مذكرة رقم: 2

تحضير مذكرة تعليمية

السنة الدراسية 2014/2013		إعداد الاستاذ يوسفي عبد الرحمن

المحور الثاني : كثيرات الحدود

المستوى : الثانية رياضيات

الموضوع : الدوال كثيرات الحدود

الكفاءة المستهدفة

- التعرف على دالة كثير حدود و على درجتها
- حل مسائل تستخدم فيها معادلات و متراجحات من الدرجة الثانية

المكتسبات القبلية

- الدوال التآلفية
- إدراك مفهوم الدالة بجوانبه الثلاثة، البياني و الجبري و الحسابي

مخطط الدرس	التوقيت
نشاط : .... 1: الدالة كثير حدود 2: درجة كثير حدود 3:تساوي كثير حدود 4:عمليات على كثيرات الحدود 5: جذر كثير حدود 6: تحليل كثير حدود (الشكل النموذجي)	

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات • الجديد في الرياضيات	• السبورة • جهاز داتاشو	

المؤسســـــــة: ثانوية رقان الجديدة	**المستـــــوى:** الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	**ميدان التعلم:** الدوال
التاريـــــــخ:	**الوحدة التعلمية:** الدوال كثيرات الحدود
توقيت الحصة :	**موضوع الحصة :** تعريفات

المكتسبات القبلية : الدالة

مؤشرات الكفاءات :

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز(ســـــير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
I) **النشاط:** 01 ص 38 من الكتاب x عدد حقيقي. أنشر و بسط ثم رتب العبارة: $\left(x^3+2x+1\right)\left(x^2+1\right)$ هل العدد 103121 اولي ؟ **نشاط2:** 1/ رتب وبسط المجموع التالي : $x-x^2+x^5+3x-$ $x^3+2x^2-5+\frac{3}{2}x^4-$ $2x^2-x^4+3x^5-\frac{1}{2}x$ 2/ ما هو الحد الأعلى درجة فيه؟	**1. الدالة كثير حدود** **تعريف:** **نسمي دالة كثير حدود (أو كثير حدود) كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:** $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ **حيث n عدد طبيعي و a_0 ، a_1 ، ... ، a_n أعداد حقيقية ثابتة.** **أمثلة:** كل دالة ثابتة: $x\mapsto k$ $(k\in\mathbb{R})$ هي دالة كثير حدود و بصفة خاصة الدالة المعدومة: $x\mapsto 0$. الدوال: $x\mapsto 0,3x^2+x-\sqrt{2}$ ، $x\mapsto(x+2)(x^2-2)$ ، $x\mapsto x^5$ هي كثيرات حدود. **2.درجة كثير حدود** **مبرهنة و تعريف:** كل دالة كثير حدود غير معدومة f تكتب بطريقة وحيدة على الشكل: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ مع $a_n\neq 0$ يسمى العدد الطبيعي n درجة كثير الحدود f ، تسمى الأعداد a_0 ، a_1 ، ... ، a_n معاملاته و يسمى $a_p\,x^p$ الحد الذي درجته p **أمثلة:** كل دالة ثابتة: $x\mapsto a_0$ $(a_0\neq 0)$ هي كثير حدود درجته 0. كل دالة تآلفية: $x\mapsto ax+b$ $(a\neq 0)$ هي كثير حدود درجته 1. كل دالة: $x\mapsto ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ هي كثير حدود درجته 2 (تسمى أيضا ثلاثي حدود من الدرجة الثانية) **ملاحظه** درجة كثير الحدود المعدوم غير معيّنة **3.تساوي كثيري حدود** **مبرهنة:** يكون كثير حدود معدوما إذا و فقط إذا كانت كل معاملاته معدومة. يكون كثيرا حدود ، غير معدومين، متساويين إذا و فقط إذا كانا من نفس الدرجة و كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية. **مثال:** إذا كان لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $ax^3+bx^2+cx+d=2x^3-x+3$ فإن: $a=2$ ، $b=0$ ، $c=-1$ و $d=3$. **تطبيق:** **هل الدوال التالية كثيرات حدود ؟ في حالة الإجابة بنعم حدد درجتها.** ا) $f(x)=(x-1)(2x^2+3)$ ب) $g(x)=\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}$ جـ) $h(x)=(\sin x)^2-3\sin x+2$	

طريقة: تكون الدالة f كثير حدود إذا أجبنا بنعم على السؤالين التاليين:

1) هل f معرفة على $\mathbb{R}$ ؟ 2) هل يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل:

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

حل: ا) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 3$ إذن الدالة f دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة.

ب) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل عدد حقيقي x ، $x^2+1 \neq 0$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) = \dfrac{(x^2+1)^2}{x^2+1} = x^2+1$ إذن الدالة g دالة كثير حدود من الدرجة الثانية.

ج) الدالة h ليست دالة كثير حدود لأنه لا يمكن كتابة $h(x)$ **على الشكل:**

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

تطبيق: f **دالة كثير حدود معرفة بـ:** $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

1 .عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x : $f(x) = 0$

حل: 1.

$$(x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c)$$
$$= ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c = x^3 + x^2 - 4x - 4$

وهذا يعني $\begin{cases} a=1 \\ a+b=1 \\ b+c=-4 \\ c=-4 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-4 \end{cases}$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي

x : $f(x) = (x+1)(x^2-4)$

.2 $f(x)=0$ يعني $(x+1)(x^2-4)=0$ أي $x+1=0$ أو $x^2-4=0$ أي: $x=-1$

أو $x^2=4$ ومن الحلول هي -1 ، -2 ، و 2 إذن مجموعة الحلول

هي: $S = \{-2, -1, 2\}$

4عمليات كثيرات الحدود

رقم 21 الصـــفحة 53

تسمح قواعد الحساب الجبري من التوصل إلى النتائج التالية:

نتائـــج:

1. **مجموع، فرق و جداء كثيرات حدود هي كثيرات حدود.**
2. **مركب كثيري حدود هو كثير حدود.**
3. **جداء كثيري حدود غير معدومين درجتاهما n و p على الترتيب هو كثير حدود درجته $(n+p)$.**

ملاحظة: **بصفة عامة حاصل قسمة كثير حدود f على كثير حدود g ليس كثير حدود و**

تسمى الدالة: $h: x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ دالة ناطقة.

تطبيق:

نعتبر الدالتين كثيري الحدود f و g المعرفتين بـ: $f(x)=2x+1$ و $g(x)=-3x^2+x-1$

1. عين كثيرات الحدود التالية: $f+g$ ، $2f-3g$ و $g\circ f$.

عين كثير الحدود $f\times g$ محددا درجته

حل:

1. بتطبيق قواعد الحساب الجبري نحصل على:

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-3x^2+3x$
- $(2f-3g)(x)=2f(x)-3g(x)=9x^2+x+5$
- $(g\circ f)(x)=g[f(x)]=-12x^2-10x-3$

2. $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=-6x^3-x^2-x-1$ و لدينا درجة $f\times g$ هي

رقم 07 الصـــفحة 52

5.جذر كثير حدود

تعريف:

ليكن f كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي.

العدد α جذر لكثير الحدود f يعني $f(\alpha)=0$

مثال: ليكن f كثير الحدود المعرف بـ: $f(x)=x^3-x^2-x-2$

لدينا: $f(2)=0$ ومنه 2 هو جذر لكثير الحدود f بينما العدد 0 ليس جذرا له لأن $f(0)\neq 0$ $(f(0)=-2)$

تطبيق: f دالة كثير حدود معرفة بـ: $f(x)=x^3-x^2-4x+4$

تحقق أن العدد 2 جذر لكثير الحدود f عين كثير حدود g بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=(x-2)g(x)$

حل:

لدينا: $f(2)=0$ و منه العدد 2 جذر لكثير الحدود f . إذن حسب المبرهنة يوجد كثير حدود g بحيث من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=(x-2)g(x)$

طريقة: **لتعيين $g(x)$ يمكن فرض $g(x)=ax^2+bx+c$ ثم تعيين المعاملات a ، b و c باستعمال تساوي كثيري حدود و ذلك بعد نشر و تبسيط و ترتيب العبارة $(x-2)g(x)$**

كما يمكن استعمال خوارزمية القسمة

الطريقة العملية لتعيين:

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-4x+4 & x-2 \\ \cline{2-2} -\left(x^3-2x^2\right) & x^2+x-2 \\ \cline{1-1} x^2-4x+4 & \\ -\left(x^2-2x\right) & \\ \cline{1-1} -2x+4 & \\ -(-2x+4) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

و منه: $f(x)=(x-2)(x^2+x-2)$

نجد هكذا: $g(x)=x^2+x-2$

6.تحليل كثير حدود بأستعمال $(x-\alpha)$

مبرهنة: ليكن f كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي.
إذا كان $f(\alpha)=0$ (α جذر لكثير الحدود f) فإنه يوجد كثير حدود g بحيث من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=(x-\alpha)g(x)$

مثال: ليكن f كثير الحدود المعرف بـِ: $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$
لدينا $f(1)=0$ و $f(2)=0$ و $f(3)=0$ و منه الأعداد 1، 2 و 3 هي جذور لكثير الحدود f . يمكن إذن تحليل f و لدينا: $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

رقم 24 ,25 الصـــــفحة 53

المؤسســـــــة: ثانوية رقان الجديدة	**المستـــــوى:** الثانية علوم تجريبية
السنة الدراسية:	**ميدان التعلم:** الدوال
التاريـــــــخ:	**الوحدة التعليمية:** الدوال كثيرات الحدود 02
توقيت الحصة :	**موضوع الحصة :** المعادلات و المتراجحات

المكتسبات القبلية : المتطابقات الشهيرة . المعادلات من الدرجة الثنية

مؤشرات الكفاءات :

الأنشطة المقترحة وطبيعتها		التعليمات والتوجيهات

نشاط

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2 + 6x + 5$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) = (x+1)(x+5)$ و $f(x) = (x+3)^2 - 4$

2. باستعمال عبارة $f(x)$ المناسبة حل في $\mathbb{R}$ المعادلات ذات المجهول x التالية:

أ) $f(x) = 0$
ب) $f(x) = 5$
ج) $f(x) + 3 = 0$
د) $f(x) = x + 1$
هـ) $f(x) = -4$
و) $f(x) + 20 = 0$

ماذا تمثل حلول كل معادلة من المعادلات السابقة ؟

2/المعادلات من الدرجة الثانية

1.2 المعادلات من الدرجة الثانية

تعريف:

نسمي معادلة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^2 + bx + c = 0$

حيث a ، b و c **أعداد حقيقية ثابتة مع** $a \neq 0$.

2.2 حل المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0$

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول x التالية: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

باستعمال الشكل النموذجي نبرهن على المبرهنة التالية:

	إذا كان:	حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0$	الاشارة	يتم تحليل ax^2+bx+c
مبرهنة	$\Delta > 0$	$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	x: $-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ $P(x)$: إشارة a 0 عكس إشارة a 0 إشارة a	$a(x-x_1)(x-x_2)$
	$\Delta = 0$	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	x: $-\infty$ $-\frac{b}{a}$ $+\infty$ $P(x)$: إشارة a 0 إشارة a	$a(x-x_1)^2$
	$\Delta < 0$	**لا توجد حلول**	x: $-\infty$ $+\infty$ $P(x)$: إشارة a	**لا يمكن تحليل** ax^2+bx+c

ملاحظة: إذا كان $\Delta = 0$ نقول أن المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلا مضاعفا

البرهان: نكتب العبارة في الطرف الأوّل للمعادلة ax2+bx+c=0 (a≠0) على شكلها النموذجي، عندئذ نميّز ثلاث حالات: $\Delta > 0$ نكتب $\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$. منه

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] =$$

للمعادلة حلان هما: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0$ $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. ومنه للمعادلة حلّ وحيد هو: $x_0 = \frac{-b}{2a}$

$\Delta < 0$ لدينا $0 \quad -\frac{\Delta}{4a^2} >$، وبالتالي $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right) > 0$ ومنه المعادلة لا تقبل حلولا

مبرهنة:

لتكن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ مع $(a\neq 0)$، Δ مميّزها:

*** إذا كان $\Delta > 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلين x_1، x_2:** $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

و ينتج $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

***إذا كان $\Delta = 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلا مضاعفا x_0:** $x_0 = \frac{-b}{2a}$

(نعني بحلّ مضاعف، حلان متطابقان)

و ينتج $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$

*** إذا كان $\Delta < 0$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلولا و العبارة ax^2+bx+c لا تحلل**

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

ا) $x^2+2x=0$ ب) $x^2+x+1=0$ جـ) $x^2-4x+4=0$ د) $x^2+x-6=0$

حـل: ا) $x^2+2x=0$ تعني $x(x+2)=0$ أي $x=0$ أو $x=-2$ ومنه مجموعة الحلول هي $S=\{-2,0\}$

ب) لدينا $a=1$، $b=1$ و $c=1$ ومنه $\Delta=(1)^2-4(1)(1)=-3$ إذن ليس للمعادلة حلول ومنه $S=\varnothing$

جـ) $x^2-4x+4=0$ تكافئ $(x-2)^2=0$ إذن للمعادلة حل مضاعف $x=2$ ومنه $S=\{2\}$

د) لدينا $a=1$، $b=1$ و $c=-6$ ومنه $\Delta=(1)^2-4(1)(-6)=25$ إذن للمعادلة حلان متمايزان: $x_1=\frac{-1+\sqrt{25}}{2}=2$ و $x_2=\frac{-1-\sqrt{25}}{2}=-3$ ومنه $S=\{-3,2\}$

3.2 الشكل النموذجي لثلاثي الحدود ax^2+bx+c $(a\neq 0)$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$

و بما أن $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$ فإن $x^2+\frac{b}{a}x = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$

ومنه $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

بوضع $\Delta = b^2-4ac$ نجد $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

تعريف:

ليكن ax^2+bx+c ثلاثي حدود من الدرجة الثانية $(a\neq 0)$

يسمى العدد b^2-4ac **مميز ثلاثي الحدود** ax^2+bx+c و نرمز إليه بالرمز Δ

يسمى $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ **الشكل النموذجي لثلاثي الحدود** ax^2+bx+c

مثال: نعتبر ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية f المعرف بـ: $f(x)=x^2+3x-4$

1.عين الشكل النموذجي لـِ $f(x)$

2.بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)\geq -\frac{25}{4}$. استنتج أن f تقبل على $\mathbb{R}$ قيمة حدية يطلب تحديدها

حـل: **1**. من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $x^2+3x-4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

و منه $f(x)=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$ و هو الشكل النموذجي لـِ $f(x)$.

2..لمقارنة $f(x)$ بالعدد $-\frac{25}{4}$ نقوم بدراسة إشارة الفرق $\left[f(x)-\left(-\frac{25}{4}\right)\right]$

لدينا من السؤال الأول: $f(x)-(-\frac{25}{4})=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$ وبما أن $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\geq 0$ نستنتج أن

$f(x)-(-\frac{25}{4})\geq 0$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)\geq -\frac{25}{4}$.

بما أن $f(x)\geq -\frac{25}{4}$ و $f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{25}{4}$ فإن $f(x)\geq f\left(-\frac{3}{2}\right)$ نستنتج أن الدالة f تقبل

على $\mathbb{R}$ قيمة حدية صغرى هي $-\frac{25}{4}$ و تبلغها من أجل القيمة $-\frac{3}{2}$ للمتغير

المؤسســـــة: ثانوية رقان الجديدة **السنة الدراسية:** **التاريـــــخ:** **توقيت الحصة :**	**المستـــوى:** الثانية علوم تجريبية **ميدان التعلم:**الدوال **الوحدة التعلمية:** الدوال كثيرات الحدود 02 **موضوع الحصة :**المعادلات و المتراجحات

المكتسبات القبلية : المتطابقات الشهيرة . المعادلات من الدرجة الثنية

مؤشرات الكفاءات :

الأنشطة المقترحة وطبيعتها		التعليمات والتوجيهات
نشاط نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2+6x+5$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. 1.تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=(x+1)(x+5)$ و $f(x)=(x+3)^2-4$ 2.باستعمال عبارة $f(x)$ المناسبة حل في $\mathbb{R}$ المعادلات ذات المجهول x التالية: أ) $f(x)=0$ ب) $f(x)=5$ جـ) $f(x)+3=0$ د) $f(x)=x+1$ هـ) $f(x)=-4$ و) $f(x)+20=0$ ماذا تمثل حلول كل معادلة من المعادلات السابقة ؟	(انظر المحتوى أدناه)	

3/المتراجحات من الدرجة الثانية

1.3 المتراجحات من الدرجة الثانية

تعريف:

نسمي متراجحة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x ، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الشكلين التاليين: $ax^2+bx+c\geq 0$ ، او $ax^2+bx+c>0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

2.3 اشارة ثلاثي حدود $ax^2+bx+c.(a\neq 0)$

x	$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$
$x-x_1$	$-$ 0 $+$ | $+$
$x-x_2$	$-$ | $-$ 0 $+$
$a(x-x_1)(x-x_2)$	إشارة a 0 إشارة $(-a)$ 0 إشارة a

الحالة1: $\Delta>0$ لدينا $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ حيث: $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. بفرض $x_1<x_2$ نحصل على الجدول المقابل

الحالة2: $\Delta=0$

لدينا $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$ حيث: $x_1=\frac{-b}{2a}$ ومنه $ax^2+bx+c=0$

من أجل $x=x_1$ و إشارته هي إشارة a من أجل كل $x\neq x_1$.

الحالة3: $\Delta<0$ لـــــدينا $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$ و بمـــــا أن $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]>0$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x ، إشارة ax^2+bx+c هي إشارة a .

مبرهنة

$\Delta<0$ المعادلة $ax^2+bx+c=0$ لا تقبل حلولا:

من أجل كل عدد حقيقي x ، إشارة ax^2+bx+c هي من نفس إشارة a

$\Delta>0$: المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين متمايزين x_1 و x_2 $(x_1<x_2)$

x	$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a 0 إشارة $(-a)$ 0 إشارة a

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات

ا) $2x^2+4x-6\leq 0$ ب) $-x^2+10x-25\geq 0$ جـ) $x^2-x+4<0$

يؤول حل متراجحة من الشكل $ax^2+bx+c\geq 0$ ، $ax^2+bx+c>0$ ، $ax^2+bx+c\leq 0$ أو $ax^2+bx+c<0$ إلى دراسة إشارة ثلاثي الحدود ax^2+bx+c

حـل:

أ) لدينا $\Delta=64$ ومنه حلول المعادلة $2x^2+4x-6=0$ هما: -3 و 1

x	$+\infty$ 1 -3 $-\infty$
$2x^2+4x-6$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

مجموعة الحلول هي إذن: $S=[-3;1]$

ب) لدينا $\Delta=0$ ومنه للمعادلة

x	$+\infty$ 5 $-\infty$
$-x^2+10x-25$	$-$ 0 $-$

$-x^2+10x-25=0$ حلا مضاعفا هو 5. مجموعة الحلول هي إذن: $S=\{5\}$

x	$+\infty$ $-\infty$
x^2-x+4	$+$

جـ) لدينا $\Delta=-15$ ومنه ليس للمعادلة $x^2-x+4=0$ حلولا لأن $\Delta<0$

مجموعة الحلول هي إذن: $S=\varnothing$

المؤسســــــة: ثانوية رقان الجديدة	**المستـــــوى:** الثانية علوم تجريبية
السنة الدراسية:	**ميدان التعلم:** الدوال
التاريــــــخ:	**الوحدة التعلمية:** الدوال كثيرات الحدود 02
توقيت الحصة :	**موضوع الحصة :** المعادلات والمتراجحات

المكتسبات القبلية : المتطابقات الشهيرة . المعادلات من الدرجة الثنية

مؤشرات الكفاءة :

الأنشطة المقترحة وطبيعتها		التعليمات والتوجيهات
نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x التالية $ax^2+bx+c=0$ .... (1) مع $(a\neq 0)$ نعلم أنه إذا كان $\Delta \geq 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين (جذرين) x' و x'' حيث: $x'=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ إذا وضعنا $S=x'+x''$ و $P=x'\times x''$ حيث S هو مجموع الحلين و $S=-\frac{b}{a}$ و $P=\frac{c}{a}$	(المحتوى أدناه)	

4/مجموع وجداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

تطبيق1: حساب أحد الحلّين بمعرفة الآخر

إذا علم أحد الجذرين يمكن حساب الجذر الآخر و ذلك باستعمال المجموع S أو الجداء P

تمرين تطبيقي: نعتبر المعادلة التالية: $2x^2+\alpha x-3=0$ حيث α عدد حقيقي .

عين α حتىيكون (-3) حلا لهذه المعادلة ثم استنتج الحل الآخر.

تطبيق2: تعيين عددين علم مجموعهما و جداؤهما

مبرهنة: يكون مجموع عددين هو S و جداؤهما هو P إذا و فقط إذا كانا حلين للمعادلة ذات المجهول x: $x^2-Sx+P=0$ أنجز برهانا لهذه المبرهنة.

تمرين تطبيقي: عين بعدي مستطيل مساحته $77\,cm^2$ و محيطه $36\,cm$.

هل يوجد مستطيلا مساحته $30\,cm^2$ و محيطه $20\,cm$؟

تطبيق3: تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية

مبرهنة: نعتبر المعادلة: $ax^2+bx+c=0$ ..... (1) مع $(a\neq 0)$.

1. إذا كان $\frac{c}{a}<0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين إشارتاهما مختلفتان.
2. إذا كان $\frac{c}{a}>0$ و $\Delta>0$ و $-\frac{b}{a}>0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين موجبين تماما.
3. إذا كان $\frac{c}{a}>0$ و $\Delta>0$ و $-\frac{b}{a}<0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين سالبين تماما.

أنجز برهانا لهذه المبرهنة.

تمرين تطبيقي: ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $(m-1)x^2+2(m+1)x+m=0$

الحل $(m-1)x^2+2(m+1)x+m=0$

$m=1$ نلاحظ أن المعادلة تصبح من الدرجة الأولى أي ان $2(m+1)x+m=0$ اذن $x=\frac{-1}{4}$

* $m=1$ المعادلة تقبل حل وحيد هو $x=\frac{-1}{4}$

$m\neq 1$ المعادلة من الدرجة 2 نحسب المميز

$\Delta=b^2-4ac=12m+4$

*لما $\Delta=0$ فان $m=-\frac{1}{3}$ اذن المعادلة تقبل حلا مضاعفا وهو $x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$

تمرين رقم 58 الصـــفحة 56

* $\Delta<0$ أي ان $m<-\frac{1}{3}$ معناه $m\in\left[-\infty;-\frac{1}{3}\right]$ المعادلة لا تقبل حلا

$\Delta>0$ أي ان $m>-\frac{1}{3}$ معناه $m\in\left[-\frac{1}{3};+\infty\right]$ ندرس اشارة $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$

* $\frac{c}{a}=\frac{m}{m-1}$ ندرس إشارة $\frac{c}{a}$ نجد

m	$-\infty$ − 0	+ 1	+ $+\infty$
m-1	−	− 0	+
الجداء	+	−	+

$\frac{c}{a}<0$ يعني $m\in[0;1]$

المعادلة تقبل حلين إشاراتهما مختلفتان.

$-\frac{b}{a}=\frac{2(m+1)}{(m-1)}$

ندرس اشارة $-\frac{b}{a}$

	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
m-1	−	− 0	+
m+1	- 0	+	+
الجداء	+	-	+

$-\frac{b}{a}>0$ يعني ان $m\in[-\infty;-1]\cup[1;+\infty]$

$\frac{c}{a}>0$ يعني ان $m\in[-\infty;0]\cup[1;+\infty]$

$\Delta>0$ يعني ان $m\in\left[-\frac{1}{3};+\infty\right]$

إذا كان $\frac{c}{a}>0$ و $\Delta>0$ و $-\frac{b}{a}>0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين موجبين تماما لما

$m\in[-\infty;-1]\cup[1;+\infty]$ و $m\in[-\infty;0]\cup[1;+\infty]$ و $m\in\left[-\frac{1}{3};+\infty\right]$ أي $m\in[1;+\infty]$

$-\frac{b}{a}<0$ يعني ان $m\in[-1;1]$

$\frac{c}{a}>0$ يعني ان $m\in[-\infty;0]\cup[1;+\infty]$

$\Delta>0$ يعني ان $m\in\left[-\frac{1}{3};+\infty\right]$

إذا كان $\frac{c}{a}>0$ و $\Delta>0$ و $-\frac{b}{a}<0$ فإن المعادلة تقبل حلين سالبين تماما لما $m\in\left[-\frac{1}{3};0\right]$

جدول الحلول

m	$-\infty$	-1/3	0	1	$+\infty$
Δ	−	0 +	+	+	
	لا تقبل حل	حل مضاعف	حلين مختلفين	حل وحيد	حلين موجبين

المؤسســـــــة: ثانوية رقان الجديدة	**المستـــــوى:** الثانية علوم تجريبية
السنة الدراسية:	**ميدان التعلم:** الدوال
التاريـــــــخ:	**الوحدة التعلمية:** الدوال كثيرات الحدود 02
توقيت الحصة :	**موضوع الحصة:** المعادلات والمتراجحات **مضاعفة التربيع**

المكتسبات القبلية : المتطابقات الشهيرة . المعادلات من الدرجة الثنية

مؤشرات الكفاءات :

الأنشطة المقترحة وطبيعتها		التعليمات والتوجيهات

نشاط

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2+6x+5$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=(x+1)(x+5)$ و $f(x)=(x+3)^2-4$
2. باستعمال عبارة $f(x)$ المناسبة حل في $\mathbb{R}$ المعادلات ذات المجهول x التالية:

أ) $f(x)=0$
ب) $f(x)=5$
ج) $f(x)+3=0$
د) $f(x)=x+1$
هـ) $f(x)=-4$
و) $f(x)+20=0$

ماذا تمثل حلول كل معادلة من المعادلات السابقة ؟

5/ المتراجحات والمعادلات مضاعفة التربيع

1.3 المعادلات مضاعفة التربيع

تعريف:

نسمي معادلة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^4+bx^2+c=0$ حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

بين أن حل المعادلة $ax^4+bx^2+c=0$ يؤول إلى حل الجملة: $\begin{cases} X=x^2 \\ aX^2+bX+c=0 \end{cases}$

يسمى المجهول X مجهولا مساعدا.

بعد حل المعادلة $aX^2+bX+c=0$ نستنتج حلول المعادلة $ax^4+bx^2+c=0$

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات ذات المجهول x التالية:

1) $x^4+x^2-6=0$ 2) $x^4-5x^2+4=0$ 3) $2x^4+5x^2+2=0$

2.3 المتراجحات مضاعفة التربيع

تعريف:

نسمي متراجحة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الشكلين التاليين:

$ax^4+bx^2+c\geq 0$ ، $ax^4+bx^2+c>0$ حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

يؤول حل متراجحة مضاعفة التربيع إلى دراسة إشارة ax^4+bx^2+c

دراسة مثال: نعتبر في $\mathbb{R}$ المتراجحة ذات المجهول x : $x^4-7x^2+12<0$ .... $(*)$

1. نضع: $f(x)=x^4-7x^2+12$

تحقق أن 3 و 4 هما حلا المعادلة ذات المجهول X : $X^2-7X+12=0$

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=(x^2-3)(x^2-4)$
3. أدرس حسب قيم x إشارة $f(x)$ (يمكنك استعمال جدول)
4. استنتج حلول المتراجحة $(*)$

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة ذات المجهول x التالية: $-x^4+4x^2+5\leq 0$

تمرين رقم 74 ,75 ,77 الصـــــفحة 58