سلسلة التفوق في الرياضيات رقم 01

تذكـــير:

❖ قواسم عدد طبيعي:

📖 a و b عددان طبيعيان حيث $b \neq 0$.

✓ القول أن b قاسم للعدد a، معناه أن باقي القسمة الإقليدية لـ a على b هو 0.

✓ القول أن b قاسم للعدد a، معناه يوجد عدد طبيعي q حيث $a = b \times q$.

مثال:

$20 \times 6 = 120$ ومنه 6 قاسم للعدد 120 وحاصل القسمة $q = 20$

ولدينا: أيضا $6 \times 20 = 120$ ومنه 20 قاسم للعدد 120 و $q = 6$.

ملاحظات:

1. كل الجمل الآتية لها نفس المعنى:
   - b قاسم لـ a.
   - b يقسم a.
   - a يقبل القسمة على b.
   - a مضاعف لـ b.
2. 1 قاسم لكل عدد طبيعي a لأن $a = 1 \times a$.
3. كل عدد طبيعي غير معدوم يقبل القسمة على نفسه ونكتب: $a = a \times 1$

❖ خواص قواسم عدد طبيعي:

خاصية 01:

a ، b و n أعداد طبيعية غير معدومة.

- إذا كان n يقسم كلا من a و b، فإن n يقسم $a + b$ و $a - b$ $(a \geq b)$.
- إذا كان n يقسم a، فإنّ n يقسم $k \times a$ حيث k عدد طبيعي.

خاصية 02:

a ، b و n أعداد طبيعية غير معدومة حيث $a > b$.

إذا كان n يقسم كلا من a و b، فإنّ n يقسم باقي القسمة الإقليدية لـ a على b.

❖ تعيين قواسم عدد طبيعي:

للبحث عن قواسم عدد طبيعي a.

نجري القسمة الإقليدية للعدد a على الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها أصغر من a أو يساويه، وفي حالات الباقي المعدوم، فإنّ كلا من المقسوم عليه والناتج هما قاسمان للعدد a.

في حالة الأعداد 2، 3، 4، 5 و 9 نطبق قواعد قابلية القسمة.

مثال: عيّن كل قواسم العدد 124.

لدينا: 124 محصور بين 11^2 و 12^2 ومنه نختبر قابلية قسمة 124 على الأعداد من 1 إلى 11. نجد 124 يقبل القسمة على كل من الأعداد 1، 2، 4. ومن المساويات: $124 = 1 \times 124$ ، $124 = 2 \times 62$، $124 = 4 \times 31$.

نجد أن 124 يقبل القسمة على 31، 62، 124.

ومنه قواسم 124هي: 1، 2، 4، 31، 62، 124.

❖ القواسم المشتركة لعددين طبيعيين:

القواسم المشتركة لعددين طبيعيين a و b هي الأعداد الطبيعية غير المعدومة التي تقسم a و b في آن واحد.

مثال:

6 قاسم مشترك لـ 12 و 18 لأن: $12 = 2 \times 6$ و $18 = 3 \times 6$

قواسم 12هي: 1، 2، 3، 4، 6، 12.

قواسم 18هي: 1، 2، 3، 6، 9، 18.

إذن القواسم المشتركة للعددين 12 و 18 هي 1، 2، 3، 6.

❖ القاسم المشترك الأكبر:

يُسمّى أكبر قاسم مشترك لعددين طبيعيين a و b القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين، ويرمز له بالرمز $PGCD(a;b)$.

مثال:

قواسم 12هي: 1، 2، 3، 4، 6، 12.

قواسم 18هي: 1، 2، 3، 6، 9، 18.

القواسم المشتركة لـ 12 و 18 هو 1، 2، 3، 6.

القاسم المشترك الأكبر لـ 12 و 18 هو 6.

ونكتب: $PGCD(12;18) = 6$

❖ طريقة إيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

خوارزمية عمليات القسمات المتتابعة (خوارزمية اقليدس):

مثال: أوجد $PGCD(156;132)$

$156 = 132 \times 1 + 24$

$132 = 24 \times 5 + 12$

$24 = 12 \times 2 + 0$

إذن: $PGCD(156;132) = 12$

اخر باقي قسمة غير معدوم هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 156 و132

خوارزمية الفروق المتتابعة:

مثال: أوجد $PGCD(156;132)$

$156 - 132 = 24$

$132 - 24 = 108$

$108 - 24 = 84$

$84 - 24 = 60$

$60 - 24 = 36$

$36 - 24 = 12$

$24 - 12 = 12$

$12 - 12 = 0$

إذن: $PGCD(156;132) = 12$

اخر ناتج عملية طرح غير معدوم هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 156 و132

نتائج مباشرة:

a و bعددان طبيعيان.

- $PGCD(a;a) = a$
- $PGCD(a;0) = a$
- إذا كان b قاسما للعدد a فإن $PGCD(a;b) = b$
- $PGCD(a;b) = PGCD(b;a)$

ملاحظات:

1. a و b أوليان فيما بينهما ($PGCD(a;b) = 1$) معناه (الكسر $\frac{a}{b}$ غير قابل للاختزال).
2. لاختزال الكسر $\frac{a}{b}$ الى كسر غير قابل للاختزال يكفي قسمة كلا من a و b على $PGCD(a;b)$.

تمارين وضعيات

التمرين 01:

أوجد جميع قواسم الأعداد الآتية:

48، 75، 13×2، $17 \times 11 \times 3$

التمرين 02:

1. عين كل قواسم العددين 105 و 75.
2. ماهو أكبر قاسم مشترك لهما؟
3. ماهو أصغر قاسم مشترك لهما؟

التمرين 03:

باستعمال الفوارق المتتابعة، جد في كل حالة من الحالات الآتية القاسم المشترك الأكبر للعددين.

أ. $a = 928$ و $b = 580$

ب. $a = 806$ و $b = 496$

ج. $a = 3465$ و $b = 1575$

التمرين 04:

احسب القاسم المشترك الأكبر لكل من الأعداد التالية باستعمال خوارزمية اقليدس في كل حالة:

أ. $a = 725$ و $b = 348$

ب. $a = 845$ و $b = 693$

ج. $a = 2736$ و $b = 1216$

التمرين 05:

احسب ذهنيا القاسم المشترك الأكبر للعددين في كل حالة من الحالات الآتية:

أ. 60 و 60 ؛ ب. 45 و 0 ؛ ج. 10 و 200.

التمرين 06:

عيّن العدد الطبيعي a المحصور بين 25 و 40 و الذي يحقّق $PGCD(a;15)=5$.

التمرين 07:

عندما نقسم 402 على العدد x نجد الباقي 12.

عندما نقسم 488 على العدد x نجد الباقي 8.

- اوجد العدد x، علما أنّ $x>12$.

التمرين 08:

1. بيّن أن العددين 63 و 110 أوليان فيما بينهما.
2. بيّن أنّ: $\frac{441}{770}=\frac{63}{110}$
3. عين العدد الطبيعي n حيث: $\frac{441}{770}=\frac{315}{315+n}$

التمرين 09:

a و b عددان أوليان فيما بينهما.

- هل العددان $3a$ و $6b$ أوليان فيما بينهما؟

التمرين 10:

x و y عددان طبيعيان غير معدومين بحيث: $240x=120y$.

1. احسب الكسر $\frac{x}{y}$.
2. أعط الناتج على شكل كسر غير قبل للاختزال.

التمرين 11:

اكتب كل كسر من الكسور التالية على شكل كسر غير قابل للاختزال.

$\frac{136}{104}$ ؛ $\frac{240}{520}$ ؛ $\frac{651}{310}$ ؛ $\frac{333}{666}$ ؛ $\frac{1978}{732}$

التمرين 12:

احسب وأعط النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال.

$B=\frac{2}{3}-\frac{11}{3}\div\frac{7}{12}$ ؛ $A=\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)\times\frac{7}{6}$

$D=\frac{2-\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$ ؛ $C=\frac{5}{2}\times\frac{\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\div 5}{\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\times\frac{1}{4}}$

التمرين 13:

إليك العدد E حيث $E=\frac{2175}{1044}+\frac{17}{12}$

1. هل العددان 2175 و 1044 أوليان فيما بينهما؟ علّل.
2. اكتب الكسر $\frac{2175}{1044}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.
3. استنتج كتابة للعدد E على شكل $a+\frac{b}{c}$ حيث a، b و c أعداد طبيعية مع a أكبر ما يمكن و b أصغر ما يمكن.

التمرين 14:

1. احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1631 و 932.
2. اكتب الكسر $\frac{1631}{932}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.
3. احسب العدد A حيث: $A=\frac{1631}{932}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}$

التمرين 15:

إليك الاعداد A; B حيث:

$B=\frac{90\times(10^3)^2\times 12\times 10^{-4}}{5\times 10^3}$ ؛ $A=\frac{133}{27}$

1. احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 133 و 27. ماذا تستنتج بالنسبة للكسر A.
2. أعط الكتابة العلمية للعدد B.

التمرين 16:

1. اكتب الكسر $\frac{210}{301}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.
2. احسب الفرق $\frac{210}{301}-\frac{17}{86}$ ثم اكتب النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال.

الوضعية 01:

اشترى عمي سعيد 1392 كراسا و812 كتابا من أجل توزيعها على أكبر عدد ممكن من التلاميذ المحتاجين بحيث كل تلميذ يحصل على كراريس وكتب في ان واحد ويجب ان تكون القسمة عادلة.

1. على كم تلميذ يمكن توزيع كل الكراريس وكل الكتب؟
2. كم كراس وكم كتاب يحصل عليه كل تلميذ؟

الوضعية 02:

يريد المسؤولون عن الحماية المدنية وضع 240 عون حماية و105 ضابطاً للحماية المدنية في مجموعات متماثلة وبأكبر عدد ممكن من الافراد.

1. احسب عدد المجموعات التي تمّ تشكيلها.
2. احسب عدد أعوان الحماية وعدد الضباط في كل مجموعة.

الوضعية 03:

عمي محمد الفلاح، يملك حقل نخيل مستطيلة الشكل طوله $135\ m$ و عرضه $39\ m$ يريد تسييجه. لهذا الغرض يغرس أعمدة متساوية المسافة عن بعضها البعض، حيث تكون هذه المسافة عدد طبيعي وأكبر من $2\ m$، بالإضافة إلى ذلك يضع عمود في كل ركن من أركان الحقل.

1. ماهي المسافة الفاصلة بين كل عمودين؟
2. ماهو عدد الأعمدة؟

الوضعية 04:

نريد ملء دنّين بالماء وذلك باستعمال دَن سعته xL حيث x عدد طبيعي.

نعلم أنّ سعة الدنّ ① هي $24\ L$ وسعة الدّن ② هي $18\ L$.

1. ماهي أكبر قيمة للعدد x؟ (نفرغ هذا الدّن كلّيا في كل مرّة).
2. كم مرّة استعملنا هذا الدّن لملء الدّن ①؟ لملء الدّن ②؟

الوضعية 05:

قطعة أرض مستطيلة الشكل بعداها $165\ m$، $88\ m$ نريد أن نقيم عليها بيوتا بلاستيكية ذات قواعد مربعة الشكل لها نفس البعد d.

1. أوجد قيمة d حتى يكون عدد البيوت البلاستيكية أقل ما يمكن.
2. ماهو عندئذ عدد البيوت البلاستيكية؟

الوضعية 06: $(BEM\ 2010)$

1. احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 140 و 220.
2. صفيحة زجاجية مستطيلة الشكل بعداها $1,40\ m$ و $2,20\ m$ جزنت إلى مربعات متساوية بأكبر ضلع دون ضياع .

أ. ماهو طول ضلع كل مربع؟

ب. ماهو عدد المربعات الناتجة؟

بالتوفيق والنجاح