبية) .

$C=\left(\sqrt{18}-4\right)\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}+1\right)=\left(3\sqrt{2}-4\right)\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}+1\right)=\frac{9}{4}\sqrt{2}^2+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}-4$ أي

$C=\frac{9}{2}+\cancel{3\sqrt{2}}-\cancel{3\sqrt{2}}-4$ أي $C=\frac{9-4\times 2}{2}$ أي $C=\frac{1}{2}$ و عليه تكون أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد C هي $\mathbb{D}$ (الأعداد العشرية) .

$D=\frac{3\sqrt{2}+15}{7\sqrt{2}+35}=\frac{\left(3\sqrt{2}+15\right)\left(7\sqrt{2}-35\right)}{\left(7\sqrt{2}+35\right)\left(7\sqrt{2}-35\right)}=\frac{21\sqrt{2}^2-\cancel{105\sqrt{2}}+\cancel{105\sqrt{2}}-525}{\left(7\sqrt{2}\right)^2-\left(35\right)^2}$ أي

$D=\frac{483}{1127}$ و هو كسر يقبل الإختزال حيث $PGCD\left(483;1127\right)=161$ ؛ إذن $D=\frac{3}{7}$ و هو كسر غير قابل للإختزال و مقامه ليس من الشكل $2^n\times 5^m$ حيث n و m عددان طبيعيان و بالتالي فهو ليس عشريا ، و عليه تكون أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد D هي $\mathbb{Q}$ (الأعداد الناطقة) .

$E=\frac{2\pi}{3{,}14}$ حيث نعلم أن $\pi\neq 3{,}14$ لأن π عدد أصم (غير ناطق) و العدد E هو أيضا عدد أصم ، و عليه تكون أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد E هي $\mathbb{R}$ (مجموعة الأعداد الحقيقية) .

$F=\frac{3-4}{700}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-(2)^2}{700}=\frac{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)}{700}=F$ أي $F=-\frac{1}{700}$ و هو كسر غير قابل للإختزال و مقامه 700 يحلل : $700=2^2\times5^2\times7$ و هو ليس من الشكل $2^n\times5^m$ حيث n و m عددان طبيعيان و منه فالعدد F ليس عشريا ؛ و عليه تكون أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد F هي $\mathbb{Q}$ (الأعداد الناطقة) .

$G=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\right)=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}-\frac{4}{5}$ أي $G=\frac{7}{3}-\frac{4}{5}=\frac{7\times5-4\times3}{15}=\frac{23}{15}$ و هو كسر غير قابل للإختزال حيث $15=3\times5$ ليس من الشكل $2^n\times5^m$ حيث n و m عددان طبيعيان و بالتالي فالعدد G ليس عشريا ؛ و عليه تكون أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد G هي $\mathbb{Q}$ (الأعداد الناطقة) .

$H=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}-\frac{1\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2-1^2}=\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}+1\right)$ أي $H=-1$ و عليه تكون أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد H هي $\mathbb{Z}$ (الصحيحة النسبية) .

$I=\frac{7\pi+14}{3\pi+6}=\frac{7\cancel{(\pi+2)}}{3\cancel{(\pi+2)}}=\frac{7}{3}$ حيث الكسر $\frac{7}{3}$ غير قابل للإختزال و مقامه 3 ليس من الشكل $2^n\times5^m$ حيث n و m عددان طبيعيان و بالتالي فهو ليس عددا عشريا ، و عليه تكون أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد I هي $\mathbb{Q}$ (الأعداد الناطقة) .

$J=\left(2+\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{2}=(2)^2+\cancel{4\sqrt{2}}+\left(\sqrt{2}\right)^2-\cancel{4\sqrt{2}}=6$ و عليه تكون أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد J هي $\mathbb{N}$ (الأعداد الطبيعية) .

$K=\sqrt{1-\frac{7}{25}}\times\sqrt{1+\frac{7}{25}}=\sqrt{\left(1-\frac{7}{25}\right)\left(1+\frac{7}{25}\right)}=\sqrt{(1)^2-\left(\frac{7}{25}\right)^2}$ أي $K=\sqrt{1-\frac{49}{625}}=\sqrt{\frac{625-49}{625}}=\frac{\sqrt{576}}{\sqrt{625}}=\frac{24}{25}$ حيث أن الكسر $\frac{24}{25}$ غير قابل للإختزال و مقامه 25 يكتب : $25=5^2=2^0\times5^2$ و هو من الشكل $2^n\times5^m$ ($n=0$ ، $m=2$) فهو إذن عدد عشري ، و عليه أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد K هي $\mathbb{D}$ (الأعداد العشرية) .

أي $Y=\frac{1}{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{3+\sqrt{5}}=\frac{1\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}+\frac{1\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}$

أي $Y=\frac{3+\sqrt{5}}{(3)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}+\frac{3-\sqrt{5}}{(3)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{3+\cancel{\sqrt{5}}+3-\cancel{\sqrt{5}}}{9-5}$ أي $Y=\frac{3}{2}$ حيث أن الكسر $\frac{3}{2}$ غير قابل للإختزال و مقامه 2 يكتب : $2=2^1\times5^0$ و هو من الشكل $2^n\times5^m$ ($n=1$ ، $m=0$) فهو إذن عدد عشري ، و عليه أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد Y هي $\mathbb{D}$ (الأعداد العشرية) .

$2+\frac{1}{4}=\frac{2\times4+1}{4}=\frac{9}{4}$ و منه ينتج $2+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}=2+\frac{4}{9}=\frac{2\times9+4}{9}=\frac{22}{9}$ و منه ينتج :

$2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}=2+\frac{9}{22}$ أي $\frac{53}{22}=\frac{2\times22+9}{22}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$ و منه ينتج :

$W=\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}}=\frac{22}{53}$ حيث أن الكسر $\frac{22}{53}$ غير قابل للإختزال و مقامه 53 هو عدد أولي لا يمكن كتابته من الشكل $2^n\times5^m$ حيث n و m عددان طبيعيان و بالتالي W ليس عددا عشريا ، و عليه أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد W هي $\mathbb{Q}$ (الأعداد الناطقة) .

$\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{1\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{1-\sqrt{2}}{(1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}-1$ و منه $2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$ و منه

$\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{1\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{1-\sqrt{2}}{(1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}-1$ و منه ينتج :

$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}=1+\sqrt{2}$ و منه $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}=\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$ ؛ إذن ينتج :

$Z=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}=1+\sqrt{2}-1$ أي $Z=\sqrt{2}$ و هو عدد أصم ينتمي إلى $\mathbb{R}$ (مجموعة الأعداد الحقيقية) .

حل التمرين رقم 03 :

باستعمال قواعد الحساب على القوى الصحيحة ، نبسط الأعداد التالية ثم نحدد أصغر مجموعة تنتمي إليها :

$A=49^{-4}\times35^{8}\times25^{-3}$: بالتحليل إلى جداء عوامل أولية نجد :

أي $A=49^{-4}\times35^{8}\times25^{-3}=\left(7^{2}\right)^{-4}\times(5\times7)^{8}\times\left(5^{2}\right)^{-3}$

$A=(7)^{-8}\times(5)^{8}\times(7)^{8}\times(5)^{-6}=(7)^{-8+8}\times(5)^{8-6}=(7)^{0}\times(5)^{2}=25$ و منه أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد A هي مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

أي $B=\left(\frac{5}{7}\right)^{-4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{8}(3\times5)^{6}=\frac{(5)^{-4}}{(7)^{-4}}\times\frac{(3)^{8}}{(4)^{8}}\times(3)^{6}\times(5)^{6}$

$B=\frac{(5)^{-4+6}}{(7)^{-4}}\times\frac{(3)^{8+6}}{(4)^{8}}=\frac{(3)^{14}\times(7)^{4}\times(5)^{2}}{(2)^{16}}$ و هو كسر غير قابل للإختزال و مقامه من الشكل $2^{n}\times5^{m}$ حيث $n=16$ و $m=0$ و بالتالي أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد B هي مجموعة الأعداد العشرية $\mathbb{D}$.

أي $C=\frac{15^{-4}\times18^{7}}{25^{-3}\times16^{-3}}=\frac{(3\times5)^{-4}\times\left(2\times3^{2}\right)^{4}}{\left(5^{2}\right)^{-3}\times\left(2^{4}\right)^{-3}}=\frac{(3)^{-4}\times(5)^{-4}\times(2)^{4}\times(3)^{8}}{(5)^{-6}\times(2)^{-12}}$

$C=(3)^{-4+8}\times(5)^{-4+6}\times(2)^{4+12}=(2)^{16}\times(3)^{4}\times(5)^{2}$ و بالتالي أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد C هي مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

أي $D=\dfrac{(2)^6\times(15)^3\times(-3)^6}{(-16)^4\times(10)^5\times(27)^{-3}}=\dfrac{(2)^6\times(3\times5)^3\times(3)^6}{(2^4)^4\times(2\times5)^5\times(3^3)^{-3}}=\dfrac{(2)^6\times(3)^3\times(5)^3\times(3)^6}{(2)^{16}\times(2)^5\times(5)^5\times(3)^{-9}}$

$D=\dfrac{(2)^6\times(3)^9\times(5)^3}{(2)^{21}\times(3)^{-9}\times(5)^5}=\dfrac{(3)^{9+9}}{(2)^{21-6}\times(5)^{5-3}}=\dfrac{(3)^{18}}{(2)^{15}\times(5)^2}$ و هو كسر غير قابل للإختزال و مقامه

من الشكل $2^n\times5^m$ حيث $n=15$ و $m=2$ و بالتالي أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد D هي مجموعة الأعداد العشرية $\mathbb{D}$.

حل التمرين رقم 04 :

x و y عددان من $\mathbb{R}-\{-1,1\}$. نضع : $E=\dfrac{x+y}{1+xy}$

1- إيجاد قيمة E من أجل $x=\dfrac{1}{3}$ و $y=-\dfrac{2}{5}$:

من أجل $x=1/3$ و $y=-2/5$ نجد : $E=\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}}=\dfrac{\frac{1\times5-2\times3}{3\times5}}{1-\frac{2}{15}}=\dfrac{\frac{-1}{15}}{\frac{15-2}{15}}=-\dfrac{1}{13}$

2- تبسيط العددين $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ و $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$:

$$\begin{cases}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=5-2\sqrt{6}\\\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=5+2\sqrt{6}\end{cases}$$

3- من أجل $x=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ و $x=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ ؛ حساب قيمة E :

من السؤال السابق وجدنا أن : $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=5-2\sqrt{6}$ و منه $\sqrt{3}-\sqrt{2}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ و كذلك

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=5+2\sqrt{6}$ و منه $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ ؛ إذن ينتج :

$$E=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{1+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\sqrt{5+2\sqrt{6}}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\cancel{\sqrt{2}}\right)+\left(\sqrt{3}+\cancel{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$ أي $E=\sqrt{3}$

4- نبين أنه من أجل كل x و y من $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ فإن :

$$1-E=\frac{(x-1)(y-1)}{1+xy}$$ و $$1+E=\frac{(x+1)(y+1)}{1+xy}$$:

$$1-E=1-\frac{x+y}{1+xy}=\frac{1(1+xy)-(x+y)}{1+xy}=\frac{xy-y-x+1}{1+xy}=\frac{y(x-1)-(x-1)}{1+xy}$$ أي

$1-E=\dfrac{(x-1)(y-1)}{1+xy}$ و هو المطلوب .

$$1+E=1+\frac{x+y}{1+xy}=\frac{1(1+xy)+x+y}{1+xy}=\frac{xy+y+x+1}{1+xy}=\frac{y(x+1)+(x+1)}{1+xy}$$ أي

$1+E=\dfrac{(x+1)(y+1)}{1+xy}$ و هو المطلوب .

حل التمرين رقم 05 :

x و y عددان حقيقيان حيث : $x=\sqrt{75}-4\sqrt{3}+\sqrt{2}\times\dfrac{6}{\sqrt{18}}$ و $y=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\sqrt{3}-2$

1- إثبات أن : $x=2+\sqrt{3}$ و $y=2-\sqrt{3}$.

باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية للعددين 75 و 18 نجد : $\begin{cases}75=3\times5^2\\18=2\times3^2\end{cases}$ و منه ينتج :

$$x=\sqrt{3\times5^2}-4\sqrt{3}+\sqrt{2}\times\frac{6}{\sqrt{2\times3^2}}=5\sqrt{3}-4\sqrt{3}+\sqrt{2}\times\frac{6}{3\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\frac{6}{3}$$ أي $x=2+\sqrt{3}$

و كذلك نجد : $y=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}+(1)^2+\sqrt{3}-2=2-\sqrt{3}$

-2 حساب الجداء $x\times y$ ثم إستنتاج أن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$

من السؤال السابق ينتج : $x\times y=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=\left(2\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=4-3=1$

و $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{x\times y}$ و مما سبق لدينا $x\times y=1$ و بالتالي $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{\left(2+\cancel{\sqrt{3}}\right)+\left(2-\cancel{\sqrt{3}}\right)}{1}=4$

-3 z عدد حقيقي حيث : $z=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2y-\left(x-y\right)^2$

✓ تبسيط العدد الحقيقي z ثم تحديد أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد z (أصغر بمفهوم الإحتواء) :

أي $z=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2y-\left(x-y\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4+2\left(2-\sqrt{3}\right)-\left(2\sqrt{3}\right)^2$

$z=\cancel{2\sqrt{3}}+4-\cancel{2\sqrt{3}}-12$ و منه نجد : $z=-8$ ؛ و بالتالي أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد z هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$.

حل التمرين رقم 06 :

تعيين الكتابة الكسرية للأعداد الناطقة التالية إنطلاقا من كتابتها العشرية الدورية :

$A=0,\underline{14}1414\ldots$ ، $B=34,\underline{21}2121\ldots$ ، $C=5,\underline{245}245245\ldots$ ، $D=-3,1\underline{72}7272\ldots$

$A=0,\underline{14}1414\ldots$: نكتب العدد A كمجموع لجزأيه الصحيح و العشري أي $A=0+0,\underline{14}1414\ldots$ و بفرض أن $x=0,\underline{14}1414\ldots$ ينتج أن $A=0+x$ أي $A=x$.

من المعادلة $x=0,\underline{14}1414\ldots$ و بالضرب في العدد 10^2 حيث 2 يمثل عدد أرقام الدور نجد $100x=14,\underline{14}1414\ldots$ أي $100x=14+0,\underline{14}1414$ و منه ينتج $100x=14+x$ أي $99x=14$

و بالتالي نجد : $x=\frac{14}{99}$ ، إذن : $A=\frac{14}{99}$ و هي الكتابة الكسرية للعدد A .

$B=34,\underline{21}2121\ldots$: نكتب العدد B كمجموع لجزأيه الصحيح و العشري أي $B=34+0,\underline{21}2121\ldots$ و بفرض أن $x=0,\underline{21}2121\ldots$ ينتج أن $B=34+x$.

من المعادلة $x=0,\underline{21}2121\ldots$ و بالضرب في العدد 10^2 حيث 2 يمثل عدد أرقام الدور نجد

$100x=21,\underline{21}2121\ldots$ أي $100x=21+0,\underline{21}2121\ldots$ و منه ينتج $100x=21+x$ أي $99x=21$

و بالتالي نجد : $x=\dfrac{21}{99}$ ، إذن : $B=34+\dfrac{21}{99}$ أي $B=\dfrac{34\times 99+21}{99}$ أي $B=\dfrac{3387}{99}$ و هي الكتابة الكسرية للعدد B .

$C=5,\underline{245}245245\ldots$: نكتب العدد C كمجموع لجزأيه الصحيح و العشري أي

$C=5+0,\underline{245}245245\ldots$ و بفرض أن $x=0,\underline{245}245245\ldots$ ينتج أن $C=5+x$.

من المعادلة $x=0,\underline{245}245245\ldots$ و بالضرب في العدد 10^3 حيث 3 يمثل عدد أرقام الدور نجد

$1000x=245,\underline{245}245245\ldots$ أي $1000x=245+0,\underline{245}245245\ldots$ و منه ينتج

$1000x=245+x$ أي $999x=245$ و بالتالي نجد : $x=\dfrac{245}{999}$ ، إذن : $C=5+\dfrac{245}{999}$ أي

$C=\dfrac{5\times 999+245}{999}$ أي $C=\dfrac{5240}{999}$ و هي الكتابة الكسرية للعدد C .

$D=-3,1\underline{72}7272\ldots$: نبحث أولا عن الكتابة الكسرية للعدد $10D$ حيث $10D=-31,\underline{72}7272\ldots$

نكتب العدد $10D$ كمجموع لجزأيه الصحيح و العشري أي $10D=-31+\left(-0,\underline{72}7272\ldots\right)$ و بفرض أن

$x=-0,\underline{72}7272\ldots$ ينتج أن $10D=-31+x$.

من المعادلة $x=-0,\underline{72}7272\ldots$ و بالضرب في العدد 10^2 حيث 2 يمثل عدد أرقام الدور نجد

$100x=-72,\underline{72}7272\ldots$ أي $100x=-72+\left(-0,\underline{72}7272\ldots\right)$ و منه ينتج $100x=-72+x$ أي

$99x=-72$ و بالتالي نجد : $x=-\dfrac{72}{99}$ ، إذن : $10D=-31-\dfrac{72}{99}$ أي $10D=\dfrac{-31\times 99-72}{99}$ أي

$10D=-\dfrac{3141}{99}$ و هي الكتابة الكسرية للعدد $10D$ ؛ و لإيجاد الكتابة الكسرية للعدد D نقسم طرفي

المساواة السابقة على 10 فنتحصل على : $D=-\dfrac{3141}{990}$ و هي الكتابة الكسرية للعدد D .

حل التمرين رقم 07 :

ليكن العددان a و b حيث : $b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (a يسمى العدد الذهبي)

1- حساب ab و $a+b$:

$$ab=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}{4}=\frac{(1)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}{4}=-\frac{4}{4}=-1$$ و كذلك نجد :

$$a+b=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\left(1+\cancel{\sqrt{5}}\right)+\left(1-\cancel{\sqrt{5}}\right)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

2- إستنتاج قيمة كلا من a^2+b^2 و a^4+b^4 :

نعلم أن : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ و بالتالي $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ حيث من السؤال السابق

لدينا $a+b=1$ و منه $(a+b)^2=1$ و كذلك لدينا $ab=-1$ ؛ إذن نتحصل على :

$a^2+b^2=1-2(-1)$ أي $a^2+b^2=3$.

و بما أن : $\left(a^2+b^2\right)^2=\left(a^2\right)^2+2\left(a^2b^2\right)+\left(b^2\right)^2=a^4+2(ab)^2+b^4$ فإن :

$a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2(ab)^2$ حيث من النتائج السابقة فإن $a^2+b^2=3$ و منه $\left(a^2+b^2\right)^2=9$ و

كذلك $ab=-1$ و منه $(ab)^2=1$ ؛ إذن ينتج : $a^4+b^4=9-2(1)$ أي $a^4+b^4=7$.

3- نبين أن $a^2=a+1$ و أن $a^3=2a+1$:

بحساب كلا من الطرفين على حدى نجد :

$$a^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{4}=\frac{(1)^2+2(1)\left(\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}\right)^2}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{4}$$ أي

$a^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ و من جهة أخرى : $a+1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\dfrac{1+\sqrt{5}+2}{2}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ ؛ إذن $a^2=a+1$

أي $a^3 = a^2 \times a = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)}{4} = \frac{3+3\sqrt{5}+\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2}{4}$

و من جهة أخرى : $a^3 = \frac{8+4\sqrt{5}}{4} = \frac{4\left(2+\sqrt{5}\right)}{4} = 2+\sqrt{5}$

$2a+1 = \cancel{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{\cancel{2}}\right)+1 = 1+\sqrt{5}+1 = 2+\sqrt{5}$ ؛ إذن نتحصل على المساواة $a^3 = 2a+1$.

حل التمرين رقم 08 :

ليكن a و b عددان حقيقيان يحققان : $(1)\ \ldots\ldots \begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=2 \end{cases}$

1- حساب ab :

نعلم باستعمال المتطابقة الشهيرة أن : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ و منه $ab = \frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}$

حيث $a+b=1$ و بالتالي $(a+b)^2=1$ ؛ إذن $ab = \frac{1-2}{2}$ أي $ab = -\frac{1}{2}$.

2- البرهان أن : a^4+b^4 عدد عشري .

باستعمال المتطابقة الشهيرة نتحصل على : $(a^2+b^2)^2 = (a^2)^2+2(a^2)(b^2)+(b^2)^2$ أي

$(a^2+b^2)^2 = a^4+2(ab)^2+b^4$ و منه $a^4+b^4 = (a^2+b^2)^2-2(ab)^2$ حيث $a^2+b^2=2$ و

$ab=-\frac{1}{2}$ و بالتالي ينتج $a^4+b^4 = (2)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ أي $a^4+b^4 = 4-2\times\frac{1}{4}$ أي $a^4+b^4 = \frac{7}{2}$ حيث

أن الكسر $\frac{7}{2}$ غير قابل للإختزال و مقامه 2 هو من الشكل $2^n \times 5^m$ ($n=1$ و $m=0$) ؛ إذن حسب

الخاصية المميزة لعدد عشري نستنتج أن a^4+b^4 عدد عشري .

3- البرهان بالحساب أن : $a = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ و $b = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ يحققان الشرطين (1) .

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \\ a^2+b^2=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{4}+\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{4}=\dfrac{4+4}{4}=2 \end{cases}$$

و منه فالعددان a و b يحققان الشرطين (1) .

حل التمرين رقم 09 :

1- من دون إستعمال حاسبة ؛ نبين أن العددين $A=\dfrac{231}{350}$ و $B=\dfrac{425}{200}$ عشريان :

نستعمل الخاصية المميزة لعدد عشري : نكتب العدد A على شكل كسر غير قابل للإختزال بقسمة كل من البسط و المقام على $PGCD(231;350)$ حيث $PGCD(231;350)=7$ (خوارزمية إقليدس مثلا) نجد $A=\dfrac{33}{50}$ و بتحليل المقام إلى جداء عوامل أولية نجد $50=2\times5^2$ و هو من الشكل $2^n\times5^m$ حيث $n=1$ و $m=2$ ؛ إذن العدد A عشري .

نكتب العدد B على شكل كسر غير قابل للإختزال بقسمة كل من البسط و المقام على $PGCD(425;200)$ حيث $PGCD(425;200)=25$ (خوارزمية إقليدس مثلا) نجد $B=\dfrac{17}{8}$ و بتحليل المقام إلى جداء عوامل أولية نجد $8=2^3$ و هو من الشكل $2^n\times5^m$ حيث $n=3$ و $m=0$ ؛ إذن العدد B عشري .

2- هل العدد $C=\dfrac{71}{15}$ عشري ؟ مع التعليل :

يمكن التحقق أن الكسر $\dfrac{71}{15}$ غير قابل للإختزال لأن العددين 71 و 15 أوليان فيما بينهما ، و من جهة أخرى فإن تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية يعطي $15=3\times5$ و هو ليس من الشكل $2^n\times5^m$ لأن 3 عدد أولي يختلف عن 2 و يختلف عن 5 ؛ إذن نستنتج أن العدد C ليس عشريا .

3- من بين الأعداد التالية ؛ تحديد تلك التي هي أولية :

223 ، 95578 ، 111111 ، 121 ، 317 ، 251 ، 1961 ، 633335

هل يقبل العدد 223 القسمة على ...	2	3	5	7	11	13	17
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا
حاصل القسمة	111	74	44	31	20	17	13

$13<17$

آخر باقي غير معدوم و منه فالعدد 223 أولي .

العدد 95578 رقم آحاده زوجي (8 يقبل القسمة على 2) و منه فالعدد 95578 يقبل القسمة على 2 و بالتالي فهو ليس أوليا .

العدد 111111 يقبل القسمة على 3 لأن مجموع أرقامه هو $6=1+1+1+1+1+1$ و 6 يقبل القسمة على 3 ؛ إذن العدد 111111 ليس أوليا .

العدد 633335 يقبل القسمة على 5 لأن رقم آحاده يساوي 5 يقبل القسمة على 5 و بالتالي فهو ليس أوليا

هل يقبل العدد 121 القسمة على ...	2	3	5	7	11
الإجابة	لا	لا	لا	لا	نعم
حاصل القسمة	60	40	24	17	11

آخر باقي للقسمة معدوم أي أن العدد 121 يقبل القسمة على 11 و بالتالي فالعدد 121 ليس أوليا .

هل يقبل العدد 317 القسمة على ...	2	3	5	7	11	13	17	19
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا
حاصل القسمة	158	105	63	45	28	24	18	16

$16<19$

آخر باقي غير معدوم و منه فالعدد 317 أولي .

هل يقبل العدد 251 القسمة على ...	2	3	5	7	11	13	17
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا
حاصل القسمة	125	83	50	35	22	19	14

$14<17$

آخر باقي غير معدوم و منه فالعدد 251 أولي .

بنفس الطريقة السابقة نجد أن العدد 1961 يقبل القسمة على 37 و بالتالي فالعدد 1961 ليس أوليا .

حل التمرين رقم 10 :

1- كتابة الأعداد التالية بمقامات ناطقة : $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(n عدد طبيعي) .

$\frac{1}{\sqrt{2}+1}$: بضرب كل من البسط و المقام في المرافق $\sqrt{2}-1$ نجد :

$$\sqrt{2}-1=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}\right)^2-(1)^2}=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$ و مقامه عدد ناطق يساوي 1 .

$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$: بضرب كل من البسط و المقام في المرافق $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ نجد :

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$ و مقامه عدد ناطق يساوي 1 .

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$: بضرب كل من البسط و المقام في المرافق $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ نجد :

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\cancel{n}+1-\cancel{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

و هي نسبة مقامها عدد ناطق يساوي 1 .

2- حساب المجموع S التالي : $S=1+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+......+\frac{1}{\sqrt{1670}+\sqrt{1669}}$

من السؤال السابق ؛ من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ و منه S يكتب :

$S = 1 + \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + ... + \left(\sqrt{1669} - \sqrt{1668}\right) + \left(\sqrt{1670} - \sqrt{1669}\right)$ و باختزال

الحدود في المجموع S نجد : $\boxed{S = \sqrt{1670}}$

حل التمرين رقم 11 :

ليكن n عدد طبيعي .

1- نبين أن : $\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

طريقة 01 : من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1(n+2)-1(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\frac{\cancel{n}+2-\cancel{n}-1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ و هو المطلوب .

طريقة 02 : نضع : $\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}$ حيث A و B ثابتان يطلب تعيينهما :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}=\frac{A(n+2)+B(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\frac{An+2A+Bn+B}{(n+1)(n+2)}=\frac{(A+B)n+(2A+B)}{(n+1)(n+2)}$ ؛ إذن

$\frac{(A+B)n+(2A+B)}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ معناه : $\begin{cases}A+B=0\\2A+B=1\end{cases}$ و هي جملة معادلتين بمجهولين A و B ؛ من المعادلة الأولى ينتج $A=-B$ و بتعويض A في المعادلة الثانية نجد $-2B+B=1$ أي $-B=1$ و منه $B=-1$ و بالتالي $A=1$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $\boxed{\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}$

2- إستنتاج قيمة المجموع S حيث : $S=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+......+\frac{1}{99\times100}$

نستعمل نتيجة السؤال السابق فنجد :

$$S=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+......+\frac{1}{99\times100}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+......+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$

و باختزال الحدود في المجموع S نجد : $S=\frac{1}{1}-\frac{1}{100}$ أي $S=\frac{100-1}{100}$ أي $\boxed{S=\frac{99}{100}}$

حل التمرين رقم 12 :

n عدد طبيعي غير معدوم .

1- إثبات صحة المساواة التالية : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

بضرب ثم قسمة الطرف الأول على العبارة المرافقة $(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}$ نتحصل على :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{\left((n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}\right)\left((n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}\right)}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{\left((n+1)\sqrt{n}\right)^2-\left(n\sqrt{n+1}\right)^2}$$

أي $\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)[n+1-n]}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)^2-(n+1)n^2}=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$ أي

$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}}{n(n+1)}-\frac{n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}$ أي $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$ أي

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\times\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\times\sqrt{n+1}}$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن : $\boxed{\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}}$

2- إستنتاج قيمة المجموع : $S=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+......+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$

نستعمل نتيجة السؤال السابق فنجد : $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، ......

$\frac{1}{99\sqrt{98}+98\sqrt{99}}=\frac{1}{\sqrt{98}}-\frac{1}{\sqrt{99}}$ ، $\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}=\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}$ و منه ينتج :

و بإختزال الحدود $S=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{98}}-\frac{1}{\sqrt{99}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right)$

في المجموع S نجد : $S=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{100}}$ أي $S=1-\frac{1}{10}$ أي $S=\frac{10-1}{10}$ و منه $\boxed{S=\frac{9}{10}}$

حل التمرين رقم 13 :

1- كتابة على أبسط صورة ممكنة العدد A حيث :

$$A=\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\ldots\ldots\times\left(1+\frac{1}{1441}\right)\times\left(1+\frac{1}{1442}\right)$$

بتوحيد المقامات في كل معامل من معاملات الجداء A نتحصل على :

أي $A=\left(\frac{2+1}{2}\right)\times\left(\frac{3+1}{3}\right)\times\left(\frac{4+1}{4}\right)\times\ldots\ldots\times\left(\frac{1441+1}{1441}\right)\times\left(\frac{1442+1}{1442}\right)$

و منه نجد : $A=\frac{\cancel{3}}{2}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\times\ldots\ldots\times\frac{\cancel{1442}}{\cancel{1441}}\times\frac{1443}{\cancel{1442}}$ $\boxed{A=\frac{1443}{2}}$

2- n عدد طبيعي غير معدوم .

أ) نبين أن : $1-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $1-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{(n-1)(n+1)}{n\times n}=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}$

ب) كتابة على أبسط شكل ممكن العدد B حيث :

$$B=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\times\ldots\ldots\times\left(1-\frac{1}{200^2}\right)$$

من السؤال السابق ينتج : $1-\frac{1}{2^2}=\frac{2-1}{2}\times\frac{2+1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}$ ، $1-\frac{1}{3^2}=\frac{3-1}{3}\times\frac{3+1}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}$ ،

$1-\frac{1}{4^2}=\frac{4-1}{4}\times\frac{4+1}{4}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}$ ، .... ، $1-\frac{1}{200^2}=\frac{200-1}{200}\times\frac{200+1}{200}=\frac{199}{200}\times\frac{201}{200}$ و منه نجد :

$B=\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)\times\ldots\ldots\times\left(\frac{198}{199}\times\frac{200}{199}\right)\times\left(\frac{199}{200}\times\frac{201}{200}\right)$ و بالإختزال نتحصل على

$B=\left(\frac{1}{2}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\right)\times\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\right)\times\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\right)\times\ldots\ldots\times\left(\frac{\cancel{198}}{\cancel{199}}\times\frac{\cancel{200}}{\cancel{199}}\right)\times\left(\frac{\cancel{199}}{\cancel{200}}\times\frac{201}{200}\right)$ و منه

$B=\frac{1}{2}\times\frac{201}{200}$ أي $\boxed{B=\frac{201}{400}}$

حل التمرين رقم 14 :

تعطى العبارة Q حيث : $Q=(n+1)^2-n^2$

1- نشر و تبسيط العبارة Q :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $Q=(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2$ أي $Q=2n+1$

2- إستنتاج أن كل عدد فردي يمكن كتابته على شكل فرق مربعي عددين طبيعيين متتاليين :

حسب السؤال السابق فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2n+1=(n+1)^2-n^2$ حيث مهما يكن العدد الطبيعي n فإن العدد $2n+1$ فردي (العدد الزوجي هو الذي يكون مضاعفا للعدد 2 أي يكتب من الشكل $2n$ حيث n عدد طبيعي) و العددان n و $n+1$ هما عددان طبيعيان متتاليان ؛ إذن نستنتج أن كل عدد فردي يمكن كتابته على شكل فرق مربعي عددين طبيعيين متتاليين .

3- التحقق من هذه الخاصية من أجل العددين 13 و 41 :

13 هو عدد فردي ، إذن فهو يكتب من الشكل $2n+1$ ، و بوضع $2n+1=13$ نجد $2n=12$ و منه $n=6$ و لدينا فعلا $13=(7)^2-(6)^2$ ؛ إذن العدد 13 يكتب على شكل فرق مربعي عددين طبيعيين متتاليين هما 7 و 6 .

41 هو عدد فردي ، إذن فهو يكتب من الشكل $2n+1$ ، و بوضع $2n+1=41$ نجد $2n=40$ و منه $n=20$ و لدينا فعلا $41=(21)^2-(20)^2$ ؛ إذن العدد 41 يكتب على شكل فرق مربعي عددين طبيعيين متتاليين هما 21 و 20 .

حل التمرين رقم 15 :

برهان ما يلي :

1- من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $\alpha = 7^{n+1} - 7^{n}$ يقبل القسمة على 3 و العدد $\beta = 2^{n+3} - 2^{n+1} + 2^{n}$ يقبل القسمة على 7 :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\alpha = 7^{n+1} - 7^{n} = 7\left(7^{n}\right) - 7^{n} = 7^{n}\left(7-1\right) = 6\left(7^{n}\right) = 2\times 7^{n}\times 3$ حيث 2×7^{n} هو عدد طبيعي ، و منه نستنتج أن العدد α يقبل القسمة على 3 .

من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$\beta = 2^{n+3} - 2^{n+1} + 2^{n} = 2^{3}\left(2^{n}\right) - 2\left(2^{n}\right) + 2^{n} = 2^{n}\left(2^{3} - 2 + 1\right) = 2^{n}\times 7$ حيث 2^{n} هو عدد طبيعي ، و منه نستنتج أن العدد β يقبل القسمة على 7 . ($2^{3} = 8$)

2- من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن العدد $2\times 5^{n+1} + 5^{n}$ يقبل القسمة على 11 :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن $2\times 5^{n+1} + 5^{n} = 2\times 5\times 5^{n} + 5^{n} = \left(2\times 5 + 1\right)5^{n} = 5^{n}\times 11$ حيث 5^{n} هو عدد طبيعي ، و منه نستنتج أن العدد $2\times 5^{n+1} + 5^{n}$ يقبل القسمة على 11 .

3- من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن العدد $\lambda = 1 + \left(n+1\right)^{2} + \left(n+2\right)^{2}$ زوجي :

ليكن n عدد طبيعي ، ننشر ثم نبسط عبارة العدد λ فنجد : $\lambda = 2n^{2} + 6n + 6$ أي $\lambda = 2\left(n^{2} + 3n + 3\right)$ بحيث من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n^{2} + 3n + 3 = k \in \mathbb{N}$ و منه λ يكتب من الشكل $\lambda = 2k$ مع $k \in \mathbb{N}$ ؛ إذن λ عدد زوجي .

4- مجموع عددين طبيعيين متتاليين يساوي فرق مربعيهما :

n و $n+1$ عددان طبيعيان متتاليان ، مجموعهما هو $n + \left(n+1\right)$ أي $2n+1$

فرق مربعيهما هو $\left(n+1\right)^{2} - n^{2}$ و بالنشر نجده $\left(n^{2} + 2n + 1\right) - n^{2}$ أي $2n+1$

و منه نستنتج أن مجموع عددين طبيعيين متتاليين يساوي فرق مربعيهما .

5- مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي :

ليكن n و m عددان طبيعيان فرديان و منه $n=2\alpha+1$ و $m=2\beta+1$ حيث α و β عددان طبيعيان ،

إذن : $n+m=(2\alpha+1)+(2\beta+1)=2\alpha+2\beta+2=2(\alpha+\beta+1)$ أي أن المجموع $n+m$ يكتب من الشكل 2λ حيث $\lambda=\alpha+\beta+1\in\mathbb{N}$ و منه نستنتج أن $n+m$ عدد زوجي .

6- جداء عددين فرديين هو عدد فردي :

ليكن n و m عددان طبيعيان فرديان و منه $n=2\alpha+1$ و $m=2\beta+1$ حيث α و β عددان طبيعيان ،

إذن : $n\times m=(2\alpha+1)(2\beta+1)=4\alpha\beta+2\alpha+2\beta+1=2(2\alpha\beta+\alpha+\beta)+1$ أي أن الجداء $n\times m$ يكتب من الشكل $2\lambda+1$ حيث $\lambda=2\alpha\beta+\alpha+\beta\in\mathbb{N}$ و منه نستنتج أن $n\times m$ عدد فردي .

7- مجموع ثلاثة أعداد طبيعية متتالية هو عدد مضاعف لـ 3 :

ثلاث أعداد طبيعية متتالية هي من الشكل : n ، $n+1$ و $n+2$ ؛ إذن مجموعها هو $(n)+(n+1)+(n+2)$ أي $3n+3$ أي $3(n+1)$ ؛ و هو من الشكل 3α حيث $\alpha=n+1\in\mathbb{N}$ مضاعف لـ 3 .

8- $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=4$ **:**

لدينا : $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{4+4\sqrt{3}+3}=\sqrt{(2)^2+2(2)(\sqrt{3})+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$ أي $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ لأن $2+\sqrt{3}\geq 0$ و كذلك نجد :

$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}=\sqrt{(2)^2-2(2)(\sqrt{3})+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$ أي $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ لأن $2-\sqrt{3}\geq 0$ ؛ إذن بالجمع نتحصل على :

$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2+\cancel{\sqrt{3}}+2-\cancel{\sqrt{3}}$ أي $\boxed{\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=4}$

حل التمرين رقم 16 :

إذا كان α عدد حقيقي غير معدوم يحقق : $\alpha+\frac{1}{\alpha}=\sqrt{5}$ ؛

إثبات أن $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}$ عدد طبيعي :

بما أن $\alpha+\frac{1}{\alpha}=\sqrt{5}$ فإن $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2=5$ ، معناه $\alpha^2+2\cancel{\alpha}\times\frac{1}{\cancel{\alpha}}+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2=5$ أي $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}+2=5$

و منه ينتج : $\boxed{\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=3}$ ؛ إذن نستنتج أن $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}$ عدد طبيعي و نكتب $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\in\mathbb{N}$.

حل التمرين رقم 17 :

ليكن α عدد حقيقي موجب و غير معدوم يحقق : $\alpha-\frac{1}{\alpha}=1$

1- نبين أن $\alpha+\frac{1}{\alpha}=\sqrt{5}$.

نبدأ أولا بحساب المتطابقة الشهيرة التالية :

$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{1}{\cancel{\alpha}}\times\cancel{\alpha}2-\alpha^2=\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2$ — أي: $\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2=\alpha^2-2\cancel{\alpha}\times\frac{1}{\cancel{\alpha}}+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2$ أي $\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2=\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}-2$ ، لكن من المعطيات نعلم أن

$\alpha-\frac{1}{\alpha}=1$ و منه ينتج : $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}-2=1$ أي $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}-3=0$ و بإضافة العدد 2 و معاكسه -2

نجد $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}+2-2-3=0$ أي $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}+2=5$ ؛ لكن $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}+2=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2$ لأن

$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2=\alpha^2+2\cancel{\alpha}\times\frac{1}{\cancel{\alpha}}+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2$ أي $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2=\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}+2$ و منه نستنتج أن :

$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2=5$ ؛ إذن بما أن $\alpha+\frac{1}{\alpha}>0$ فإنه ينتج : $\boxed{\alpha+\frac{1}{\alpha}=\sqrt{5}}$

2- إستنتاج أن : $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

لدينا : $\begin{cases} \alpha - \dfrac{1}{\alpha} = 1 \\ \alpha + \dfrac{1}{\alpha} = \sqrt{5} \end{cases}$

إذن بجمع المعادلتين طرفا لطرف نتحصل على $2\alpha = 1+\sqrt{5}$ **و منه نجد :** $\boxed{\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ **العدد الذهبي**

حل التمرين رقم 18 :

نعتبر العدد الطبيعي a **حيث :** $a = 1+7+7^2+7^3+......+7^{15}$

1- كتابة $7a+1$ **بدلالة** a **:**

لدينا $a = 1+7+7^2+7^3+......+7^{15}$ **و منه نجد :**

$7a+1 = 7\left(1+7+7^2+7^3+......+7^{15}\right)+1$ **أي**

$7a+1 = \left(7\times1+7\times7+7\times7^2+7\times7^3+......+7\times7^{14}+7\times7^{15}\right)+1$ **أي**

$7a+1 = \left(1+7+7^2+7^3+......+7^{15}\right)+7^{16}$ **معناه** $\boxed{7a+1 = a+7^{16}}$

2- إستنتاج أن : $6a = 7^{16}-1$ **و أن :** $a = 8\left(7^2+1\right)\left(7^4+1\right)\left(7^8+1\right)$

لدينا : $7a+1 = a+7^{16}$ **و منه** $6a = 7^{16}-1$ **أي** $\boxed{a = \dfrac{7^{16}-1}{6}}$

نستعمل المتطابقة الشهيرة في كل مرة فنجد :

$$a = \frac{7^{16}-1}{6} = \frac{\left(7^8\right)^2-(1)^2}{6} = \frac{\left(7^8-1\right)\left(7^8+1\right)}{6} = \frac{\left(\left(7^4\right)^2-(1)^2\right)\left(7^8+1\right)}{6}$$ **أي :**

$$a = \frac{\left(7^4-1\right)\left(7^4+1\right)\left(7^8+1\right)}{6}$$ **أي :**

أي : $a=\frac{\left(\left(7^2\right)^2-(1)^2\right)\left(7^4+1\right)\left(7^8+1\right)}{6}=\frac{\left(7^2-1\right)\left(7^2+1\right)\left(7^4+1\right)\left(7^8+1\right)}{6}$

أي : $a=\frac{(7-1)(7+1)\left(7^2+1\right)\left(7^4+1\right)\left(7^8+1\right)}{6}$ $\quad a=\frac{\cancel{6}\times 8\left(7^2+1\right)\left(7^4+1\right)\left(7^8+1\right)}{\cancel{6}}$

و منه نستنتج أن : $\boxed{a=8\left(7^2+1\right)\left(7^4+1\right)\left(7^8+1\right)}$

حل التمرين رقم 19 :

1- البرهان أنه من أجل كل $x,y\in\mathbb{R}^+$ **فإن :** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$

نستعمل المتطابقة الشهيرة : من أجل كل x و y عددان حقيقيان موجبان فإن :

$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=\sqrt{x}^2+2\sqrt{x}\sqrt{y}+\sqrt{y}^2=x+y+2\sqrt{xy}$ **و بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد**

$$\boxed{\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}}$$

2- إستنتاج أن : $\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}=6$

تطبيق مباشر لنتيجة السؤال السابق من أجل $x=17+12\sqrt{2}$ **و** $y=17-12\sqrt{2}$ **فنجد :**

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{\left(17+\cancel{12\sqrt{2}}\right)+\left(17-\cancel{12\sqrt{2}}\right)+2\sqrt{\left(17+12\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)}}$$

أي $\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{34+2\sqrt{(17)^2-\left(12\sqrt{2}\right)^2}}$ أي

$\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{34+2\sqrt{1}}$ أي $\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{36}$ و منه

نستنتج أن : $\boxed{\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}=6}$

3- البرهان على صحة المساوتين الآتيتين : $1+\sqrt{3}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}$ و

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=1 .$$

ننشر $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ فنتحصل على : $\left(1+\sqrt{3}\right)^2=1+2(1)\left(\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}^2=4+2\sqrt{3}$

إذن بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد $\boxed{1+\sqrt{3}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$

و من جهة أخرى لدينا : $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2\left(2+\sqrt{3}\right)}=\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}$

للبرهان على صحة المساواة الثانية نستعمل العبارة المرافقة في كل مرة :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\frac{1\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-(1)^2}+\frac{1\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}+\frac{1\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{4}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$ أي

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\left(\cancel{\sqrt{2}}-1\right)+\left(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}\right)+\left(\sqrt{4}-\cancel{\sqrt{3}}\right)$$ و منه ينتج :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=1}$$

4- حساب $\left(1+\sqrt{5}\right)^2$ و $\left(2-\sqrt{5}\right)^2$ ثم إستنتاج أن : $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-1$.

$$\begin{cases}\left(1+\sqrt{5}\right)^2=(1)^2+2(1)\left(\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}\right)^2=6+2\sqrt{5}\\ \left(2-\sqrt{5}\right)^2=(2)^2-2(2)\left(\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}\right)^2=9-4\sqrt{5}\end{cases}$$ و منه ينتج :

$\boxed{\sqrt{6+2\sqrt{5}}=1+\sqrt{5}}$ لأن $1+\sqrt{5}\geq 0$ و $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=-\left(2-\sqrt{5}\right)$ أي $\boxed{\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2}$ لأن

$2-\sqrt{5}\leq 0$ ؛ إذن بالجمع نتحصل على : $\boxed{\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-1}$

التمرين رقم 20 :

α و β عددان طبيعيان حيث : $\begin{cases}\alpha+\beta=12\\ \alpha^2-\beta^2=96\end{cases}$

1- حساب $\alpha-\beta$:

المعادلة $\alpha^2-\beta^2=96$ تكافئ $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=96$ ، و بما أن $\alpha+\beta=12$ فإنه ينتج :

$\alpha-\beta=96/12$ أي $\boxed{\alpha-\beta=8}$

2- إستنتاج قيمتي α و β :

لدينا $\alpha+\beta=12$ و $\alpha-\beta=8$ ؛ إذن $\begin{cases}\alpha+\beta=12\\ \alpha-\beta=8\end{cases}$ هي جملة معادلتين بمجهولين α و β

بجمع المعادلتين طرفا لطرف نتحصل على : $2\alpha=20$ و منه نجد $\boxed{\alpha=10}$

و بتعويض قيمة α في المعادلة $\alpha+\beta=12$ نجد : $\beta=12-10$ أي $\boxed{\beta=2}$

3- x و y عددان طبيعيان حيث : $x^2-y^2=401$

✓ نبين أن العدد 401 أولي :

هل يقبل العدد 401 القسمة على ...	2	3	5	7	11	13	17	19
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا
حاصل القسمة	200	133	80	57	36	30	23	21

23
لا
17

$17<23$ ، آخر باقي قسمة غير معدوم و منه فالعدد 401 أولي .

✓ تعيين قيمة كلا من x و y :

المعادلة $x^2-y^2=401$ تكافئ $(x-y)(x+y)=401$ و منه $x-y$ و $x+y$ قاسمان للعدد 401

لكن x و y عددان طبيعيان ؛ إذن $x+y>0$ و $x-y>0$ (لأن $401>0$) حيث 401 عدد أولي

أي يقبل بالضبط قاسمين مختلفين هما 1 و 401 و منه ينتج : $\begin{cases}x-y=1\\ x+y=401\end{cases}$ لأن $x+y\geq x-y$

(x و y عددان طبيعيان) ؛ و هي جملة معادلتين بمجهولين x و y ؛ إذن بجمع المعادلتين طرفا لطرف

نتحصل على : $2x = 402$ و منه نجد $\boxed{x = 201}$

و بتعويض قيمة x في المعادلة $x + y = 401$ نجد : $y = 401 - 201$ أي $\boxed{y = 200}$

حل التمرين رقم 21 :

x و y عددان حقيقيان حيث : $x=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$ و $y=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$

1- حساب كلا من x^2+y^2 و xy ؛ ثم تبيان أن : $x+y=4$.

$$x^2+y^2=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}^2+\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$ و باستعمال العبارة المرافقة نجد :

أي $$x^2+y^2=\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2)^2-(\sqrt{3})^2}+\frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2)^2-(\sqrt{3})^2}=(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2$$

$$x^2+y^2=(2)^2-\cancel{4\sqrt{3}}+(\sqrt{3})^2+(2)^2+\cancel{4\sqrt{3}}+(\sqrt{3})^2$$ و منه $\boxed{x^2+y^2=14}$

و كذلك نجد $$xy=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}=\sqrt{1}$$ أي $\boxed{xy=1}$

نعلم أن : $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ حيث $x^2+y^2=14$ و $xy=1$ و منه $(x+y)^2=16$ و بما أن $x>0$ و $y>0$ فإن $x+y>0$ و بالتالي ينتج : $x+y=\sqrt{16}$ أي $\boxed{x+y=4}$

2- جعل مقام كل من x و y عددا ناطقا :

$$x=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2)^2-(\sqrt{3})^2}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{1}}$$ أي $\boxed{x=2-\sqrt{3}}$ (لأن $2-\sqrt{3}>0$) و هي نسبة مقامها عدد ناطق يساوي 1 .

$$y=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}=\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2)^2-(\sqrt{3})^2}}=\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{1}}$$ أي $\boxed{y=2+\sqrt{3}}$ (لأن

$2+\sqrt{3}>0$) و هي نسبة مقامها عدد ناطق يساوي **1** .

حل التمرين رقم 22 :

a و b عددان حقيقيان موجبان حيث $a>b$ يحققان ما يلي :

$a+b=\sqrt{5}$ و $ab=1$.

1- حساب $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ثم $\sqrt{a}-\sqrt{b}$:

نستعمل المتطابقة الشهيرة : $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2$ أي

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{ab}+b$ حيث $a+b=\sqrt{5}$ و $ab=1$ (و منه $\sqrt{ab}=1$) و بالتالي نجد :

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=2+\sqrt{5}$ ، و بما أن $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ فإنه ينتج : $\boxed{\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2+\sqrt{5}}}$

نستعمل المتطابقة الشهيرة : $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2$ أي

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=a+b-2\sqrt{ab}$ حيث $a+b=\sqrt{5}$ و $ab=1$ (و منه $\sqrt{ab}=1$) و بالتالي نجد :

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=\sqrt{5}-2$ ، و بما أن $a>b$ فإن $\sqrt{a}>\sqrt{b}$ أي $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$ ؛ إذن نستنتج أن :

$$\boxed{\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt{5}-2}}$$

2- إستنتاج $a-b$ ثم قيمة كل من العددين a و b :

بما أن $\begin{cases}\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2+\sqrt{5}}\\ \sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt{5}-2}\end{cases}$ و بجمع المعادلتين طرفا لطرف نتحصل على :

$2\sqrt{a}=\sqrt{\sqrt{5}-2}+\sqrt{\sqrt{5}+2}$ أي $\sqrt{a}=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-2}+\sqrt{\sqrt{5}+2}}{2}$ و منه

$a=\dfrac{\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}+\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)^2}{4}$ أي $a=\dfrac{\sqrt{5}-2+2\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}+\sqrt{5}+2}{4}$ أي

أي $a=\frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{5}-4}{4}$ أي $a=\frac{2\sqrt{5}+2}{4}$ و منه نجد : $\boxed{a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ **(النسبة الذهبية)**

و بما أن $a+b=\sqrt{5}$ فإن $b=\sqrt{5}-a$ أي $b=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{5}-1}{2}$ أي $\boxed{b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

يمكن إستنتاج الفرق $a-b$ كما يلي : $a-b=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{\cancel{\sqrt{5}}+1-\cancel{\sqrt{5}}+1}{2}$ أي $\boxed{a-b=1}$

3- α و β عددان حقيقيان حيث : $\alpha=\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ و $\beta=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

أ) نتحقق أن : $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$

لدينا : $\left(\sqrt{5}-1\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2-2(1)\left(\sqrt{5}\right)+(1)^2$ أي $\left(\sqrt{5}-1\right)^2=6-2\sqrt{5}$ و بأخذ الجذر التربيعي

للطرفين ($\sqrt{5}-1>0$) نتحصل على المساواة : $\boxed{\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1}$

ب) حساب $\alpha^2+\beta^2$ و $\alpha\beta$ ثم إستنتاج قيمة مبسطة للمجموع $\alpha+\beta$:

$\alpha^2+\beta^2=4-\cancel{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+4+\cancel{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ و منه $\boxed{\alpha^2+\beta^2=8}$

لدينا : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$ و منه ينتج :

أي $(\alpha+\beta)^2=8+2\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

أي $(\alpha+\beta)^2=8+2\sqrt{\left(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}$

أي $(\alpha+\beta)^2=8+2\sqrt{(4)^2-\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^2}$ أي $(\alpha+\beta)^2=8+2\sqrt{16-\left(10+2\sqrt{5}\right)}$

$(\alpha+\beta)^2=8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ ، و من السؤال السابق $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$ ؛ إذن ينتج :

$(\alpha+\beta)^2=6+2\sqrt{5}$ ، و بما أن $\alpha\in\mathbb{R}^+$ ، $\beta\in\mathbb{R}^+$ فإن $\alpha+\beta\in\mathbb{R}^+$ و منه نستنتج أن :

$$\alpha+\beta=\sqrt{6+2\sqrt{5}}$$

حل التمرين رقم 23 :

البرهان على صحة المساوايات الآتية :

-1 $\dfrac{1000-0,00003^2-10^3}{6\times10^{-9}}=-0,15$

أي $\dfrac{1000-0,00003^2-10^3}{6\times10^{-9}}=\dfrac{\cancel{10^3}-0,00003^2-\cancel{10^3}}{6\times10^{-9}}=-\dfrac{\left(3\times10^{-5}\right)^2}{6\times10^{-9}}$

أي $\dfrac{1000-0,00003^2-10^3}{6\times10^{-9}}=-\dfrac{3^2\times10^{-10}}{6\times10^{-9}}=-\dfrac{3^2\times10^{-10}\times10^9}{6}$

و منه $\dfrac{1000-0,00003^2-10^3}{6\times10^{-9}}=-\dfrac{3\times10^{-1}}{2}=-1,5\times10^{-1}$ $\boxed{\dfrac{1000-0,00003^2-10^3}{6\times10^{-9}}=-0,15}$

-2 $n\in\mathbb{N}$ ؛ $\dfrac{\left(9^{n+1}+9^n\right)^2}{\left(3^{2n+1}-3^{2n}\right)^2}=25$: نوظف خواص الحساب على القوى الصحيحة كما يلي :

أي $\dfrac{\left(9^{n+1}+9^n\right)^2}{\left(3^{2n+1}-3^{2n}\right)^2}=\left(\dfrac{9^{n+1}+9^n}{3^{2n+1}-3^{2n}}\right)^2=\left(\dfrac{\left(3^2\right)^{n+1}+\left(3^2\right)^n}{3^{2n+1}-3^{2n}}\right)^2=\left(\dfrac{3^{2n+2}+3^{2n}}{3^{2n+1}-3^{2n}}\right)^2$

أي $\dfrac{\left(9^{n+1}+9^n\right)^2}{\left(3^{2n+1}-3^{2n}\right)^2}=\left(\dfrac{\cancel{3^{2n}}\left(3^2+1\right)}{\cancel{3^{2n}}\left(3-1\right)}\right)^2$ و منه $\dfrac{\left(9^{n+1}+9^n\right)^2}{\left(3^{2n+1}-3^{2n}\right)^2}=\left(\dfrac{10}{2}\right)^2=5^2$ $\boxed{\dfrac{\left(9^{n+1}+9^n\right)^2}{\left(3^{2n+1}-3^{2n}\right)^2}=25}$

-3 $44444^2+33333^2=55555^2$

لدينا $55555^2-44444^2=\left(55555-44444\right)\left(55555+44444\right)$ أي

$55555^2-44444^2=11111\times99999$ و العدد 99999 يقبل القسمة على 3 لأن مجموع أرقامه هو 45 و 45 يقبل القسمة على 3 حيث $99999=3\times33333$ و منه $55555^2-44444^2=\left(11111\times3\right)\times33333$

أي $55555^2-44444^2=33333\times33333$ أي $55555^2-44444^2=33333^2$ ، معناه نتحصل على :

$$\boxed{44444^2+33333^2=55555^2}$$

-4 $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=-\frac{1}{4\sqrt{3}}$: **نوظف خواص الحساب على الجذور التربيعية :**

لدينا : $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}-\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ أي

$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}-1\times 4}{4\sqrt{3}}$ أي $\boxed{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=-\frac{1}{4\sqrt{3}}}$

-5 $\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^{4}+4^{11}}}=16$: **نوظف خواص الحساب على القوى الصحيحة :**

أي $\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^{4}+4^{11}}}=\sqrt{\frac{(2^3)^{10}+(2^2)^{10}}{(2^3)^{4}+(2^2)^{11}}}=\sqrt{\frac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}}=\sqrt{\frac{2^{20}\,\cancel{(2^{10}+1)}}{2^{12}\,\cancel{(1+2^{10})}}}$

$\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^{4}+4^{11}}}=\sqrt{\frac{2^{20}}{2^{12}}}=\sqrt{2^{20-12}}=\sqrt{2^{8}}$ أي $\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^{4}+4^{11}}}=\sqrt{(2^4)^2}=2^4$ و منه $\boxed{\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^{4}+4^{11}}}=16}$

-6 $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$

نحسب المتطابقة الشهيرة $\left(\sqrt{5}-1\right)^2$ **:** $\left(\sqrt{5}-1\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2-2\left(\sqrt{5}\right)(1)+(1)^2$ أي

$\left(\sqrt{5}-1\right)^2=6-2\sqrt{5}$ **و بأخذ الجذر التربيعي للطرفين حيث** $\sqrt{5}-1\geq 0$ **ينتج** $\boxed{\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1}$

حل التمرين رقم 24 :

نعتبر العبارة : $P(n)=n^2+n+41$ **حيث** n **عدد طبيعي .**

-1 حساب $P(0)$ ؛ $P(1)$ ؛ $P(2)$ ؛ $P(3)$ ؛ $P(4)$ **:**

$$\begin{cases} P(0)=0^2+0+41=41 \;|||\; P(1)=1^2+1+41=43 \\ P(2)=2^2+2+41=47 \;|||\; P(3)=3^2+3+41=53 \\ P(4)=4^2+4+41=61 \end{cases}$$

2- نبين أن الأعداد الناتجة أولية : نكتفي بالعدد 61 و البقية بنفس الطريقة .

هل يقبل العدد 61 القسمة على ...	2	3	5	7	11
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا
حاصل القسمة	30	20	12	8	5

$5<11$

آخر باقي قسمة غير معدوم و بالتالي العدد 61 أولي .

3- هل العبارة $P(n)$ تعطي دائما أعدادا أولية ؟

الإجابة : العبارة $P(n)$ لا تعطي دائما أعدادا أولية ، فمن أجل $n=41$ ينتج $P(41)=41^2+41+41$

أي $P(41)=41^2+2\times 41$ أي $P(41)=41(41+2)$ أي $\boxed{P(41)=41\times 43}$ و بالتالي كل من 41 و

43 يقسم العدد $P(41)$ ؛ إذن نستنتج أن العدد $P(41)$ ليس أوليا .

حل التمرين رقم 25 :

البرهان أن العدد A حيث : $A=\sqrt{88-18\sqrt{7}}-\sqrt{71-16\sqrt{7}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ هو عدد طبيعي .

أولا نحسب الجزء الأيمن من العدد A باستعمال العبارات المرافقة :

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1\left(2-\sqrt{3}\right)}{(2)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}+\frac{1\left(2+\sqrt{3}\right)}{(2)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$ أي $$\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2-\cancel{\sqrt{3}}+2+\cancel{\sqrt{3}}$$

و منه $\boxed{\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}=4}$

و نكتب ما بداخل الجذرين في الطرف الأيسر على شكل متطابقات شهيرة :

$$\sqrt{88-18\sqrt{7}}-\sqrt{71-16\sqrt{7}}=\sqrt{81-2(9)\left(\sqrt{7}\right)+7}-\sqrt{64-2(8)\left(\sqrt{7}\right)+7}$$ أي

$$\sqrt{88-18\sqrt{7}}-\sqrt{71-16\sqrt{7}}=\sqrt{(9)^2-2(9)\left(\sqrt{7}\right)+\left(\sqrt{7}\right)^2}-\sqrt{(8)^2-2(8)\left(\sqrt{7}\right)+\left(\sqrt{7}\right)^2}$$

معناه $\sqrt{88-18\sqrt{7}}-\sqrt{71-16\sqrt{7}}=\sqrt{\left(9-\sqrt{7}\right)^2}-\sqrt{\left(8-\sqrt{7}\right)^2}$ و بما أن $9-\sqrt{7}\geq 0$ و

$8-\sqrt{7}\geq 0$ فإنه ينتج $\sqrt{88-18\sqrt{7}}-\sqrt{71-16\sqrt{7}}=\left(9-\sqrt{7}\right)-\left(8-\sqrt{7}\right)$ أي

$\sqrt{88-18\sqrt{7}}-\sqrt{71-16\sqrt{7}}=9-8$ و منه $\boxed{\sqrt{88-18\sqrt{7}}-\sqrt{71-16\sqrt{7}}=1}$

إذن بجمع الجزئين الأيسر و الأيمن نتحصل على : $\boxed{A=5}$ (عدد طبيعي) و نكتب $A\in\mathbb{N}$.

التحليل إلى جداء عوامل أولية (PPCM ؛ PGCD)

حل التمرين رقم 26 :

1- التحليل إلى جداء عوامل أولية لكل من العددين 1386 و 999 :

$$\begin{cases}1386=2\times 3^2\times 7\times 11\\ 999=3^3\times 37\end{cases}$$

2- إستنتاج تحليلا إلى جداء عوامل أولية للعددين 1386×999 و $1386^2\times 999^2$:

$1386\times 999=\left(2\times 3^2\times 7\times 11\right)\times\left(3^3\times 37\right)$ و باستعمال الخواص على القوى نجد

$$\boxed{1386\times 999=2\times 3^5\times 7\times 11\times 37}$$

$1386^2\times 999^2=\left(2\times 3^2\times 7\times 11\right)^2\left(3^3\times 37\right)^2$ أي $\boxed{1386^2\times 999^2=2^2\times 3^{10}\times 7^2\times 11^2\times 37^2}$

3- حساب $PGCD(1386;999)$ و $PPCM(1386;999)$:

$PGCD(1386;999)$ يساوي جداء العوامل الأولية **المشتركة** في تحليل العددين 1386 و 999 مأخوذة مرة واحدة و **بأصغر** أس .

$PPCM(1386;999)$ يساوي جداء العوامل الأولية **المشتركة و غير المشتركة** في تحليل العددين 1386 و 999 مأخوذة مرة واحدة و **بأكبر** أس .

و منه ينتج :

$\begin{cases} PGCD(1386;999)=3^2 \\ PPCM(1386;999)=2\times3^3\times7\times11\times37 \end{cases}$ أي $\begin{cases} PGCD(1386;999)=9 \\ PPCM(1386;999)=153846 \end{cases}$

4- نعتبر العدد $\lambda=1,\underline{387}387\ldots$:

- ✓ **طبيعة العدد λ : للعدد λ كتابة عشرية دورية ، و العدد λ هو عدد ناطق أي** $\lambda\in\mathbb{Q}$.
- ✓ **تعيين الكتابة الكسرية للعدد λ إنطلاقا من كتابته العشرية الدورية السابقة :**

نكتب العدد λ كمجموع لجزأيه الصحيح و العشري أي نكتب : $\lambda=1+0,\underline{387}387\ldots$

و بوضع $x=0,\underline{387}387\ldots$ **ينتج :** $\boxed{\lambda=1+x}$

نضرب طرفي المعادلة $x=0,\underline{387}387\ldots$ **في** 10^3 **حيث** 3 **يمثل عدد أرقام الدور فنجد :**

$1000x=387,\underline{387}387387\ldots$ أي $1000x=387+0,\underline{387}387387\ldots$ أي $1000x=387+x$ و

منه $999x=387$ ؛ **إذن :** $\boxed{x=387/999}$

نعوض قيمة x في عبارة λ فنتحصل على : $\lambda=1+\dfrac{387}{999}$ أي $\lambda=\dfrac{999+387}{999}$ أي $\boxed{\lambda=\dfrac{1386}{999}}$

- ✓ **إستنتاج الشكل غير قابل للإختزال للعدد λ :**
- ✓ **من السؤال 3- وجدنا أن** $PGCD(1386;999)=9$ ، **إذن بقسمة كل من البسط و المقام للعدد λ على 9 ينتج :** $\boxed{\lambda=\dfrac{154}{111}}$ **و هو كسر غير قابل للإختزال .**

التمرين رقم 27 :

α ، β و γ **ثلاثة أعداد حقيقية حيث :** $\alpha=\dfrac{2^3\times3^2\times5^2}{5\times10}$ ؛ $\beta=\dfrac{2^3\times3\times5\times10^2}{2^2\times5^2}$ و

$\gamma=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$.

1- تبسيط الأعداد α ، β و γ :

$\alpha=\dfrac{2^3\times3^2\times5^2}{5\times10}=\dfrac{2^3\times3^2\times5^2}{2\times5^2}=2^2\times3^2$ و كذلك $\beta=\dfrac{2^3\times3\times5\times10^2}{2^2\times5^2}=\dfrac{2^5\times3\times5^3}{2^2\times5^2}=2^3\times3\times5$

$1-\sqrt{3}\leq 0$ و $2+\sqrt{3}\geq 0$ لأن $\gamma=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=\left(2+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)$

و منه $\gamma=3$.

2- تعيين $PGCD(\alpha;\beta)$ و $PPCM(\alpha;\beta)$:

$$\begin{cases} PGCD(\alpha;\beta)=2^2\times 3=12 \\ PPCM(\alpha;\beta)=2^3\times 3^2\times 5=360 \end{cases}$$

ملاحظة : لدينا $PGCD(\alpha;\beta)\times PPCM(\alpha;\beta)=4320=\alpha\beta$

3- نعم $\dfrac{\alpha}{\beta}$ عدد عشري لأن :

$\dfrac{3}{2\times 5}=\dfrac{2^2\times 3^2}{2^3\times 3\times 5}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ حيث $\dfrac{3}{2\times 5}$ هو كسر غير قابل للإختزال و مقامه يحلل من الشكل $2^n\times 5^m$ حيث n

و m عددان طبيعيان ($n=m=1$) و منه حسب الخاصية المميزة نستنتج أن العدد $\dfrac{\alpha}{\beta}$ عشري .

حل التمرين رقم 28 :

نعتبر العددين الطبيعيين A و B حيث : $A=1200$ و $B=5292$

1- تحليل إلى جداء عوامل أولية كل من العددين A و B ثم إستنتاج تحليلا للجداء $A^2\times B^2$:

$\begin{cases} A=2^4\times 3\times 5^2 \\ B=2^2\times 3^3\times 7^2 \end{cases}$ و منه $A^2\times B^2=\left(2^4\times 3\times 5^2\right)^2\times\left(2^2\times 3^3\times 7^2\right)^2$ أي

$A^2\times B^2=2^8\times 3^2\times 5^4\times 2^4\times 3^6\times 7^4$ أي $\boxed{A^2\times B^2=2^{12}\times 3^8\times 5^4\times 7^4}$.

2- العدد $\sqrt{A\times B}$ طبيعي لأن : $\sqrt{A\times B}=\sqrt{2^4\times 3\times 5^2\times 2^2\times 3^3\times 7^2}=\sqrt{2^6\times 3^4\times 5^2\times 7^2}$ أي

$\sqrt{A\times B}=\sqrt{\left(2^3\times 3^2\times 5\times 7\right)^2}$ أي $\sqrt{A\times B}=2^3\times 3^2\times 5\times 7$ و منه $\boxed{\sqrt{A\times B}\in\mathbb{N}}$.

3- تعيين القيمة المضبوطة للعدد $\sqrt{B}-\sqrt{A}$:

$\sqrt{B}-\sqrt{A}=\sqrt{2^2\times3^3\times7^2}-\sqrt{2^4\times3\times5^2}$ أي $\sqrt{B}-\sqrt{A}=2\times3\times7\sqrt{3}-4\times5\sqrt{3}$ و منه نجد

$\sqrt{B}-\sqrt{A}=(42-20)\sqrt{3}$ أي $\boxed{\sqrt{B}-\sqrt{A}=22\sqrt{3}}$ و هي الكتابة المبسطة للعدد $\sqrt{B}-\sqrt{A}$.

4- حساب $PGCD(A;B)$ و $PPCM(A;B)$ **؛ ثم التحقق أن :**

$$PGCD(A;B)\times PPCM(A;B)=A\times B$$

$$\begin{cases}PGCD(A;B)=2^2\times3\\PPCM(A;B)=2^4\times3^3\times5^2\times7^2\end{cases}\quad \text{أي} \quad \begin{cases}PGCD(A;B)=12\\PPCM(A;B)=529200\end{cases}$$

لدينا : $PGCD(A;B)\times PPCM(A;B)=12\times529200=6350400$ و

$A\times B=1200\times5292=6350400$ و منه ينتج : $\boxed{PGCD(A;B)\times PPCM(A;B)=A\times B}$

5- إختزال الكسر $\frac{B}{A}$ **؛ ثم حساب المجموع** $-\frac{3}{A}+\frac{7}{B}$ **:**

لإختزال الكسر $\frac{B}{A}$ نقسم كل من البسط و المقام على $PGCD(A;B)$ أي على 12 فنتحصل على :

$\frac{B}{A}=\frac{5292/12}{1200/12}=\frac{441}{100}$ و هو كسر غير قابل للإختزال .

$-\frac{3}{A}+\frac{7}{B}=-\frac{3}{2^4\times3\times5^2}+\frac{7}{2^2\times3^3\times7^2}$ أي $-\frac{3}{A}+\frac{7}{B}=-\frac{1}{2^4\times5^2}+\frac{1}{2^2\times3^3\times7}$ أي

$-\frac{3}{A}+\frac{7}{B}=\frac{-2^2\times3^3\times7+2^4\times5^2}{2^6\times3^3\times5^2\times7}$ أي $-\frac{3}{A}+\frac{7}{B}=\frac{-3^3\times7+2^2\times5^2}{2^4\times3^3\times5^2\times7}$ و منه $\boxed{-\frac{3}{A}+\frac{7}{B}=-\frac{89}{75600}}$

حل التمرين رقم 29 :

ليكن α و β عددان طبيعيان حيث : $\alpha=350$ و $\beta=315$.

1- تعيين القاسم المشترك الأكبر $PGCD$ **للعددين** α و β **:**

$\alpha=2\times5^2\times7$ و $\beta=3^2\times5\times7$ و منه نجد : $\boxed{PGCD(\alpha;\beta)=5\times7=35}$

2- التحقق أن العددين $\dfrac{\alpha}{PGCD(\alpha;\beta)}$ و $\dfrac{\beta}{PGCD(\alpha;\beta)}$ أوليان فيما بينهما :

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{PGCD(\alpha;\beta)} = \dfrac{350}{35} = 10 \\ \dfrac{\beta}{PGCD(\alpha;\beta)} = \dfrac{315}{35} = 9 \end{cases}$$

حيث أن العددين الطبيعيين 9 و 10 متتاليان (10 يلي 9) و بالتالي

فهما أوليان فيما بينهما أي $\boxed{PGCD(9;10)=1}$.

3- الكسر $\dfrac{\beta}{2\alpha}$ هو عدد عشري لأن : $\dfrac{\beta}{2\alpha} = \dfrac{3^2\times5\times7}{2(2\times5^2\times7)} = \dfrac{3^2}{2^2\times5} = \dfrac{9}{2^2\times5}$ حيث أن الكسر $\dfrac{9}{2\times5}$

غير قابل للإختزال و مقامه يحلل من الشكل $2^n\times5^m$ حيث n و m عددان طبيعيان ($n=2$ ، $m=1$) .

4- تعيين المضاعف المشترك الأصغر $PPCM$ للعددين α و β ثم التحقق أن :

$$PPCM(\alpha;\beta) = \frac{\alpha\times\beta}{PGCD(\alpha;\beta)}$$

$PPCM(\alpha;\beta) = 2\times3^2\times5^2\times7 = 3150$ و من جهة أخرى : $\dfrac{\alpha\beta}{PGCD(\alpha;\beta)} = \dfrac{110250}{35} = 3150$

و منه نستنتج أن : $PPCM(\alpha;\beta) = \dfrac{\alpha\beta}{PGCD(\alpha;\beta)}$.

حل التمرين رقم 30 :

1- التحليل إلى جداء عوامل أولية لكل من العددين 156 و 84 :

$$\begin{cases} 156 = 2^2\times3\times13 \\ 84 = 2^2\times3\times7 \end{cases}$$

2- حساب $PGCD$ و $PPCM$ لـ 156 و 84 :

$$\begin{cases} PGCD(156;84) = 2^2\times3 = 12 \\ PPCM(156;84) = 2^2\times3\times7\times13 = 1092 \end{cases}$$

3- إختزال الكسر $\frac{156}{84}$ ؛ ثم حساب الفرق $\frac{13}{84}-\frac{5}{156}$:

نقسم كلا من البسط و المقام على 12 فنجد : $\frac{156}{84}=\frac{156/12}{84/12}=\frac{13}{7}$ كسر غير قابل للإختزال .

$\frac{5}{156}-\frac{13}{84}=\frac{5}{2^2\times3\times13}-\frac{13}{2^2\times3\times7}$ أي $\frac{5}{156}-\frac{13}{84}=\frac{5(2^2\times3\times7)-13(2^2\times3\times13)}{(2^2\times3\times13)(2^2\times3\times7)}$ أي

$\frac{5}{156}-\frac{13}{84}=\frac{5\times7-13\times13}{2^2\times3\times7\times13}$ أي $\frac{5}{156}-\frac{13}{84}=-\frac{134}{2^2\times3\times7\times13}$ و منه $\boxed{\frac{5}{156}-\frac{13}{84}=-\frac{67}{546}}$.

4- تعيين أصغر عدد طبيعي n بحيث يكون $n84$ مربعا تاما :

$n84=n\times2^2\times3\times7$ فيكون إذن من أجل $n=3\times7$: $n84=3\times7\times2^2\times3\times7=(2\times3\times7)^2$ أي أن

العدد $n84$ مربع تام ، و بالتالي أصغر قيمة للعدد n هي : $\boxed{21}$.

التمرين رقم 31 :

ليكن A و B عددان طبيعيان حيث : $A=2^2\times3\times7^2$ و $B=25^4\times3^4\times21^2$.

1- تعيين عدد قواسم العدد A :

إذا كان تحليل العدد A من الشكل : $p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times......\times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_1 ، p_2 ، ... ، p_k أعداد أولية و α_1 ، α_2 ، ... ، α_k أعداد طبيعية فإن عدد قواسم العدد A هو $(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)\times......\times(\alpha_k+1)$

و منه عدد قواسم العدد A هو $(2+1)(1+1)(2+1)$ أي $\boxed{18}$ قاسما .

2- التحليل إلى جداء عوامل أولية للأعداد : B ؛ B^2 ؛ A^2 و B^2A .

$$\begin{cases} B=(5^2)^4\times3^4\times(3\times7)^2=3^6\times5^8\times7^2 \\ B^2=(3^6\times5^8\times7^2)^2=3^{12}\times5^{16}\times7^4 \\ A^2=(2^2\times3\times7^2)^2=2^4\times3^2\times7^4 \\ B^2A=(3^{12}\times5^{16}\times7^4)(2^2\times3\times7^2)=2^2\times3^{13}\times5^{16}\times7^6 \end{cases}$$

3- تعيين أصغر عدد طبيعي n بحيث يكون $n\times A$ مربعا تاما :

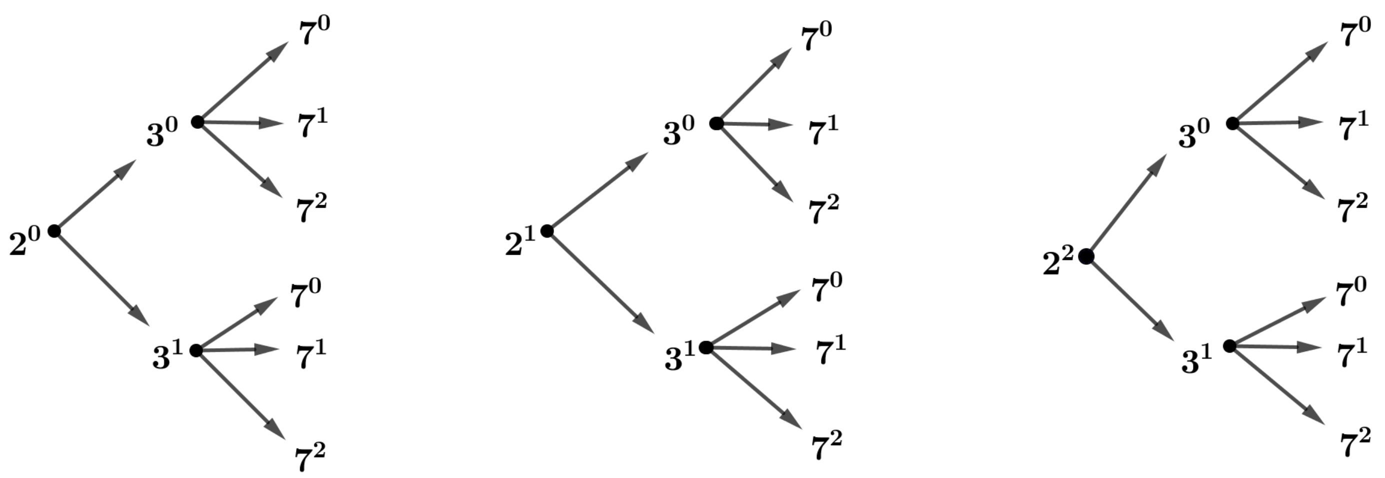
من أجل $\boxed{n=3}$ نجد : $n\times A=3\left(2^2\times3\times7^2\right)=2^2\times3^2\times7^2=\left(2\times3\times7\right)^2$ و هو مربع تام .

4- تعيين أصغر عدد طبيعي m بحيث يكون $m\times B$ مكعبا لعدد طبيعي :

من أجل $m=5\times7$ نجد : $m\times B=5\times7\times\left(3^6\times5^8\times7^2\right)=\left(3^2\right)^3\times\left(5^3\right)^3\times\left(7\right)^3$ أي

$m\times B=\left(3^2\times5^3\times7\right)^3$ و هو مكعب لعدد طبيعي ؛ إذن أصغر عدد طبيعي m بحيث يكون $m\times B$ مكعبا لعدد طبيعي هو $\boxed{m=35}$.

شجرة قواسم العدد A :



لتعيين قواسم العدد A نحسب جداء الأعداد في كل غصن فنجد :

$$D_A=\{1,2,3,4,6,7,12,14,21,28,42,49,84,98,147,196,294,588\}$$

التمرين رقم 69 ص 22 :

69. نعتبر العدد $A = 2^3 \times 5^2 \times 7$

1) تحقق من أنّ A يقبل 24 قاسما.

2) أوجد أصغر عدد طبيعي k حيث يكون kA مربعا لعدد طبيعي.

3) أوجد أصغر عدد طبيعي m حيث يكون mA مكعبا لعدد طبيعي.

حل مقترح :

1) حساب عدد قواسم العدد A :

إذا كان تحليل العدد A من الشكل : $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots\dots \times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_1 ، p_2 ، ... ، p_k أعداد أولية و α_1 ، α_2 ، ... ، α_k أعداد طبيعية فإن عدد قواسم العدد A هو $(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)\times\dots\dots\times(\alpha_k+1)$

و منه عدد قواسم العدد A هو $(3+1)(2+1)(1+1)$ أي $\boxed{24}$ قاسما .

ملاحظة : يمكن تعيين هاته القواسم باستعمال شجرة القواسم .

2) إيجاد أصغر عدد طبيعي k بحيث يكون kA مربعا لعدد طبيعي :

لدينا : $2\times7\times A = 2\times7\times(2^3\times5^2\times7)$ أي $2\times7\times A = 2^4\times5^2\times7^2$ أي $2\times7\times A = (2^2\times5\times7)^2$

و منه $k = 2\times7$ أي $\boxed{k=14}$ أصغر عدد طبيعي حتى يكون kA مربعا لعدد طبيعي .

3) إيجاد أصغر عدد طبيعي m بحيث يكون mA مكعبا لعدد طبيعي :

لدينا : $5\times7^2\times A = 5\times7^2\times(2^3\times5^2\times7)$ أي $5\times7^2\times A = 2^3\times5^3\times7^3$ أي

$5\times7^2\times A = (2\times5\times7)^3$ و منه $m = 5\times7^2$ أي $\boxed{m=245}$ أصغر عدد طبيعي حتى يكون mA مكعبا لعدد طبيعي .

التمرين رقم 70 ص 22 :

70. نعتبر الأعداد من الشكل $f_n = 2^{2^n} + 1$.

1) احسب الأعداد f_0، f_1، f_2، f_3 ثمّ تحقق أنها أولية.

2) بين أن f_5 عدد يقبل القسمة على 641.

حل مقترح :

1- حساب الأعداد f_0 ، f_1 ، f_2 و f_3 :

$$\begin{cases} f_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3 \\ f_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5 \\ f_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17 \\ f_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257 \end{cases}$$

الأعداد 3 ، 5 ، 17 هي أعداد أولية ، يكفي فقط أن نختبر أولية العدد 257 :

هل يقبل العدد 257 القسمة على ...	2	3	5	7	11	13	17	
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	$15 < 17$
حاصل القسمة	128	85	51	36	23	19	15	

آخر باقي قسمة غير معدوم و منه فالعدد 257 أولي .

2- بالحساب لدينا : $f_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ و باستعمال الحاسبة نجد :

$4294967297 = 641 \times 6700417$ و منه فالعدد f_5 يقبل القسمة على 641 (إذن f_5 ليس أوليا) .

فائدة : الأعداد الطبيعية من الشكل $2^{2^n} + 1$ حيث $n \in \mathbb{N}$ تسمى أعداد فيرما (**Nombres de Fermat**) و هي أعداد أولية من أجل كل $0 \le n \le 4$ و قد وضع عالم الرياضيات **Fermat** آنذاك

مخمنة بأن $2^{2^n}+1$ عدد أولي من أجل كل عدد طبيعي n ، إلى أن جاء عالم الرياضيات السويسري أولير **Euler** و بين أن $2^{2^5}+1=641\times 6700417$ (العدد f_5 ليس أوليا) .

و تجدر الإشارة أنه لحد اليوم لم يتمكن علماء الرياضيات من إيجاد أي عدد آخر لفيرما من أجل قيم n الأكبر من 5 (أي من الشكل $2^{2^n}+1$ مع $n>5$) بحيث يكون أوليا ، بل لا نعلم أصلا هل توجد أعداد أخرى لفيرما أولية أم لا !!

التمرين رقم 71 ص 22 :

71. نعتبر الأعداد من الشكل 2^n-1 حيث n عدد أولي.
1) تحقق من أنّ هذا الشكل يعطي أعدادا أولية من أجل قيم n المتمثلة في الأعداد الأولية الأولى.
2) أوجد القيمة الأولى للعدد n التي من أجلها لا يعطي الشكل السابق عددا أوليا.

حل مقترح :

1- التحقق من أن الأعداد التي تكتب من الشكل 2^n-1 هي أعداد أولية من أجل قيم n الأولية الأولى :

- من أجل $n=2$: $2^2-1=3$ و 3 عدد أولي .
- من أجل $n=3$: $2^3-1=7$ و 7 عدد أولي .
- من أجل $n=5$: $2^5-1=31$ و 31 عدد أولي .
- من أجل $n=7$: $2^7-1=127$ و 127 عدد أولي .
- من أجل $n=11$: $2^{11}-1=2047$ و 2047 ليس أوليا .

هل يقبل العدد 127 القسمة على ...	2	3	5	7	11	13
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا
حاصل القسمة	63	42	25	18	11	9

$9<13$

آخر باقي قسمة غير معدوم و منه فالعدد 127 أولي .

2- القيمة الأولى للعدد الطبيعي n التي لا تعطي عددا أوليا أي لا يكون العدد 2^n-1 أوليا هي $n=11$.

هل يقبل العدد 2047 القسمة على ...	2	3	5	7	11	13	17	19	23
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	نعم
حاصل القسمة	1023	682	409	292	186	157	120	107	89

آخر باقي قسمة معدوم و منه فالعدد 2047 ليس أوليا ($2047=23\times89$) .

فائدة : الأعداد من الشكل 2^n-1 حيث $n\in\mathbb{N}^*$ تسمى أعداد مارسان (**Mersenne 1588-1648**)

و لهذه الأعداد علاقة وطيدة مع الأعداد التامة (نسمي عددا طبيعيا **تاما** إذا كان يساوي مجموع قواسمه ماعدا نفسه) و هي تستعمل عادة في تطبيقات علم التشفير .

ليست جميع أعداد **Mersenne** هي أعداد أولية ، لكن إن كان العدد 2^n-1 أوليا فإن n أولي .

صفحة : الرياضيات في الثانوية

لا تنسونا من صالح دعائكم ....