التمرين 1:

احسب $pgcd\left(10^{120} ; 10^{705}+10^{912}+10^{30}\right)$ موضحا الخطوات.

نطبق خوارزمية إقليدس :

$$10^{705}+10^{912}+10^{30} = 10^{120}\times\left(10^{585}+10^{792}\right)+\boxed{10^{30}}$$
$$10^{120} = 10^{30}\times 10^{90}+0$$

آخر باقٍ غير معدوم هو 10^{30} إذن

$$\boxed{pgcd\left(10^{120} ; 10^{705}+10^{912}+10^{30}\right) = 10^{30}}$$

$10^{120} > 10^{30}$ لأن عدد أرقام 10^{120} أكبر من عدد أرقام 10^{30} (العدد الطبيعي الذي له أكبر عدد من الأرقام هو الأكبر) إذن 10^{30} هو باقي القسمة الأولى.

التمرين 2:

لدى بائع الأزهار 324 وردة حمراء و 252 وردة بيضاء. يريد هذا البائع تشكيل باقات متماثلة تتكون كل باقة من خمسة ورود حمراء و ثلاثة ورود بيضاء.

☜ ما هو أكبر عدد من الباقات يمكن للبائع تشكيلها ؟

هذا التمرين مستوى 1م و لا نوظف فيه القاسم المشترك الأكبر لأن عدد الورود الحمراء و عدد البيضاء في كل باقة معلوم.
الهدف منه هو تنبيه التلميذ إلى التركيز قبل الخوض في الحسابات، فوجود عبارة "أكبر ما يمكن" لا يعني بالضرورة الق.م.أ.

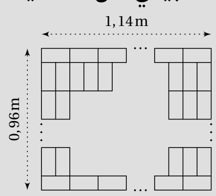
- لدينا : $324 = 5\times 64+4$ إذن يمكن تشكيل 64 باقة على الأكثر بالورود الحمراء.
- و $252 = 3\times 84+0$ إذن يمكن تشكيل 84 باقة على الأكثر بالورود البيضاء.

و بالتالي فإن أكبر عدد من الباقات المتماثلة التي يمكن أن يشكلها البائع هو 64 باقة (نختار أصغر العددين السابقين).

يمكن شرح الفكرة بمثال آخر : لو كان لدينا 64 جوربا أيمن و 84 جوربا أيسر فإنه لا يمكن تشكيل أكثر من 64 زوج جوارب.

التمرين 3:

1. قاعة مستطيلة الشكل بُعداها $8,4\ m$ و $4,8\ m$ نريد تغطيتها ببلاطات مربعة الشكل متماثلة و بدون تقطيع.
– ما هي القيم الممكنة لطول ضلع البلاطة الواحدة ؟
2. صفيحة مستطيلة الشكل بُعداها $1,44\ m$ و $0,96\ m$ نريد تقطيعها إلى أقل عدد ممكن من المربعات المتماثلة و بدون ضياع.
(أ) ما هو طول ضلع المربع الواحد ؟
(ب) ما هو عدد المربعات التي تتحصل عليها ؟
3. صفيحة مستطيلة الشكل بُعداها $1,14\ m$ و $0,96\ m$ نريد تغطيتها بمستطيلات متماثلة طولها ضعف عرضها (عدد طبيعي من السنتيمترات) حسب الشكل الموالي.



(أ) ما هي القيم الممكنة لبُعدَي المستطيل الواحد ؟
(ب) ما هو عدد المستطيلات اللازمة ؟

1. التحويل : $8,4\ m = 84\ dm$ و $4,8\ m = 48\ dm$.

البلاطات مربعة الشكل و متماثلة و بدون تقطيع إذن طول ضلع البلاطة الواحدة قاسم لطول البلاطة و قاسم لعرضها أي قاسم مشترك للعددين 84 و 48.

القواسم المشتركة لعددين طبيعيين هي قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

نحسب $pgcd\,(84;48)$ بخوارزمية إقليدس.

$$\left\{\begin{array}{l} 84 = 48\times 1+36 \\ 48 = 36\times 1+12 \\ 36 = 12\times 3+0 \end{array}\right. \Rightarrow PGCD\,(84;48) = 12$$

قواسم 12 هي : 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 6 و 12. $12 = 1\times 12 = 2\times 6 = 3\times 4$

إذن القيم الممكنة لطول ضلع البلاطة الواحدة (بالدسيمتر) هي : 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 6 و 12.

2. (أ) التحويل : $1,44\ m = 144\ cm$ و $0,96\ m = 96\ cm$.

يتم تقطيع الصفيحة إلى مربعات متماثلة و بدون ضياع إذن طول ضلع المربع الواحد قاسم لطول الصفيحة و قاسم لعرضها أي قاسم مشترك للعددين 144 و 96. و بما أننا نريد أقل عدد من المربعات فإن طول ضلع المربع الواحد أكبر ما يمكن و بالتالي فهو يساوي $pgcd\,(144;96)$ أي $48\ cm$.

$$\left\{\begin{array}{l} 144 = 96\times 1+48 \\ 96 = 48\times 2+0 \end{array}\right. \Rightarrow PGCD\,(144;96) = 48$$

(ب) طريقة 1:

- مساحة الصفيحة هي $13824\ cm^2$. $\mathscr{S} = 144\times 96 = 13824$
- مساحة المربع الواحد هي $2304\ cm^2$. $s = 48\times 48 = 2304$

إذن نتحصل على 6 مربعات. $\dfrac{\mathscr{S}}{s} = \dfrac{13824}{2304} = 6$

طريقة 2:

- عدد المربعات طولا هو 3 مربعات. $144\div 48 = 3$
- عدد المربعات عرضا هو 2 مربعات. $96\div 48 = 2$

إذن نتحصل على 6 مربعات. $3\times 2 = 6$

3. (أ) نسمي x عرض المستطيل الواحد (بـ cm). طوله هو إذن $2x$.

إذا كان n عدد المستطيلات اللازمة أفقيا (السطرين الأول و الأخير من الشكل) و m عدد المستطيلات اللازمة عموديا (باستثناء المستطيلات التي تم عدها أفقيا) فإن :

- $n\times 2x = 114$ منه $nx = 114\div 2$ أي $nx = 57$.
- $m\times 2x = 96-2x$ منه $m\times 2x+2x = 96$ منه $(m+1)\times 2x = 96$
منه $(m+1)\,x = 96\div 2$ أي $(m+1)\,x = 48$.

نستنتج إذن أن x قاسم مشترك للعددين 57 و 48 و بالتالي x قاسم لـ $pgcd\,(57;48)$. نحسبه بخوارزمية إقليدس.

$$\left\{\begin{array}{l} 57 = 48\times 1+9 \\ 48 = 9\times 5+3 \\ 9 = 3\times 3+0 \end{array}\right. \Rightarrow PGCD\,(57;48) = 3$$

قواسم 3 هي 1 و 3 إذن $x = 1$ أو $x = 3$.

نستنتج أن القيم الممكنة لبُعدَي المستطيل الواحد هي :

$1\ cm\times 2\ cm$ أو $3\ cm\times 6\ cm$

طريقة أخرى: إذا قسمنا كل مستطيل إلى جزأين متماثلين، سنحصل على مربعات متماثلة طول ضلع كل منها x و عددها زوجي طولا و عرضا و بالتالي $2x$ يقسم كلا من 114 و 96 منه x قاسم مشترك للعددين 57 و 48. ثم نواصل بنفس الطريقة.

(ب) • **الحالة الأولى** : مستطيلات $1\ cm\times 2\ cm$ (الحالة $x = 1$)

مساحة الصفيحة هي $10944\ cm^2$. $\mathscr{S} = 114\times 96 = 10944$

مساحة المستطيل الواحد هي $2\ cm^2$. $s = 1\times 2 = 2$

إذن يلزمنا 5472 مستطيلا. $\dfrac{\mathscr{S}}{s} = \dfrac{10944}{2} = 5472$

طريقة أخرى : وجدنا سابقا أن $nx = 57$ و $(m+1)\,x = 48$.
من أجل $x = 1$ فإن $n = 57$ و $m+1 = 48$ أي $n = 57$ و $m = 47$.
– يلزمنا 57 مستطيلا في السطر العلوي و 57 في السطر السفلي بمجموع 114 مستطيلا.
– في الجزء المتبقي (بدون السطرين العلوي و السفلي)، يلزمنا 47 مستطيلا عرضا و 114 مستطيلا طولا و بالتالي يلزمنا $114\times 47 = 5358$ مستطيلا.
– المجموع $5358+114$ أي 5472 مستطيلا.

• **الحالة الثانية** : مستطيلات $3\ cm\times 6\ cm$ (الحالة $x = 3$)

مساحة الصفيحة هي $10944\ cm^2$. $\mathscr{S} = 114\times 96 = 10944$

مساحة المستطيل الواحد هي $18\ cm^2$. $s = 3\times 6 = 18$

إذن تلزمنا 608 مستطيلات. $\dfrac{\mathscr{S}}{s} = \dfrac{10944}{18} = 608$

طريقة أخرى : وجدنا سابقا أن $nx = 57$ و $(m+1)\,x = 48$.
من أجل $x = 3$ فإن $n = 19$ و $m+1 = 16$ أي $n = 19$ و $m = 15$.
– يلزمنا 19 مستطيلا في السطر العلوي و 19 في السطر السفلي بمجموع 38 مستطيلا.
– في الجزء المتبقي (بدون السطرين العلوي و السفلي)، يلزمنا 15 مستطيلا عرضا و 38 مستطيلا طولا و بالتالي يلزمنا $38\times 15 = 570$ مستطيلا.
– المجموع $570+38$ أي 608 مستطيلات.