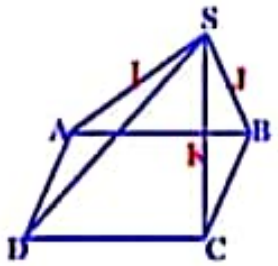
1. ما هو تقاطع المستوى (CIJ) مع المستويين (P) و (SDA) ؟
2. برهن أن المستوى (IJK) يقطع القطعة $[SD]$ في منتصفها .



حل :

1. المستويان (CIJ) و (P) متمايزان ولهما نقطة مشتركة C إذن تقاطعهما هو مستقيم يشمل النقطة C .
في المثلث SAB لدينا I و J منتصفي القطعتين $[SA]$ و $[SB]$ على الترتيب إذن حسب نتيجة طاليس (IJ) يوازي (AB) .
في المستوي (P) لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع إذن (AB) يوازي (DC) ومنه : (IJ) يوازي (DC) .
إذن المستقيمين (IJ) و (DC) يعينان مستو الذي هو (CIJ) .
خلاصة : تقاطع المستويين (CIJ) و (P) هو المستقيم (DC) .
نستنتج أن المستوي (CIJ) يشمل النقطتين I و D
بما أن النقطة I تنتمي إلى المستقيم (SA) فإن I تنتمي إلى المستوي (SDA)
وبالتالي المستويين (CIJ) و (SDA) متمايزان ويشتركان في نقطتين متمايزتين I و D إذن تقاطعهما هو المستقيم (ID) .
2. في ما سبق لدينا (IJ) يوازي (DC) ، وفي المثلث SDC نعين L منتصف (SD) وبما أن K منتصف (SC) فإن المستقيم (KL) يوازي (DC) ومنه : (IJ) يوازي (KL) إذن النقطة L تنتمي إلى المستوي (IJK) .
بما أن المستقيم (SD) لا يوازي المستوي (IJK) فإنهما يتقاطعان في نقطة وحيدة وهي L منتصف القطعة $[SD]$.

تم بفضل الله
الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات
الأستاذ يوسف بوشناق
يتمنى لكم التوفيق

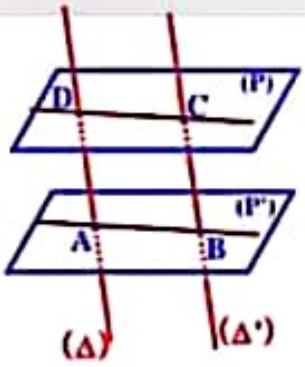
تجدون هذا الملف في صفحة
Top Maths

Scanné avec CamScanner

التمرين التاسع

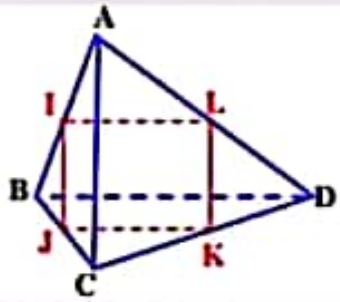
نعتبر مستقيمين متوازيين تماما (Δ) و (Δ') يقطعان مستويين متوازيين تماما (P) و (P') في أربع نقط A ، B ، C و D
برهن أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

حل :



لدينا (Δ) و (Δ') مستقيمين متوازيين إذن (AD) و (BC) مستقيمين متوازيين
ويعينان مستو $(ABCD)$
المستوي $(ABCD)$ يقطع كل من المستويان المتوازيان (P) و (P') في
مستقيمين متوازيين وهما (AB) و (DC) .
إذن في المستوي $(ABCD)$ لدينا $(AD)\ //\ (BC)$ و $(AB)\ //\ (DC)$ ومنه
الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

التمرين العاشر

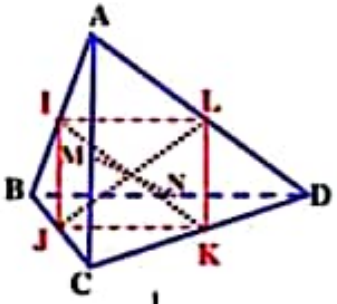


$ABCD$ رباعي وجوه ،
I ، J ، K و L منتصفات $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[CD]$ و $[DA]$ على الترتيب .

1. برهن أن الرباعي $IJKL$ متوازي الأضلاع.
2. النقطتان M و N منتصفا $[AC]$ و $[BD]$ على الترتيب.
   برهن أن للمستقيمات (IK) ، (JL) و (MN) نقطة مشتركة وحيدة.

حل :

1. في المثلث ABC نطبق نتيجة مبرهنة طاليس الخاصة
   بالمنتصفات ونحصل على $(IJ)\ //\ (AC)$ و $AC = 2IJ$.



ونطبق نفس النتيجة في المثلث ACD ونحصل على $(LK)\ //\ (AC)$ و $AC = 2LK$.
ومنه : $(LK)\ //\ (IJ)$ و $IJ = LK$
بالتالي : المستقيمان (IJ) و (LK) يعينان مستو وهو
$(IJKL)$ والرباعي $IJKL$ هو متوازي الأضلاع.

2. من السؤال السابق نستنتج أن القطرين $[IK]$ و $[JL]$ متناصفان.
   لنبرهن أن $[IK]$ و $[MN]$ متناصفان. (أو $[JL]$ و $[MN]$ متناصفان)

بتطبيق نتيجة مبرهنة طاليس في كل من المثلثين ABC و BCD نجد : $(IM)\ //\ (BC)$ ، $IM = \frac{1}{2}BC$ و
$(NK)\ //\ (BC)$ ، $NK = \frac{1}{2}BC$. ومنه : $(NK)\ //\ (IM)$ إذن هذين المستقيمين يعينان مستو $(IMKN)$ ولدينا
$IM = NK$ وبالتالي الرباعي $IMKN$ متوازي أضلاع ومنه قطريه $[IK]$ و $[MN]$ متناصفان.
خلاصة القطع $[IK]$ ، $[JL]$ و $[MN]$ لها نفس المنتصف ومنه للمستقيمات (IK) ، (JL) و (MN) نقطة مشتركة وحيدة.

التمرين الحادي عشر

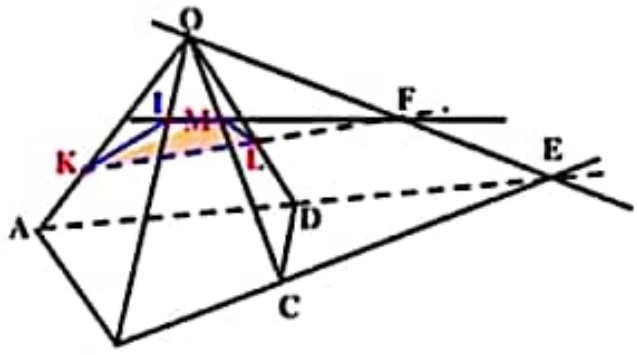
$ABCD$ متوازي أضلاع في مستو (P) و S نقطة خارج المستوي (P) .
نعين النقط I ، J ، K منتصفات $[SA]$ ، $[SB]$ و $[SC]$ على الترتيب.

Scanné avec CamScanner

تمارين محلولة

Scanné avec CamScanner

المستويان المتمايزان (OAD) و (OBC) يشتركان في النقطتين O و E ،
إذن تقاطعهما هو المستقيم (OE) .



المستقيمان (KL) و (OE) هما من نفس المستوى (OAD) نسمي نقطة تقاطعهما F . بما أن (OE) مستقيم من المستوي (OBC) فإن النقطة F تنتمي إلى المستوي (OBC) وبما أن (KL) مستقيم من المستوي (KLM) فإن النقطة F تنتمي إلى المستوي (KLM) . وبالتالي المستويان (OBC) و (KLM) يشتركان في النقطتين F و M إذن تقاطعهما هو المستقيم (MF) .
في المستوي (OBC) نسمي I نقطة تقاطع المستقيمين (MF) و (OB) .
إذن تقاطع الوجه (OBC) والمستوي (KLM) هو القطعة $[MI]$.

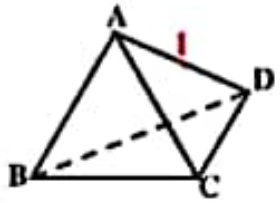
- نستنتج مباشرة أن تقاطع الوجه (OAB) والمستوي (KLM) هو القطعة $[KI]$ لأن المستويان (OAB) و (KLM) متمايزان ويشتركان في النقطتين K و I .

التمرين الثامن

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم (أحرفه متقايسة) ، النقطة I منتصف $[AD]$ (أنظر الشكل)

أ. تحقق من أن الوجه (ABC) يقع في مستوي الواجهة .
ب. أنقل الشكل وأرسم المستقيم (Δ) الذي يشمل I ويوازي المستقيم (BD) .
ج. علم النقطتين M و N منتصفي الحرفين $[BC]$ و $[CD]$ على الترتيب.
ماذا يمثل كل من :

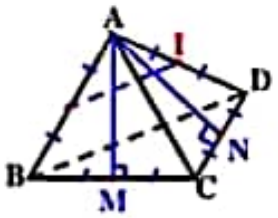
- المستقيم (AM) بالنسبة للمثلث ABC .
- المستقيم (AN) بالنسبة للمثلث ACD .



حل :

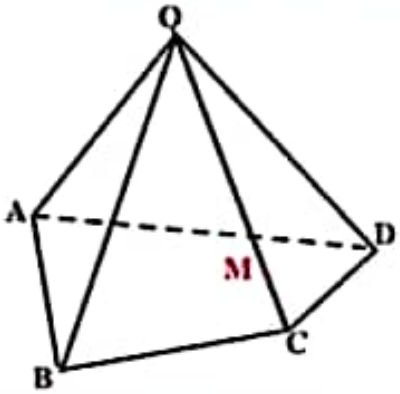
أ. الأشكال الواقعة في المستوي الواجهة تحافظ على قياسات الزوايا والأطوال وهذا ما نلاحظه على المثلث متقايس الأضلاع ABC إذن الوجه (ABC) يقع في مستوي الواجهة .
ب. النقطة I والمستقيم (BD) يعينان المستوي (ABD) .
إذن المستقيم (Δ) يقع في المستوي (ABD) .
بما أن I منتصف $[AD]$ و (Δ) يوازي (BD) إذن حسب نتيجة مبرهنة طاليس :
(Δ) يمر بمنتصف الحرف $[AB]$.
ج. تعلم النقطتين M و N

- في المثلث ABC المستقيم (AM) هو محور القطعة $[BC]$.
- في المثلث ACD المستقيم (AN) هو محور القطعة $[CD]$.



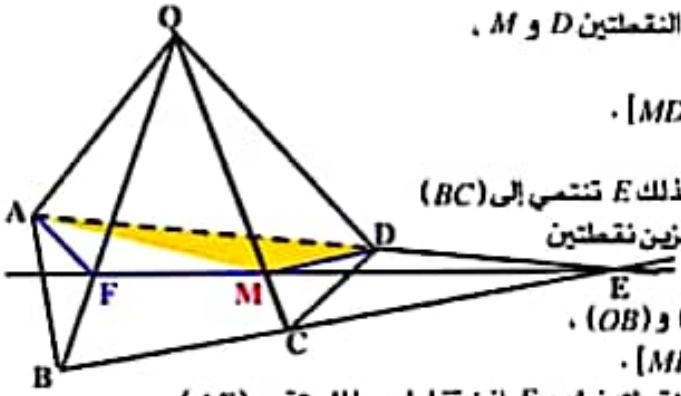
Scanné avec CamScanner

التمرين السادس



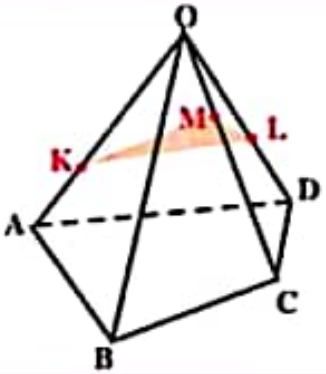
الشكل المقابل هو لهرم قاعدته الرباعي $ABCD$.
M نقطة من الحرف $[OC]$.
أرسم تقاطعات الأوجه (OCD) ، (OBC) و (OAB)
مع المستوي (MAD) .
إرشاد : أنشئ نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و
(BC) .

حل:



- المستويان (OCD) و (MAD) متمايزان ويشتركان في النقطتين D و M ،
إذن تقاطعهما هو المستقيم (MD) .
وبالتالي تقاطع الوجه (OCD) والمستوي (MAD) هو القطعة $[MD]$.
- نسمي E نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و (BC) .
E تنتمي إلى (AD) إذن E تنتمي إلى المستوي (MAD) ، وكذلك E تنتمي إلى (BC)
إذن E تنتمي إلى المستوي (OBC) ومنه لهذين المستويين المتمايزين نقطتين
مشتركتين E و M ومنه تقاطعهما هو المستقيم (EM) .
في المستوي (OBC) ، نضع F نقطة تقاطع المستقيمين (EM) و (OB) ،
وبالتالي تقاطع الوجه (OBC) والمستوي (MAD) هو القطعة $[MF]$.
لدينا المستويين المتمايزين (OAB) و (MAD) يشتركان في النقطتين A و F إذن تقاطعهما المستقيم (AF) ،
وبالتالي تقاطع الوجه (OAB) والمستوي (MAD) هو القطعة $[AF]$.

التمرين السابع



الشكل التالي هو لهرم قاعدته الرباعي $ABCD$. K نقطة من الحرف $[OA]$ ،
L نقطة من الحرف $[OD]$ و M نقطة من الحرف $[OC]$.
أرسم تقاطع لكل من الأوجه (OAD) ، (ODC) ، (OBC) و (OAB)
مع المستوي (KLM) ، علل الرسم.
إرشاد : أنشئ تقطع المستويين (OAD) و (OBC)

حل:

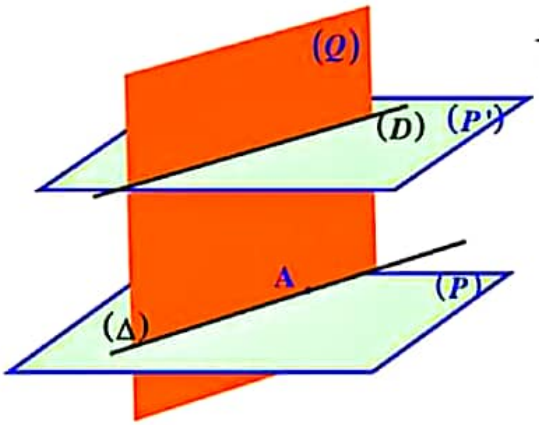
- المستويان (OAD) و (KLM) متمايزان ويشتركان في النقطتين K و L ،
إذن تقاطعهما هو المستقيم (KL) .
ومنه تقاطع الوجه (OAD) والمستوي (KLM) هو القطعة $[KL]$.
- وبنفس الطريقة تقاطع الوجه (ODC) والمستوي (KLM)
هو القطعة $[LM]$.
- نسمي E نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و (BC) .

Scanné avec CamScanner

التمرين الرابع

(P) و (P') مستويان متوازيان ، A نقطة من (P) و (D) مستقيم من (P') ؛ (Q) المستوي المعين بالمستقيم (D) والنقطة A . (Δ) المستقيم المشترك بين المستويين (P) و (Q) . أرسم هذا الشكل .

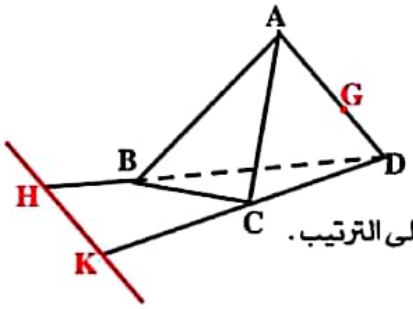
حل :



المستوي (Q) يقطع كل من المستويين (P) و (P') في المستقيمين (Δ) و (D) على الترتيب ، بما أن (P) و (P') مستويان متوازيان فإن (Δ) و (D) مستقيمان متوازيان .

التمثيل بالمنظور والتصميم :

التمرين الخامس

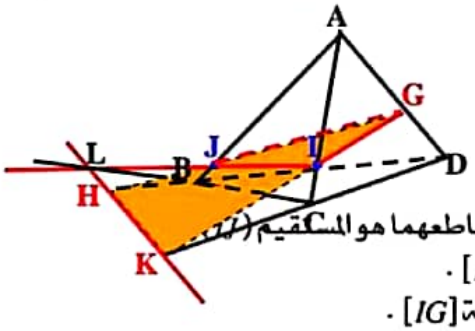


في الشكل المقابل لدينا رباعي الوجوه $ABCD$ ، مستقيم (HK) من المستوي (BCD) حيث (HK) لا يوازي (BC) ، ونقطة G من الحرف $[AD]$.

أ. أرسم تقاطعات المستوي (GHK) مع الأوجه (ABC) ، (ACD) و (ABD) للرباعي الوجوه .

ب. نسمي I و J النقطتين المشتركتين للمستوي (GHK) مع (AC) و (AB) على الترتيب . برهن أن للمستقيمات (HK) ، (BC) و (IJ) نقطة مشتركة وحيدة .

حل :



أ. تقاطع المستوي (GHK) مع الوجه (ABC) :

النقط A ، G ، D ، C ، K تنتمي إلى نفس المستوي (ACD)

إذن المستقيمين (AC) و (GK) متقاطعان في نقطة نسمها I .

النقط A ، G ، D ، B ، H تنتمي إلى نفس المستوي (ABD)

إذن المستقيمين (AB) و (GH) متقاطعان في نقطة نسمها J .

المستويان (GHK) و (ABC) متمايزان ويشتركان في نقطتين I و J إذن تقاطعهما هو المستقيم (IJ)

وبالتالي تقاطع المستوي (GHK) مع الوجه (ABC) هي القطعة المستقيمة $[IJ]$.

ونستنتج مباشرة أن تقاطع المستوي (GHK) مع الوجه (ACD) هي القطعة $[IG]$.

وكذلك تقاطع المستوي (GHK) مع الوجه (ABD) هي القطعة $[JG]$.

ب. في المستوي (BCD) لدينا المستقيمين (HK) و (BC) غير متوازيين نسمي L تقاطعهما .

بما أن L هي نقطة من (BC) فإنها تنتمي إلى المستوي (ABC) وبما أنها نقطة من (HK) فهي تنتمي إلى المستوي (GHK)

إذن L تنتمي إلى تقاطع المستويين (ABC) و (GHK) الذي يتمثل في المستقيم (IJ)

وبالتالي L هي نقطة مشتركة للمستقيمات (HK) ، (BC) و (IJ) .

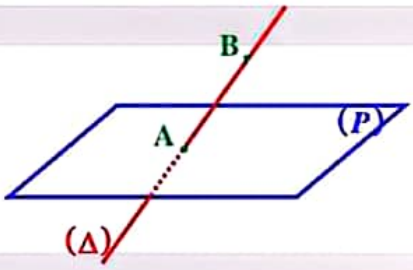
Scanné avec CamScanner

تمارين محلولة

التمرين الاول

(P) مستو و B نقطة لا تنتمي إلى (P) . (Δ) مستقيم يشمل B ويقطع (P) في النقطة A . أرسم هذا الشكل .

حل :



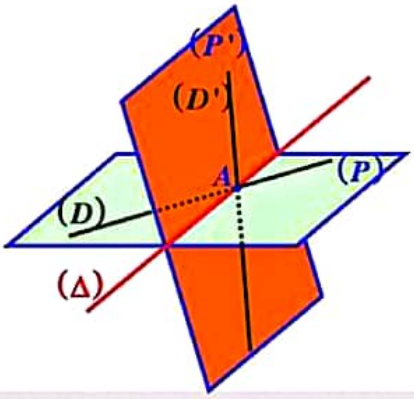
رسمنا المستقيم بشكلين ، خط مستمر وخط متقطع .
الخط المستمر هو الظاهر في الحقيقة والخط المتقطع هو غير ظاهر.

التمرين الثاني

(P) و (P') مستويان متقاطعان في مستقيم (Δ) . (D) مستقيم من (P) و (D') مستقيم من (P') حيث (D) و (D') يتقاطعان في النقطة A . أرسم هذا الشكل .

حل :

النقطة A هي نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (D') إذن هي نقطة مشتركة للمستويين (P) و (P') وبالتالي النقطة A تنتمي إلى مستقيم (Δ) .

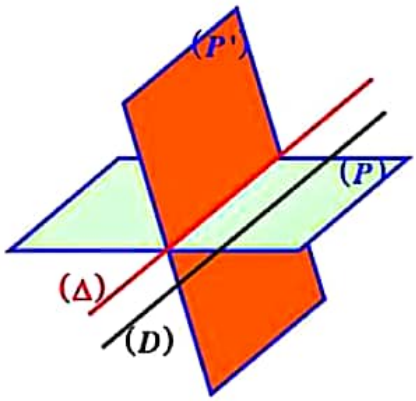


التمرين الثالث

(P) و (P') مستويان متقاطعان في مستقيم (Δ) . (D) مستقيم من (P) ويوازي (P') . أرسم هذا الشكل .

حل :

المستقيم (D) محتوى (P) في يوازي (P') إذن هو موازي لتقاطعهما (Δ)



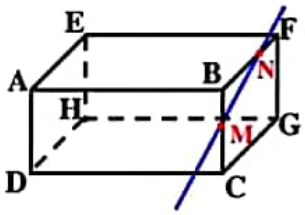
Scanné avec CamScanner

تمارين الرسم

Scanné avec CamScanner

تمرين :

الشكل المقابل هو تمثيل بالمنظور متساوي القياس لمتوازي المستطيلات $ABCDEFGH$.
M نقطة من $[BC]$ و N نقطة من $[BF]$.



أذكر الوضع النسبي مع تبرير الجواب لكل من :

أ. المستقيم (MN) والمستوي (BCF) .
ب. المستقيم (MN) والمستوي $(ABFE)$.
ج. المستقيم (MN) والمستوي $(ADHE)$.
د. المستقيم (MN) والمستقيم (CG) .
ه. المستقيم (EB) والمستقيم (HC) .
و. المستوي (NBM) والمستوي (BEH) .
ز. المستوي (NBM) والمستوي (AEH) .

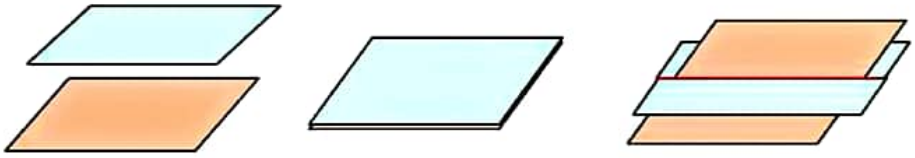
الحل :

أ. لدينا M نقطة من $[BC]$ و N نقطة من $[BF]$ إذن M و N نقطتان من (BCF) وبالتالي كل نقط المستقيم (MN) تنتمي إلى المستوي (BCF) أي المستوي (BCF) يشمل المستقيم (MN) .
ب. بما أن N نقطة من $[BF]$ فإنها تنتمي إلى المستوي $(ABFE)$ ، و M نقطة من $[BC]$ إذن M هي خارج المستوي $(ABFE)$ وبالتالي المستقيم (MN) يقطع المستوي $(ABFE)$ في نقطة وحيدة وهي N .
ج. المستويان $(ADHE)$ و (BCF) متوازيان تماما ، و المستوي (BCF) يشمل المستقيم (MN) إذن المستقيم (MN) والمستوي $(ADHE)$ متوازيان تماما .
د. المستقيمات (MN) و (CG) و (BF) من نفس المستوي (BCF) ولدينا المستقيمين (CG) و (BF) متوازيين ، بما أن (MN) يقطع (BF) فإن (MN) يقطع (CG) .
ه. المستويان $(ABFE)$ و $(DCGH)$ متوازيان تماما ويشملان المستقيمين (EB) و (HC) على الترتيب إذن المستقيمين (EB) و (HC) متوازيين تماما .
و. المستويان (NBM) و (BEH) متمايزان ولهما نقطة مشتركة إذن هما متقاطعان في مستقيم .
ز. المستويان (NBM) و (AEH) متوازيان تماما لأن (NBM) هو $(BCGF)$ و (AEH) هو $(ADHE)$ ومن تعريف متوازي المستطيلات لدينا $(BCGF)$ و $(ADHE)$ مستويين متوازيين .

Scanné avec CamScanner

❖ الوضع النسبي لمستويين:

P و P' مستويان: إما يكون P و P' متقاطعان وتقاطعهما مستقيم ؛ إما يكونا منطبقين تقاطعهما هو المستوي P ؛ وإما متوازيان تماما تقاطعهما خال.



يعرف المستقيم في الفضاء بجملة معالتين لمستويين متقاطعين.

❖ الوضع النسبي لثلاث مستويات:

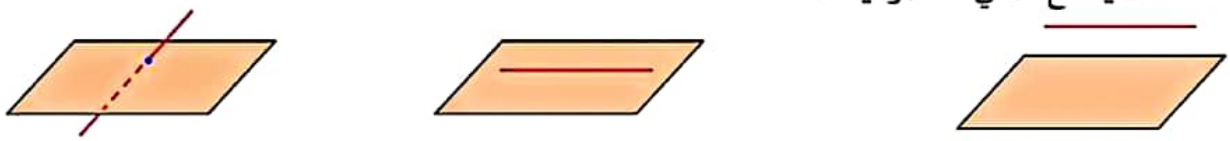
تقاطع ثلاث مستويات في الفضاء هو

- ✓ إما نقطة
- ✓ إما مستقيم
- ✓ إما خال

❖ الوضع النسبي لمستو ومستقيم:

P مستو و D مستقيم في الفضاء.

- ✓ يكون D موازيا تماما لـ P والتقاطع يكون خال.
- ✓ يكون D محتوفي P والتقاطع هو D .
- ✓ D يقطع P في نقطة وحيدة.



خاصية :

(P) مستو و (D) مستقيم من الفضاء .
من أجل كل نقطة A من الفضاء

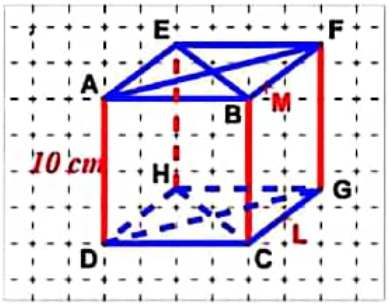
- ✓ يوجد مستقيم واحد يشمل A ويوازي (D) ؛
- ✓ ويوجد مستو واحد يشمل A ويوازي (P) .

خواص

- ✓ يكون مستقيم موازيا لمستو إذا وفقط كان موازيا لمستقيم من هذا المستوي .
- ✓ إذا قطع مستقيم أحد المستويين المتوازيين فإنه يقطع الثاني .
- ✓ إذا كان مستقيم يوازي أحد المستويين المتوازيين فإنه يكون موازيا للثاني .
- ✓ إذا قطع مستو أحد المستويين المتوازيين فإنه يقطع الثاني .
- ✓ المستويان الموازيان لثالث هما متوازيان .
- ✓ إذا كان مستقيم يوازي مستويين متمايزين ومتقاطعان فإنه يوازي مستقيم تقاطعهما .
- ✓ إذا كان مستويان متوازيان فإن كل مستو غير موازي لهما يقطعهما في مستقيمين متوازيين .

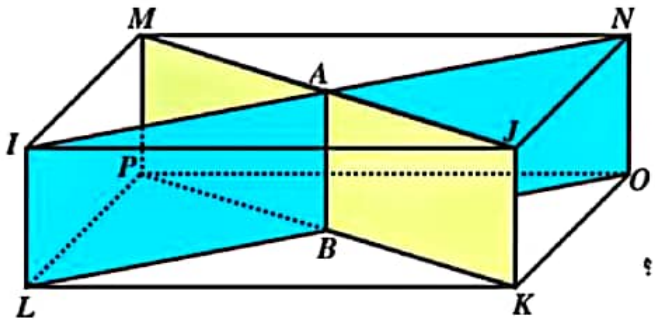
Scanné avec CamScanner

حل النشاط :



1. المستقيمات العمودية على (FG) هي : (AB) ، (AE) ، (FA) ، (FB) ، (FE) ، (EB) ، (GH) ، (GD) ، (GC) ، (HC) ، (DH) ، (DC) .
2. المستقيمات الموازية للمستقيم (FG) هي : (BC) ، (AD) ، (EH) .

نشاط :



الشكل $LKOPIJNM$ هو تمثيل لمتوازي مستطيلات بالمنظور متساوي القياس .
لاحظ وأجب عن الأسئلة الآتية :

1. أذكر مستويين متوازيين ؟
2. أذكر مستويين متعامدين ؟
3. ما هو الوضع النسبي للمستويين $(NOLI)$ و $(MJKP)$ ؟

الحل :

1. $(IMNJ)$ و $(LKOP)$ مستويان متوازيان . $(IJKL)$ و $(MNOP)$ مستويان متوازيان .
   $(JKON)$ و $(IMPL)$ مستويان متوازيان .
2. $(IMNJ)$ و $(JKON)$ مستويان متعامدان . $(IMNJ)$ و $(IMPL)$ مستويان متعامدان .
   $(IMNJ)$ و $(IJKL)$ مستويان متعامدان . $(IMNJ)$ و $(MNOP)$ مستويان متعامدان .
   $(IMNJ)$ و $(MJKP)$ مستويان متعامدان . $(IMNJ)$ و $(NOLI)$ مستويان متعامدان .
   $(LKOP)$ و $(JKON)$ مستويان متعامدان . $(LKOP)$ و $(IMPL)$ مستويان متعامدان .
   $(LKOP)$ و $(IJKL)$ مستويان متعامدان . $(LKOP)$ و $(MNOP)$ مستويان متعامدان .
   $(LKOP)$ و $(MJKP)$ مستويان متعامدان . $(LKOP)$ و $(NOLI)$ مستويان متعامدان .
3. المستويان $(NOLI)$ و $(MJKP)$ متقاطعان وتقاطعهما هو المستقيم (AB) .

الاوضاع النسبية

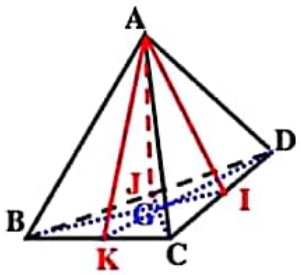
❖ الوضع النسبي لمستقيمين:

D و D' مستقيمان في الفضاء
يكون D و D' إما

- ✓ متقاطعان في نقطة واحدة
- ✓ متوازيان تماما وتقاطعهما خال
- ✓ منطبقين واما ليس من نفس المستوي وتقاطعهما خال.

Scanné avec CamScanner

الحل :



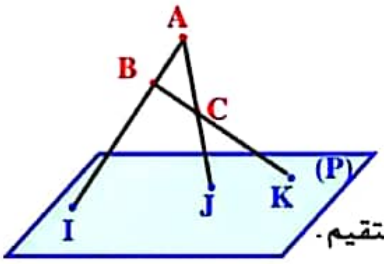
الطريقة :
يكفي إثبات أن نقطتين مختلفتين تنتميان إلى المستويات الثلاث .
النقطة A تنتمي إلى المستويات الثلاث (ABI) ، (ACJ) و (ADK) .
في المستوي (BCD) متوسطات المثلث BCD تتقاطع في نقطة وحيدة G (مركز ثقله)
وبالتالي النقطة G تنتمي إلى المستقيمات (BI) ، (CJ) ، (DK) ومنه النقطة
G تنتمي إلى المستويات (ABI) ، (ACJ) و (ADK) .
النقطة A هي خارج المستوي (BCD) وبالتالي : النقطتان A و G متمايزتان وتنتميان إلى المستويات الثلاث (ABI) ، (ACJ) و (ADK) . إذن تقاطع هذه المستويات هو المستقيم (AG) .

تمرين 3 :

(P) مستو ؛ A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية ولا تنتمي إلى المستوي (P) .
نفترض أن المستقيمات (AB) ، (AC) و (BC) تقطع المستوي (P) في النقط I ، J ، K على الترتيب .
بين أن النقط I ، J ، K في استقامية .

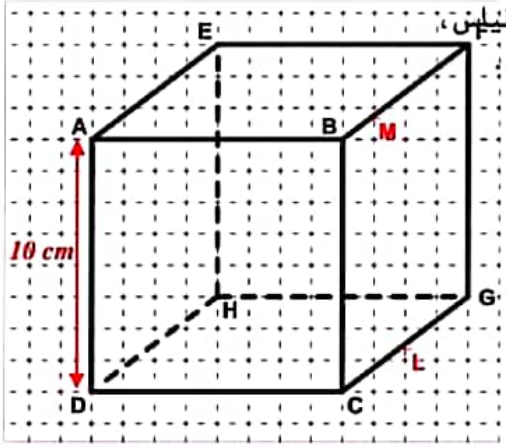
الحل :

الطريقة :
إذا كانت هذه النقط تنتمي إلى مستوين متمايزين فهي تنتمي إلى تقاطعهما الذي هو مستقيم وبالتالي يكفي تبيان أن النقط I ، J ، K تنتمي إلى مستوين متمايزين .



النقط A ، B ، C ليست في استقامية إذن تعين مستو نسميه (ABC) .
النقط I ، J ، K تنتمي إلى المستوي (P) . وكذلك هذه النقط
تنتمي إلى المستقيمات (AB) ، (AC) و (BC) التي هي في المستوي
(ABC) ومنه النقط I ، J ، K تنتمي إلى المستوي (ABC)
وبالتالي النقط I ، J ، K تنتمي إلى المستويين المتمايزين (P) و (ABC) .
إذن النقط I ، J ، K تنتمي إلى تقاطع المستويين (P) و (ABC) الذي هو مستقيم .
وبالتالي النقط I ، J ، K في استقامية .
الأوضاع النسبية للمستويات والمستقيمات في الفضاء :

نشاط:



الشكل المقابل هو لمكعب طول حرفه $10\,cm$ مرسوم بمنظور متساوي القياس ،
النقطتان M و L هما تقاطع $[BF]$ و $[CG]$ مع مستقيمات رصف الورقة
باستعمال بيانات الشكل أجب عن الأسئلة الآتية :

1. أذكر المستقيمات التي كل منها عمودي على (FG) .
2. أذكر المستقيمات التي كل منها يوازي (FG) .
3. أذكر مستقيمين غير متقاطعين وغير متوازيين .
4. هل المستقيمين (EB) و (HB) متعامدان ؟
5. ما نوع الرباعي $EBCH$ ؟
6. عين القيسين BM و CL وأحسب ML .

Scanné avec CamScanner

قواعد أساسية في الهندسة الفضائية :

- ✓ بديهية : إذا كانت A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية فإنه يوجد مستو واحد يشملها .
- ✓ بديهية : إذا كانت A و B نقطتين متمايزتين من مستو (P) فإن كل نقط المستقيم (AB) تنتمي إلى المستوي (P) .
- ✓ بديهية : إذا كان مستويان متمايزان ولهما نقطة مشتركة فإن تقاطعهما هو مستقيم .

نتائج :

يتعين المستوي بـ :

- ✓ ثلاث نقط ليست في استقامية ؛
- ✓ مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه ؛
- ✓ مستقيمين متوازيان تماما ؛
- ✓ مستقيمين متقاطعان في نقطة واحدة .

ملاحظة :

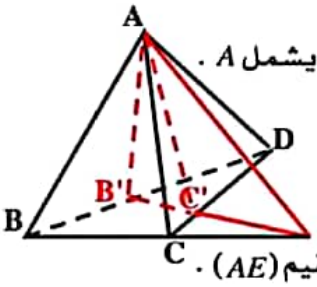
كل خواص ونتائج الهندسة المستوية تبقى صحيحة في أي مستو من الفضاء .

تمرين

$ABCD$ رباعي وجوه . B' و C' نقطتان من المستقيمين (DB) و (DC) على الترتيب .
نفترض أن المستقيمين (BC) و $(B'C')$ يتقاطعان في النقطة E .
برهن أن المستقيم (AE) هو تقاطع المستويين (ABC) و $(AB'C')$.

الحل :

الطريقة :



يكفي إثبات أن المستويين يشملان نقطتين متمايزتين .
المستويان (ABC) و $(AB'C')$ متمايزان ولهما نقطة مشتركة A ، إذن تقاطعهما هو مستقيم يشمل A .
E هي نقط من (BC) إذن هي نقطة من المستوي (ABC) ، وكذلك هي نقطة من $(B'C')$ إذن هي نقطة من المستوي $(AB'C')$ وبالتالي E هي نقطة مشتركة للمستويين (ABC) و $(AB'C')$.
E هي نقط من المستوي (BCD) ولكن A خارج هذا المستوي إذن A و E نقطتان متمايزتان
A و E نقطتان متمايزتان تنتميان إلى المستويين (ABC) و $(AB'C')$ إذن تقاطعهما هو المستقيم (AE) .

تمرين 2 :

$ABCD$ رباعي وجوه . النقط I ، J ، K منتصفات الأحرف $[CD]$ ، $[DB]$ و $[BC]$ على الترتيب .
برهن أن المستويات (ABI) ، (ACJ) و (ADK) لها مستقيم مشترك .

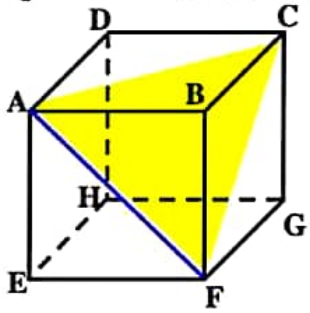
Scanné avec CamScanner

حل

1) أ) I هي نقطة من المستقيم (AB) إذن هي نقطة من كل مستو يشمل المستقيم (AB) وبالتالي I تنتمي إلى المستوي الذي يشمل النقط A ، B و E . النقطة H لا تنتمي إلى المستوي الواجهة (ABE) .

ب) المستوي (AGF) يشمل المستقيم (AF) و O نقطة من (AF) إذن O تنتمي إلى المستوي (AGF) .

لدينا المستقيمان (AD) و (FG) متوازيان تماما وبالتالي يوجد مستو واحد يشملهما وهو (AGF) إذن D تنتمي إليه

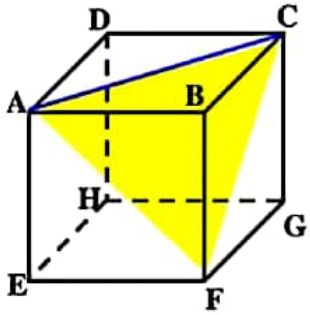


2) أ) المستويان (P) و (Π) يتقاطعان في المستقيم (AF) .

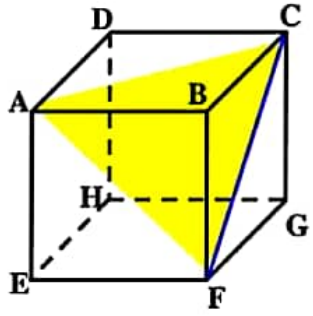
ب) المستوي (P) والمستوي الذي يشمل النقط C ، D ، G ، H منفصلان لا توجد أي نقطة مشتركة بينهما .

ج) رسم تقاطع المستوي (P') الذي يشمل النقط A ، C ، F مع المستوي (P) ، وهو المستقيم (AF) .

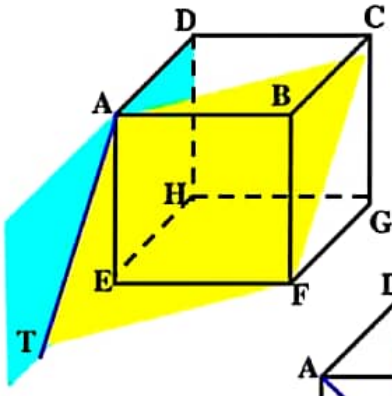
رسم تقاطع (P') مع المستوي الذي يشمل النقط A ، B ، C ، D وهو المستقيم (AC) .



رسم تقاطع (P') مع المستوي الذي يشمل النقط B ، F ، G ، C وهو المستقيم (CF)

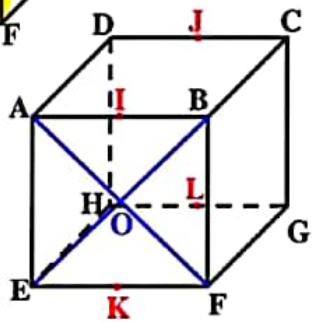


د) المستوي (P') يقطع المستوي الذي يشمل النقط A ، E ، H ، D لأنهما متمايزان ولهما نقطة مشتركة A إذن تقاطعهما يكون مستقيم يشمل A وهو المستقيم (AT)



3) أ) المستقيم (IJ) يقطع المستوي (P) في نقطة واحدة وهي I بينما (CG) لا يقطع المستوي (P) هما متوازيان

ب) (JO) لا يقطع المستوي الذي يشمل النقط E ، F ، G ، H بل هما متوازيان .



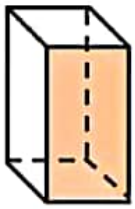
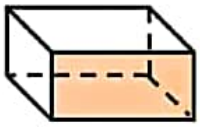
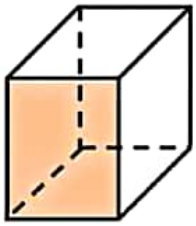
4) أ) المستقيمان (AF) و (JO) يتقاطعان في النقطة O .

ب) المستقيمان (KL) و (JO) متقاطعان في نقطة .

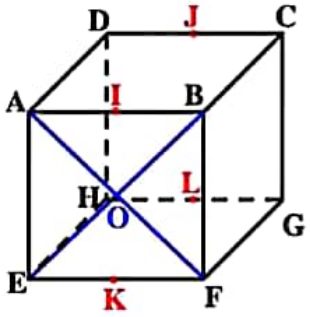
ج) المستقيمان (AF) و (BG) غير متقاطعين .

Scanné avec CamScanner

الحل :

أعمال موجهة



$ABCDEFGH$ مكعب، I منتصف الحرف $[AB]$ ، J منتصف الحرف $[DC]$ ،
K منتصف الحرف $[EF]$ ، L منتصف الحرف $[GH]$.
O نقطة تقاطع المستقيمين (AF) و (BE) .

1) النقط والمستويات :

أ. النقطتان I و H تنتميان إلى المستوي الذي يشمل النقط A ، B و E ؟

ب. النقطتان O و D تنتميان إلى المستوي الذي يشمل النقط F ، G و A ؟

2) تقاطع مستويين :

أ) (P) هو المستوي الذي يشمل النقط A ، B ، F ، E ؛ و(Π) المستوي الذي يشمل النقط F ، G و A .
هل المستويين (P) و(Π) يتقاطعان ؟

ب) هل المستوي (P) يقطع المستوي الذي يشمل النقط C ، D ، G ، H ؟

ج) أرسم على المكعب السابق تقاطع المستوي (P') الذي يشمل النقط A ، C ، F مع المستوي (P) ؛ ثم مع المستوي الذي يشمل النقط A ، B ، C ، D ؛ ثم مع المستوي الذي يشمل B ، F ، G ، C .

د) هل المستوي (P') يقطع المستوي الذي يشمل النقط A ، E ، H ، D ؟

3) تقاطع مستقيم ومستو

أ) هل المستقيمين (IJ) و (CG) يقطعان المستوي (P) ؟

ب) المستقيم (JO) يقطع المستوي الذي يشمل النقط E ، F ، G ، H ؟

4) تقاطع مستقيمين :

أ) هل المستقيمين (AF) و (JO) متقاطعان ؟

ب) هل المستقيمين (KL) و (JO) متقاطعان ؟

ج) هل المستقيمين (AF) و (BG) متقاطعان ؟

Scanné avec CamScanner

2) التمثيل بالمنظور متساوي القياس :

لتمثيل الأشكال في الفضاء يمكن استعمال عدة تقنيات من بينها التمثيل بالمنظور متساوي القياس والقواعد الخاص بهذه التقنية تتضمن ما يلي :

- المحافظة على توازي المستقيمات ، على استقامية النقط ، وعلى منتصفات القطع .
- تمثل الخطوط المرئية (التي نراها في الحقيقة) بخطوط مستمرة ؛ والخطوط المخفية (التي لا نراها عند تصور رؤية المجسم) بخطوط متقطعة .
- على مستوي الواجهة عناصر الرسم تمثل بمقادير حقيقية (مقادير الزوايا والمسافات) .

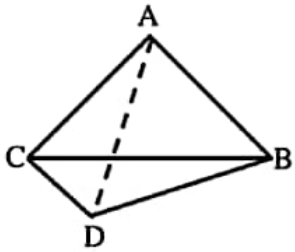
ملاحظات :

- المستوي يمثل بمتوازي أضلاع .
- نمثل مستقيمين متقاطعين كما هما وفي بعض الأحيان بمستقيمين متطابقين .
- نمثل النقط في استقامية كما هي وفي بعض الأحيان بنقطة واحة .

تمرين:

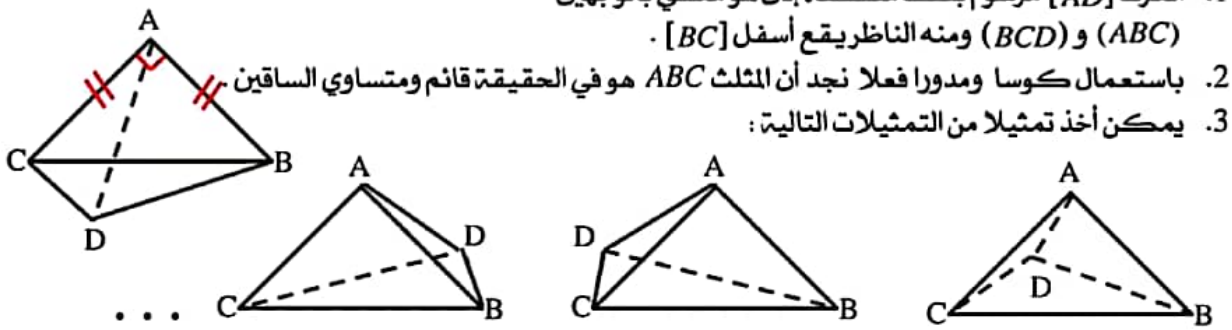
$ABCD$ رباعي وجوه حيث الوجه (ABC) يقع في مستوي الواجهة (أنظر الشكل)

1. بين أن الناظر يقع تحت $[BC]$ والنقطة A تقع فوق $[BC]$.
2. باستعمال أدوات هندسية تحقق في الشكل أن المثلث ABC هو في الحقيقة قائم ومتساوي الساقين .
3. أرسم تمثيلا لنفس المجسم باعتبار أن النقطة A والناظر يقعان فوق $[BC]$.



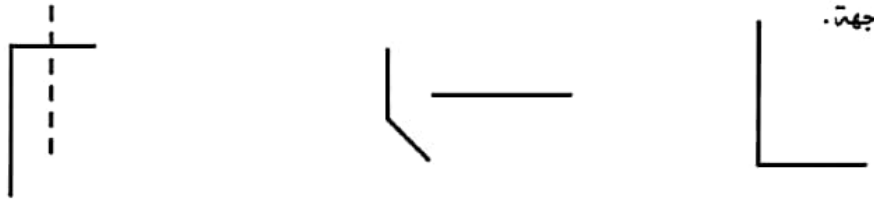
الحل :

1. الحرف $[AD]$ مرسوم بنقط متقطعة إذن هو مخفي بالوجهين (ABC) و (BCD) ومنه الناظر يقع أسفل $[BC]$.
2. باستعمال كوسا ومدورا فعلا نجد أن المثلث ABC هو في الحقيقة قائم ومتساوي الساقين .
3. يمكن أخذ تمثيلا من التمثيلات التالية :



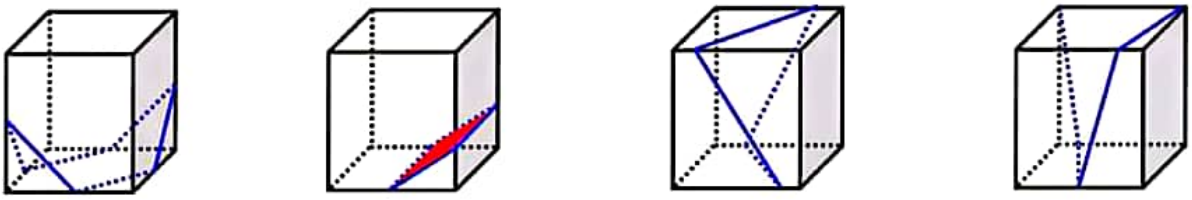
تمرين

الأشكال الثلاثة الآتية هي بداية لتمثيل بالمنظور متساوي القياس لمتوازي المستطيلات أكمل كل منها ولون الوجه الموجود في مستوي الواجهة .



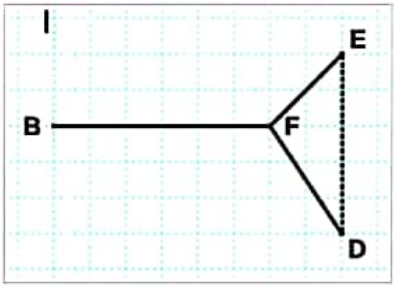
Scanné avec CamScanner

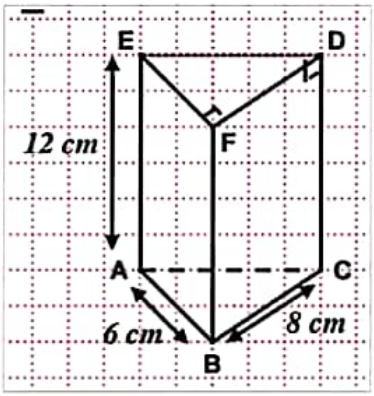
الحل :



الأثرات مرسومة باللون الأزرق والشكل الثالث هو الذي علية أثر تقاطع مستو.

نشاط :



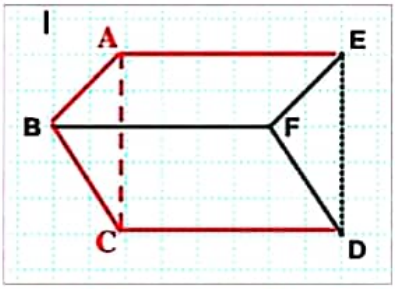


الشكل الثاني هو بداية لتمثيل بالمنظور متساوي القياس للموشور القائم الممثل بالشكل الأول.

أ) أكمل الشكل الثاني للحصول على تمثيل بالمنظور متساوي القياس لنفس الموشور.

ب) أحسب مساحته الكلية وحجمه.

الحل :



نسمي S_1 مساحة الوجه (ABC) لدينا : $S_1 = \frac{1}{2} AB \times AC$.

ومنه : $S_1 = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24\,cm^2$. مع الملاحظة أن الوجهين (ABC) و (DEF) لهما نفس المساحة.

نسمي S_2 ، S_3 و S_4 مساحات الأوجه $(ABFE)$ ، $(BCDF)$ و $(ACDE)$ على الترتيب مع الملاحظة أن الأوجه الثلاث هي على شكل مستطيلات .

$S_2 = 6 \times 12 = 72\,cm^2$ $\quad$ $S_3 = 8 \times 12 = 96\,cm^2$

لحساب S_4 نحسب أولا AC وهذا باستعمال مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم ABC ، $AC = \sqrt{36+64} = 10\,cm$.

إذن : $S_4 = 10 \times 12 = 120\,cm^2$.

وبالتالي : المساحة الكلية للمجسم هي S حيث : $S = 2S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ أي : $S = 336\,cm^2$

حجم المجسم هو V حيث $V = AE \times S_1$ أي : $V = 12 \times 24 = 288\,cm^3$

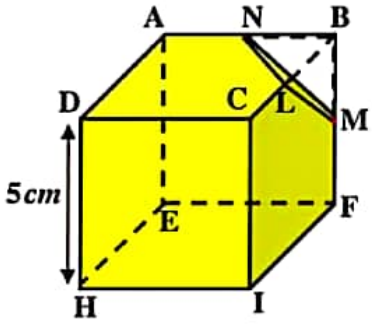
Scanné avec CamScanner

وبتطبيق مبرهنة فيثاغورس في كل من المثلثين القائمين AOB و AOG نجد : $AB = \sqrt{AO^2 + OB^2}$ و $AG = \sqrt{AO^2 + OG^2}$ لدينا $BGFH$ مستطيل وبالتالي قطريه متقايسين ومتناصفين إذن $OB = OG$ ، وبالتالي :
$AG = AB = \sqrt{AO^2 + OB^2}$.
خلاصة : $AG = AH = AB = AF$.

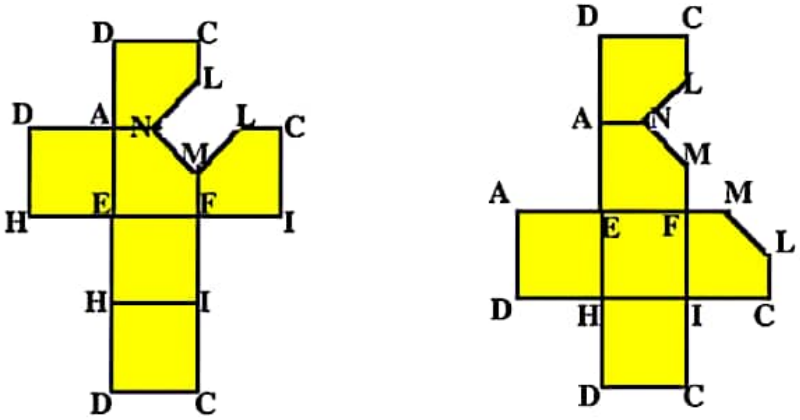
وبتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم FBG نجد $FB = \sqrt{FG^2 + GB^2}$ أي : $2 \times OB = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$
وبالتالي : $OB = 6,5cm$ ، ومنه : $AB = \sqrt{36 + 42.25} = \sqrt{78.25}$ إذن $AB = 8,8cm$.

نشاط :

مجسم على شكل مكعب طول حرفه $5cm$ ينقصه هرم $BMLN$ حيث L ، M و N منتصفات $[BC]$ ، $[BF]$ و $[AB]$ على الترتيب كما هو في الشكل .
أنجز تصميما لهذا المجسم .

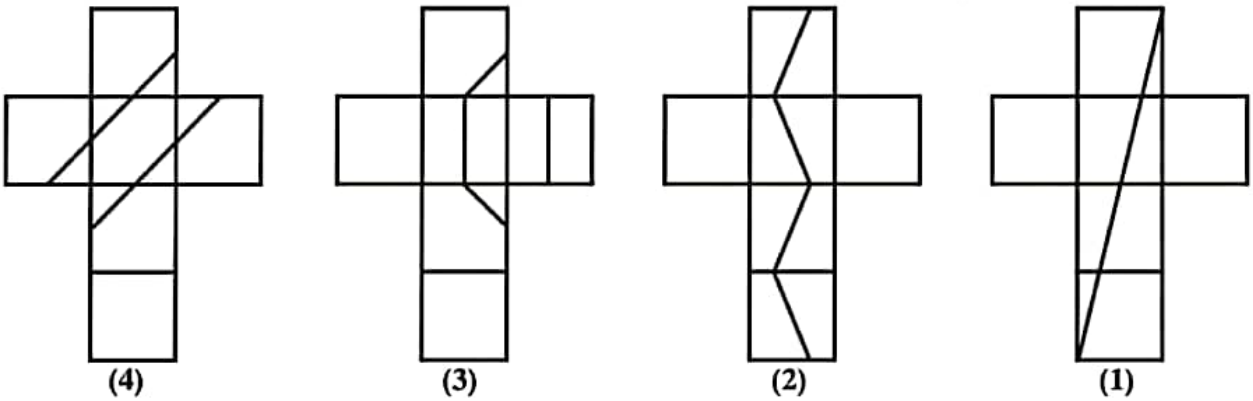


حل النشاط :



نشاط :

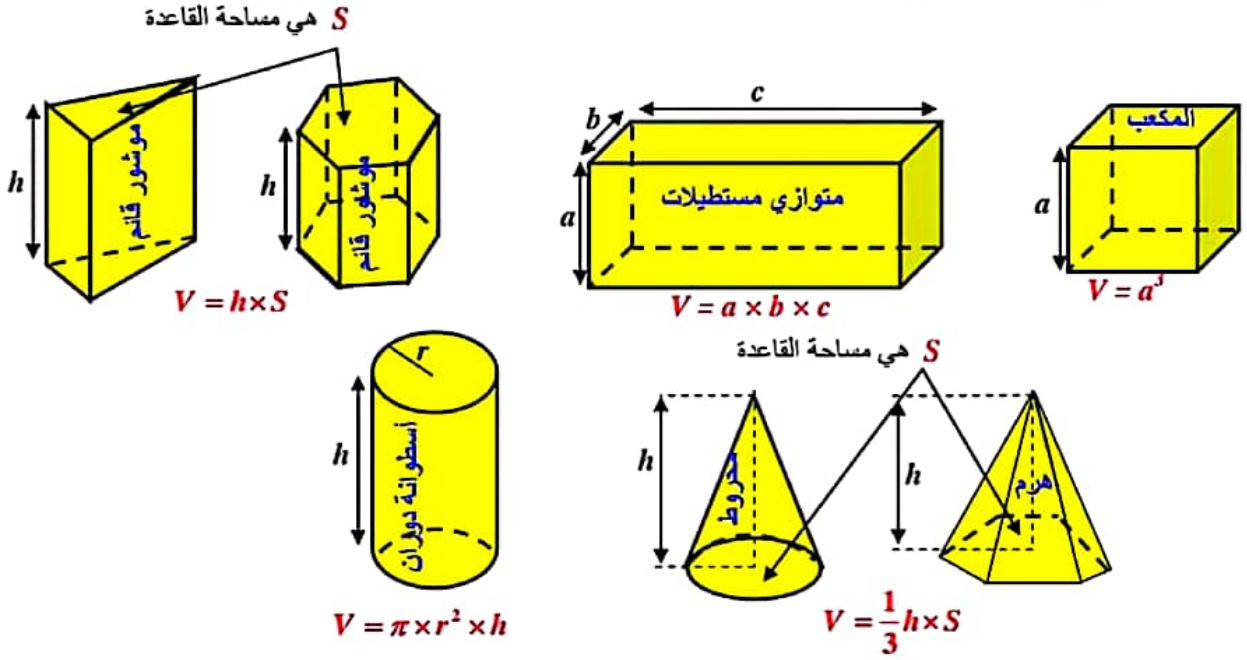
أي التصاميم الآتية هو تصميم لمكعب مرسوم عليه أثر تقاطع مستو مع هذا المكعب .



Scanné avec CamScanner

الهندسة في الفضاء

1) الحجوم لمجسمات مألوفة :

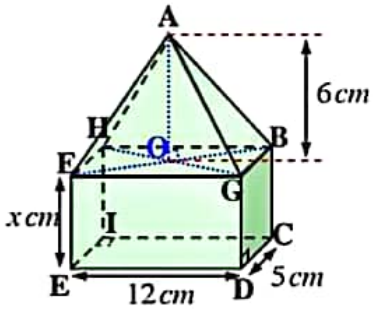


نشاط :

الشكل المقابل يمثل مخططا مكون من متوازي مستطيلات أبعاده $5cm$ ، $12cm$ و $x\,cm$ ؛ وهرم ارتفاعه $AO = 6cm$ حيث O تقاطع $[FB]$ و $[HG]$.

من أجل أي قيمة للمجهول x يكون حجم هذا المجسم يساوي $660cm^3$ ؟

بين أن أحرف الهرم AF ، AG ، AB ، AH متساوية واحسب قياسها بتقريب 0,1 .



حل النشاط :

نضع v_1 حجم متوازي المستطيلات $BHFGCIED$ و v_2 حجم الهرم $ABGFH$.

$v_1 = 12 \times 5 \times x\,cm^3$ أي : $v_1 = 60x\,cm^3$ و $v_2 = \frac{1}{3} 12 \times 5 \times 6\,cm^3$ أي : $v_2 = 120cm^3$

حجم المجسم هو $v = v_1 + v_2$ أي : $v = (60x + 120)\,cm^3$ هذا من جهة.

ومن جهة أخرى لدينا : $v = 660cm^3$ إذن : $60x + 120 = 660$ معناه : $60x = 540$ ومعناه أن $x = 9$.

لدينا O منتصف $[HG]$ و $(AO) \perp (HG)$ إذن (AO) هو محور القطعة $[HG]$ وبالتالي : $AG = AH$

بنفس الطريقة لدينا O منتصف $[FB]$ و $(AO) \perp (FB)$ إذن (AO) هو محور القطعة $[FB]$ وبالتالي : $AB = AF$

Scanné avec CamScanner

الهندسة في الفضاء

Scanné avec CamScanner