تمارين القسمة في الباك الجزائري :

الأستاذ: قليل مصطفى

التمرين(1) باك الجزائر 1991

(1) (أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $18x+4y=84$.

(ب) عين الحلول (x,y) لهذه المعادلة التي تحقق: $xy \succ 0$.

(2) n عدد طبيعي يكتب : $\overline{30\alpha\beta\gamma}$ في النظام ذي الاساس خمسة ويكتب: $\overline{55\alpha\beta}$ في النظام السباعي

عين الأعداد الطبيعية α ، β ، γ ثم أكتب n في النظام العشري .

حل التمرين(1) باك الجزائر 1991

(1) (أ)حل في Z^2 المعادلة : $18x+4y=84$

.بقسمة الاطراف على 2 نجد : $9x+2y=42$ ومنه نجد : $2y=42-9x$ أي $2y=3(14-3x)$

هذه المعادلة تعني ان العدد 3 يقسم $2y$ وبما ان 3 لا يقسم 2 فانه حسب غوص 3 يقسم y

أي ان y مضاعف 3 أي $y=3m$ ومن اجل $m=0$ نجد الحل الخاص هو $(4;3)$

لدينا $\begin{cases} 9x+2y=42............(1) \\ 9(4)+2(3)=42.......(2) \end{cases}$ بطرح (2) من (1) نجد : $9(x-4)+2(y-3)=0$

ومنه $9(x-4)=2(3-y)$

بما أن $9/2(3-y)$ و 9 و 2 أوليان فيما بينهما فحسب مبرهنة غوص $9/(3-y)$ ومنه يوجد $k\in Z$

بحيث $3-y=9k$ أي $y=-9k+3$

وبنفس الطريقة نجد : $x=2k+4$

ومنه مجموعة الحلول $S=\{(x,y);x=2k+4\ \ ,y=-9k+3\ \ ;k\in\mathbb{Z}\}$

(ب) تعيين الحلول (x,y) لهذه المعادلة التي تحقق: $xy \succ 0$

$xy\succ 0$ معناه $(2k+4)(-9k+3)\succ 0$ معناه $-2\prec k\prec \frac{1}{3}$ أي :

$k\in\{-1\ ,\ 0\}$ ومنه الحلول هي : $S=\{(2,12);(4,3)\}$

(2) تعيين الأعداد الطبيعية α ، β ، γ

$n=\overline{30\alpha\beta\gamma}$ و $n=\overline{55\alpha\beta}$ ومنه $3\times 5^4+\alpha\times 5^2+\beta\times 5+\gamma=5\times 7^3+5\times 7^2+7\alpha+\beta$ ومنه نجد

$18\alpha+4\beta=85-\gamma$

اذن $2(9\alpha+2\beta)=85-\gamma$ وهذا يعني $85-\gamma$ عدد زوجي وبما العدد 85 فردي فان γ فردي

و نعلم ان $\gamma\prec 5$ ومنه قيم γ هي 1 او 3

لما $\gamma = 1$ فان $2(9\alpha + 2\beta) = 84$ أي $9\alpha + 2\beta = 42$ وبالتالي $\alpha = 4$ و $\beta = 3$

و لما $\gamma = 3$ فان $18\alpha + 4\beta = 82$ أي $9\alpha + 2\beta = 41$

$9\alpha + 2\beta = 41$ هذه العلاقة محققة من اجل $\alpha = 1$ و $\beta = 16$ وهي مستحيلة

ومحققة من اجل : $\alpha = 3$ و $\beta = 7$ وهي مستحيلة

وبالتالي القيمة الممكنة لـ γ هي 1 وبالتالي : $\alpha = 4$ و $\beta = 3$ و $\gamma = 1$

– كتابة n في النظام العشري : $n = 5\times 7^3 + 5\times 7^2 + 7(4) + 3 = 1991$

التمرين(2) باك 1994

(1) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 10

(ب) استنتج رقم احاد العدد : 1994^{1414}

(2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ : $u_n = 2^n$

(أ) تحقق ان (u_n) متتالية هندسية

(ب) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = (5+2^1) + (5+2^2) + (5+2^3) + ... + (5+2^n)$

(ج) عين قيم العدد الطبيعي nبحيث يكون العدد S_n مضاعفا للعدد 10

حل التمرين(2) باك 1994

(1) (أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 10 :

$2^0 \equiv 1[10]$, $2^1 \equiv 2[10]$, $2^2 \equiv 4[10]$, $2^3 \equiv 8[10]$, $2^4 \equiv 6[10]$, $2^5 \equiv 2[10]$ الدور هو 4

اذن من اجل كل k طبيعي فان : $2^{4k} \equiv 6[10]$ و $2^{4k+1} \equiv 2[10]$ و $2^{4k+2} \equiv 4[10]$ و $2^{4k+3} \equiv 8[10]$

(ب) استنتاج رقم احاد العدد : 1994^{1414}

لدينا $1994 \equiv 4[10]$ ومنه $1994^{1414} \equiv 4^{1414}[10]$ أي $1994^{1414} \equiv (2^2)^{1414}[10]$ ومنه

$1994^{1414} \equiv 2^{2828}[10]$ ونعلم ان $2828 = 4(707) = 4k$ ومنه $1994^{1414} \equiv 2^{4k}[10] \equiv 6[10]$

أي $1994^{1414} \equiv 6[10]$ اذن رقم احاد العدد 1994^{1414} هو 6

(2) المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_n = 2^n$

(أ) التحقق ان (u_n) متتالية هندسية : $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2^n \times 2 = 2u_n$ ومنه (u_n) هندسية اساسها 2

(ب) حساب : $S_n = (5+2^1) + (5+2^2) + (5+2^3) + ... + (5+2^n)$

$S_n = \underbrace{(5+5+.....+5)}_{n \text{ مـــرة}} + (2^1 + 2^2 + ... + 2^n)$ و $2^1 + 2^2 + ... + 2^n$ مجموع n حد للمتتالية الهندسية (u_n)

اذن $S_n = 5n + 2\times\dfrac{1-2^n}{1-2} = 5n + 2^{n+1} - 2$

(ج) تعيين nبحيث يكون S_n مضاعفا للعدد 10 : هذا يعني $S_n \equiv 0[10]$

أي $5n + 2^{n+1} - 2 \equiv 0[10]$ومنه $5n + 2\times 2^n \equiv 2[10]$

نعلم ان كل عدد طبيعي n يكتب على الشكل : $4k$ او $4k+1$ او $4k+2$ او $4k+3$ ومنه

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$5n\equiv\ldots$	0	5	0	5	$[10]$
$2^n\equiv\ldots$	6	2	4	8	$[10]$
$2\times 2^n\equiv\ldots$	2	4	8	6	$[10]$
$5n+2\times 2^n\equiv\ldots$	2	9	8	1	$[10]$

ومنه

$5n+2\times 2^n\equiv 2[10]$ من اجل $n=4k$ وهي القيم التي من اجلها $S_n\equiv 0[10]$

التمرين(3) باك 1996

(1) حلل الى جداء عوامل اولية العددين 105 و 1995

(2) α و β عددان طبيعيان حيث $\alpha\prec\beta$. حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة : $\alpha.\beta=105$

(3) a و b عددان طبيعيان غير معدومين وغير اوليين فيما بينهما حيث $a\prec b$

عين a و b بحيث يكون : $\begin{cases}95d+19m=1995\\ d\prec 7\end{cases}$ حيث $d=PGCD(a;b)$ و $m=PPCM(a;b)$

حل التمرين(3) باك 1996

(1) تحليل العددين 105 و 1995 :

$105=3\times5\times7$ و $1995=3\times5\times7\times19$

(2) حل المعادلة : $\alpha.\beta=105$ في $\mathbb{N}^2$:

نعلم ان : $105=1\times105$او $105=3\times35$ او $105=5\times21$ او $105=7\times15$ حيث $\alpha\prec\beta$

وبالتالي : $\alpha.\beta=105$ تعني : $(\alpha;\beta)=\{(1,105);(3,35);(5,21);(7,15)\}$

(3) تعيين a و b بحيث : $\begin{cases}95d+19m=1995\\ d\prec 7\end{cases}$ وحيث $a\prec b$

بما ان $d=PGCD(a;b)$ فانه يوجد عددان طبيعيان a' و b' اوليان فيما بينهما بحيث : $a=d.a'$ و $b=d.b'$

ولدينا ايضا : $m=\dfrac{a.b}{d}=\dfrac{d.a'\times d.b'}{d}=d\times a'.b'$

ومنه العلاقة $95d+19m=1995$ تكتب $95d+19\times d\times a'.b'=1995$ ومنه $d(95+19a'.b')=1995$

وبالتالي العدد d يقسم العدد 1995 وبما ان $d\prec 7$ فان قيم d هي : $\{3;5\}$

– اذا كان $d=3$ فان العلاقة $d(95+19a'.b')=1995$ تصبح $19a'.b'=570$ أي $a'.b'=30$ وبما ان $a\prec b$ فان $a'\prec b'$ وبالتالي :

$(a',b')\in\{(1,30);(5,6);(2,15);(3,10)\}$ ومنه الثنائيات (a,b) هي :

$(a,b)\in\{(3,90);(15,18);(6,45);(9,30)\}$

– اذا كان $d=5$ فان العلاقة $d(95+19a'.b')=1995$ تصبح $a'.b'=16$ مع $a'\prec b'$ واوليين فيما بينهما

ومنه الثنائية الوحيدة هي : $(a',b')=(1;16)$ ومنه $(a,b)=(5;80)$

التمرين(4) باك 1997 علوم دقيقة

(1) عيّن القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996 ، 1497 و 2994 .

(2) x و y عددان صحيحان ولتكن المعادلة $1996x-1497y=2994$ . . . (1)

(أ) أثبت أن x مضاعف للعدد 3 و y مضاعف للعدد 2 ثم عين حلول المعادلة (1) .

(ب) عين الحلول (x,y) بحيث يكون : $xy=1950$

حل التمرين(4) باك 1997 علوم دقيقة

(1) تعيلن القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996 ، 1497 و 2994 :

بتحليل الاعداد نجد: $1996=2^2\times 499$ و $1497=3\times 499$ و $2994=2\times 3\times 499$

اذن $PGCD(1996,1497,2994)=499$

(2) x و y صحيحان و $1996x-1497y=2994$ . . . (1)

(أ) اثبات أن x مضاعف للعدد 3 و y مضاعف للعدد 2 .

بما ان $PGCD(1996,1497,2994)=499$ فان المعادلة (1) تكافئ بالقسمة على 499 : $4x-3y=6$

ومنه $4x=3y+6$ أي $4x=3(y+2)$ وهذه الاخيرة تعني ان : 3 يقسم $4.x$ وبما ان 3 و 4 اوليان فيما بينهما فانه حسب مبرهنة غوص 3 يقسم x أي ان x مضاعف للعدد 3

– والمعادلة $4x-3y=6$ تكافئ $4x-6=3y$ أي ان $3y=2(x-3)$ وتعني ايضا ان 2 يقسم $3.y$

وبما ان 2 اولي مع 3 فان 2 يقسم y أي ان y مضاعف للعدد 2

–تعيين حلول المعادلة (1) :

بما ان x مضاعف للعدد 3 فانه يوجد عدد صحيح α بحيث : $x=3\alpha$ ويوجد عدد صحيح β حيث $y=2\beta$

وبالتعويض في المعادلة $4x-3y=6$ نجد : $4(3\alpha)-3(2\beta)=6$ ومنه $\beta=2\alpha-1$ ومنه $x=3\alpha$ و $y=2(2\alpha-1)$

وبالتالي حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x;y)=(3\alpha;4\alpha-2)$ حيث α عدد صحيح

(ب) تعيين الحلول بحيث : $xy=1950$:

$xy=1950$ معناه $(3\alpha)(4\alpha-2)=1950$ ومنه $12\alpha^2-6\alpha-1950=0$

بحل المعادلة نجد : $\alpha=13$ او $\alpha=-\dfrac{25}{2}$ مرفوضة لان α عدد صحيح

اذن قيمة α هي $\alpha=13$ وبالتعويض في الحلول $(x;y)=(3\alpha;4\alpha-2)$ نجد $(x;y)=(39;50)$

التمرين(5) باك 1998 شعبة العلوم الطبيعية

(1) عين مجموعة الأعداد الصحيحة x التي تحقق : $3x-5\equiv 0[11]$

(2) نعتبر في Z^2 المعادلة : $3x-11y=5$ ...(1) حل هذه المعادلة (يمكن استعمال السؤال السابق)

(3) ليكن $d=PGCD(x\,,y)$

(أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d علما ان $(x\,,y)$ هي حلول للمعادلة (1)

(ب) عين الثنائيات $(x\,,y)$ حلول المعادلة بحيث : $d=5$

حل التمرين(5) باك 1998 شعبة العلوم الطبيعية

(1) تعيين الأعداد الصحيحة x التي تحقق : $3x-5\equiv 0[11]$:

$3x-5\equiv 0[11]$ تعني $3x\equiv 5[11]$ أي ان $4\times 3x\equiv 4\times 5[11]$ ومنه $12x\equiv 20[11]$ و تعني

$11x+x\equiv 20[11]$ وبما ان $11x\equiv 0[11]$ و $20\equiv 9[11]$ فان $x\equiv 9[11]$

أي ان $x=9+11k$ حيث k عدد صحيح

(2) حل المعادلة : $3x-11y=5$ ...(1)

من السؤال السابق نجد : $3x-11y=5$ معناه $3x=11y+5$ وهذه تعني $3x\equiv 5[11]$ ومنه

حلولها هي : $x=9+11k$ حيث k عدد صحيح

وبالتعويض في المعادلة $3x-11y=5$ نجد : $3(9+11k)-11y=5$ ومنه $y=2+3k$

اذن الحلول هي : $(x\,,y)=(9+11k;2+3k)$

(3) (أ) القيم الممكنة للعدد $d=PGCD(x\,,y)$

اذا كان $d=PGCD(x\,,y)$ فهذا يعني d يقسم x ويقسم y

ومنه d يقسم $3x$ و d يقسم $11y$ وبالتالي يقسم $3x-11y$ اذن d يقسم 5

وبالتالي القيم الممكنة لـ d هي 1 او 5

(ب) تعيين $(x\,,y)$ حلول المعادلة بحيث : $d=5$: هذا يعني $x\equiv 0[5]$

أي ان $9+11k\equiv 0[5]$ ومنه $5+4+10k+k\equiv 0[5]$ وبالتالي $k\equiv -4[5]$ أي $k\equiv 1[5]$

ومنه $k=5\alpha+1$ وبالتالي قيم x و y هي : $x=9+11(5\alpha+1)$ أي $x=55\alpha+20$

و $y=2+3(5\alpha+1)$ أي $y=15\alpha+5$ حيث α عدد طبيعي

التمرين(6) بكالوريا 2000 شعبة رياضيات

(1) حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x',y'): $9x'-14y'=13$ علماً أنّ $(3,1)$ حلا لها .

2) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y) : $45x-28y=130$.

بيّن أنه إذا كان (x,y) حلا لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5 ؛ ثم حل هذه المعادلة .

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\alpha\alpha 3}$ في نظام تعداد أساسه 9 و $\overline{5\beta\beta 6}$ في نظام تعداد أساسه 7 .

عين α و β ثم أكتب N في النظام العشري .

حل التمرين(6) بكالوريا 2000 شعبة رياضيات

(1)حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $9x'-14y'=13$ علماً أنّ $(3,1)$ حلا لها .

لدينا : $\begin{cases}9x'-14y'=13..........(1)\\9\times3-14\times1=13........(2)\end{cases}$ بطرح (2) من (1) نجد :

$9(x'-3)-14(y'-1)=0$ أي $9(x'-3)=14(y'-1)$

لدينا : $9/14(y'-1)$ و 9 و 14 أوليان فيما بينهما ومنه حسب مبرهنة غوص $9/(y'-1)$

أي $y'-1=9k$ ومنه $y'=9k+1\ /\ k\in\mathbb{Z}$

وبنفس الطريقة نجد $x'=14k+3\ /\ k\in\mathbb{Z}$

ومنه مجموعة الحلول هي : $(x',y')=\{(14k+3;9k+1)\ \ ;k\in\mathbb{Z}\}$

2) المعادلة ذات المجهول (x,y) : $45x-28y=130$.

تبيان أنه إذا كان (x,y) حلا لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5 ؛

(x,y) حلا لهذه المعادلة فإن $45x-28y=130$ ومنه $45x=28y+130=2(14y+65)$

لدينا : $2/2(14y+65)$ و $2(14y+65)=45x$ ومنه $2/45x$

وبما أن 2 و 45 أوليان فيما بينهما فحسب مبرهنة غوص $2/x$ أي x مضاعف للعدد 2 .

(x,y) حلا لهذه المعادلة فإن $45x-28y=130$ ومنه $28y=130-45x=5(16-9x)$

لدينا : $5/5(16-9x)$ و $5(16-9x)=28y$ ومنه $5/28y$

وبما أن 5 و 28 أوليان فيما بينهما فحسب مبرهنة غوص $5/y$ أي y مضاعف للعدد 5 .

حل المعادلة : $45x-28y=130$

الحل الخاص للمعادلة $45x-28y=1$ هو $(5,8)$ أي $45(5)-28(8)=1$ ومنه

$45(5\times130)-28(8\times130)=130$ ومنه الحل الخاص للمعادلة : $45x-28y=130$ هو $(650,1040)$

لدينا : $\begin{cases}45x-28y=130.....................(1)\\45(650)-28(1040)=130.....(2)\end{cases}$ بطرح (2) من (1) نجد

$45(x-650)=28(y-1040)$ وهذه تعني 45 يقسم $28(y-1040)$ و 45 و 28 اوليان فيما بينهما

ومنه 45 يقسم $y-1040$ وبالتالي $y=45k+1040$ ومنه $x-650=28k$ أي $x=28k+650$ مع $k\in\mathbb{Z}$

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\alpha\alpha3}$ في نظام تعداد أساسه 9 و $\overline{5\beta\beta6}$ في نظام تعداد أساسه 7 .

عين α و β ثم أكتب N في النظام العشري

$N=\overline{2\alpha\alpha3}=2\times9^3+\alpha\times9^2+\alpha\times9+3=90\alpha+1461$ مع 9 $0\le\alpha\prec9$

$N=\overline{5\beta\beta6}=5\times7^3+\beta\times7^2+\beta\times7+6=56\beta+1721$ مع 7 $0\le\beta\prec7$

$90\alpha+1461=56\beta+1721$ أي $90\alpha-56\beta=260$ و بالقسمة على 2 نجد : $45\alpha-28\beta=130$

وحسب (2) نجد $\alpha=28k+650$ و $\beta=45k+1040$ مع $k\in\mathbb{Z}$

: $0\le28k+650\prec9$ أي $-650\le28k\prec-641$ أي $-23.21\le k\prec-22.89$ أي $k=-23$ ومنه

$\alpha=28(-23)+650=6$ و $\beta=45(-23)+1040=5$

$N=90(6)+1461=2001$ أو $N=56(5)+1721=2001$

التمرين(7) باك علوم طبيعية جوان 2001

1) اثبت أن العددين 993 و 170 أوليان فيما بينهما .

2) لتكن المعادلة : $993x-170y=143$ . . . (1) حيث x و y عددان صحيحان .

أ- عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) بحيث : $x_0+y_0=6$.

ب- عين كل الحلول $(x;y)$ للمعادلة (1) .

3) جد أصغر عدد طبيعي a بحيث يكون باقي قسمة العدد $a-1$ على كل من العددين 1986 و 340 هو 14 و 300 على الترتيب .

حل التمرين(7) علوم طبيعية جوان 2001

(1) إثبات أن 993 و 170 أوليان فيما بينهما : $993=5\times170+143$ و $170=1\times143+27$

و $143=27\times5+8$ و $27=8\times3+3$ و $8=3\times2+2$ و $3=2\times1+1$ و $2=2\times1+0$

ومنه : $PGCD(993;170)=1$

2) أ) تعيين الحل الخاص :

لدينا : $\begin{cases}x_0+y_0=6\\993x_0-170y_0=143\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}y_0=6-x_0\\993x_0-170(6-x_0)=143\end{cases}$ وعليه : $\begin{cases}y_0=6-x_0\\1163x_0=1163\end{cases}$

أي : $\begin{cases}x_0=1\\y_0=5\end{cases}$ إذن $(1;5)$ حل خاص .

ب) حل المعادلة :

لدينا : $993x-170y=993\times1-170\times5$ ومنه : $993(x-1)=170(y-5)$

لدينا 993 يقسم $170(y-5)$ و 993 أولي مع 170 وعليه 993 يقسم $y-5$ وعليه $y-5=993k$

أي أن $y=993k+5$ ونعوض فنجد : $993(x-1)=170\times993k$ ومنه : $x-1=170k$

إذن : $x=170k+1$ وبالتالي الحلول هي : $(170k+1;993k+5)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

3) تعيين a :

لدينا : $\begin{cases}a-1\equiv 14[1986]\\ a-1\equiv 300[340]\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}a\equiv 15[1986]\\ a\equiv 301[340]\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}a-15=1986\alpha\\ a-301=340\beta\end{cases}$

وعليه : $\begin{cases}a=15+1986\alpha\\ a=301+340\beta\end{cases}$ إذن : $15+1986\alpha=301+340\beta$ إذن : $1986\alpha-340\beta=286$

بالقسمة على 2 نجد : $993\alpha-170\beta=143$ ومنه حسب (2) : $\alpha=170k+1$ و $\beta=993k+5$

ومنه : $a=15+1986(170k+1)$ أي : $a=337620k+2001$

ومنه أصغر قيمة للعدد a هي 2001 من أجل $k=0$ إذن $a=2001$.

التمرين(8) باك 2001

1) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180.

2) حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $225x-180y=90$ ... (1)

3) عين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق : $2>|x-y+1|$.

4) a و b عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{52}$ ، $\overline{252}$ في النظام ذي الأساس α ، و يكتبان $\overline{44}$ ، $\overline{206}$ في النظام ذي الأساس β . عين α و β ثم a و b .

حل التمرين(8) باك 2001

1) تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180: بالقسمة الاقليدية نجد

$225=1\times180+45$ و $180=45\times4$ ومنه $PGCD(225;180)=45$

2) حل المعادلة : $225x-180y=90$: بالقسمة على 45 نجد انها تكافئ : $5x-4y=2$ (1)

نلاحظ ان الثنائية $(2;2)$ حل خاص لها وبالتالي نجد : $5(2)-4(2)=2$ (2)

وبطرح (2) من (1) نجد $5(x-2)=4(y-2)$ ..(*)

4 يقسم $5(x-2)$ وبما ان 4 اولي مع 5 فان 4 يقسم $(x-2)$ أي ان $x-2=4k$ وبالتالي $x=2+4k$

نعوض في (*) نجد $y=2+5k$ ومنه مجموعة الحلول هي : $(x;y)=(2+4k;2+5k)$ حيث k عدد صحيح

3) تعيين حلول (1) التي تحقق : $2>|x-y+1|$: الحلول هي $(x;y)=(2+4k;2+5k)$

ومنه $2>|x-y+1|$ تعني $2\succ|2+4k-2-5k+1|$ أي ان $2\succ|-k+1|$ ومنه $-2\prec -k+1\prec 2$

اذن $-1\prec k\prec 3$ وبالتالي قيم k هي :0 و 1 و 2

ومن اجل هذه القيم نجد : $(x;y)\in\{(2,2);(6,7);(10,12)\}$

4)لدينا $a=\overline{52}^{\alpha}$ ، $b=\overline{252}^{\alpha}$ ، و يكتبان $a=\overline{44}^{\beta}$ ، $b=\overline{206}^{\beta}$

تعيين α و β ثم a و b :

لدينا $a=\overline{52}^{\alpha}=\overline{44}^{\beta}$ و $b=\overline{252}^{\alpha}=\overline{206}^{\beta}$ ومنه نجد $2+5\alpha+2\alpha^2=6+2\beta^2$

من $2+5\alpha=4+4\beta$ نجد $5\alpha-4\beta=2$ وهي نفسها المعادلة (1) فحلولها هي اذن $(\alpha;\beta)=(2+4k;2+5k)$

ونعوض هذه الحلول في العلاقة الثانية نجد :

$5\alpha+2\alpha^2-2\beta^2=4$ أي $5(2+4k)+2(2+4k)^2-2(2+5k)^2=4$ ومنه $3k^2-2k-1=0$

أي $k=1$ او (مرفوضة) $k=-\frac{1}{3}$

ومنه من اجل $k=1$ نجد $\beta=7$ و $\alpha=6$ ومنه $a=2+5\alpha=32$ و $b=6+2\beta^2=104$

التمرين(9) باك 2001 رياضي

1) α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما ، عين العددين α و β حيث : $\beta(\beta^3-1)=28\alpha^2$.

2) a ، b ، c ، d و e أعداد طبيعية غير معدومة تشكل بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية أساسها r ،

حيث a و r أوليان فيما بينهما ، و $28a^3=e-b$.

أحسب الأساس r ثم الأعداد a ، b ، c ، d و e

حل التمرين(9) باك 2001 رياضي:

(1) لدينا $\beta(\beta^3-1)=28\alpha^2$ أي $\beta/28\alpha^2$ و بما أن α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما فإن $\beta/28$

لدينا : $D_{28}=\{1,2,4,7,14,28\}$ ومنه لما :

$\beta=1$ نجد $\alpha=1$ مرفوض

$\beta=2$ نجد $2\alpha^2=1$ مرفوض

$\beta=4$ نجد $252=28\alpha^2$ ومنه $\alpha^2=9$ أي $\alpha=3$ مقبول او $\alpha=-3$ مرفوض لان α طبيعي

$\beta=7$ نجد $2394=28\alpha^2$ مرفوض

$\beta=14$ نجد $2394=28\alpha^2$ مرفوض

$\beta=28$ نجد $\alpha^2=21951$ مرفوض

إذن $\alpha=3$ و $\beta=4$ هي الحل فقط

(2) لدينا :من تعريف عبارة الحد العام لمتتالية هندسية وخاصية ثلاثة حدود متتابعة و $28a^3=e-b$ نجد:

$e=ar^4$ و $b=ar$ ومنه : $28a^3=ar^4-ar$ أي $28a^3=ar(r^3-1)$

أي $28a^2=r(r^3-1)$ وحلولها هي حلول $28\alpha^2=\beta(\beta^3-1)$ حسب السؤال الاول

و بما أن a و r أوليان فيما بينهما فحسب 1) $a=3$ و $r=4$

ومنه نجد : $b=a.r=12$ ، $c=b.r=48$ ، $d=c.r=192$ و $e=d.r=768$

التمرين(10) باك 2003 رياضي

(1) α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

عين α و β حيث $\alpha\left(\alpha^2-19\right)=35\beta$ و $\alpha>\beta$.

(2) (u_n) متتالية هندسية حدها الأوّل u_0 وأساسها r حيث u_0 و r عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و $u_0>r$.

(أ). أوجد u_0 و r حتى يكون $35u_0{}^2+19u_1-u_0r^3=0$.

(ب). نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$. أحسب S_n بدلالة n .

(ج). أوجد قيم n حتى يقبل S_n القسمة على 30 .

حل التمرين(10) باك 2003 رياضي

(1) تعيين α و β الاوليان فيما بينهما بحيث : $\alpha\left(\alpha^2-19\right)=35\beta$

هذه العلاقة تعني α يقسم 35β وبما ان α و β اوليان فيما بينهما فانه حسب مبرهنة غوص α يقسم 35

أي ان $\alpha\in\{1;5;7;35\}$

من اجل $\alpha=1$ نجد $35\beta=-18$ أي $\beta=\dfrac{-18}{35}$ مرفوضة لانه ليس طبيعي

من اجل $\alpha=5$ نجد $35\beta=30$ أي $\beta=\dfrac{30}{35}=\dfrac{6}{7}$ مرفوضة لانه ليس طبيعي

من اجل $\alpha=7$ نجد $35\beta=210$ أي $\beta=6$ أي $(\alpha;\beta)=(7;6)$

من اجل $\alpha=35$ نجد $\beta=1206$ مرفوضة لان $\alpha>\beta$

(2) (u_n) هندسية و u_0 و r أوليان فيما بينهما و $u_0>r$.

(أ)تعيين u_0 و r بحيث : $35u_0{}^2+19u_1-u_0r^3=0$.

$35u_0{}^2+19u_1-u_0r^3=0$ تعني $35u_0{}^2=u_0r^3-19u_0.r$ ومنه $r\left(r^2-19\right)=35u_0$

وهي نفسها العلاقة السابقة التي حلولها $(7;6)$ $(r;u_0)=(7;6)$

(ب). حساب $S_n=u_0+u_1+...+u_n$. هو مجموع $(n+1)$ حد لمتتالية هندسية اساسها 7 وحدها الاول 6

$S_n=u_0.\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$ ومنه $S_n=6.\dfrac{1-7^{n+1}}{1-7}=7^{n+1}-1$

(ج). تعيين قيم n حتى يقبل S_n القسمة على 30 : أي ان $S_n\equiv0[30]$ أي $7^{n+1}-1\equiv0[30]$

أي ان $7^{n+1}-1\equiv0[5]$ و $7^{n+1}-1\equiv0[6]$ أي $7^{n+1}\equiv1[5]$ و $7^{n+1}\equiv1[6]$

لدينا بدراسة بواقي القسمة لقوى العدد 7 على كل من 6 و 5

لدينا $7\equiv1[6]$ وبالتالي $7^{n+1}\equiv1[6]$ وذلك من اجل كل عدد طبيعي n

و $7^0\equiv1[5]$ و $7^1\equiv2[5]$ و $7^2\equiv4[5]$ و $7^3\equiv3[5]$ و $7^4\equiv1[5]$

ومنه $7^{4k}\equiv 1[5]$ و $7^{4k+1}\equiv 2[5]$ و $7^{4k+2}\equiv 4[5]$ و $7^{4k+3}\equiv 3[5]$

$n+1=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$7^{n+1}\equiv ...$	1	2	4	3	$[5]$
$S_n\equiv ...$	0	1	3	2	$[5]$

ومنه $7^{n+1}\equiv 1[5]$ أي $S_n\equiv 0[30]$ من اجل $n+1=4k$ أي $n=4k-1$ و k طبيعي غير معدوم

التمرين (11) باك 2004 علوم

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7 .

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $\left(2\times 2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\right)$ قابلا للقسمة على 7 .

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n=2\times 3^n+3\times 4^n$.

(أ). أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث : $s_n=u_0+u_1+...+u_n$.

(ب). ما هي قيّم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها s_n قابلا للقسمة على 7 ؟

حل التمرين(11) باك 2004 علوم

(1)– دراسة بواقي قسمة 3^n على 7 :

$3^0\equiv 1[7]$ ، $3^1\equiv 3[7]$ ، $3^2\equiv 2[7]$ ، $3^3\equiv 6[7]$ ، $3^4\equiv 4[7]$ ، $3^5\equiv 5[7]$ ، $3^6\equiv 1[7]$

لدينا : $3^6\equiv 1[7]$ ومنه $3^{6k}\equiv 1[7]$: ، $3^{6k+1}\equiv 3[7]$ ، $3^{6k+2}\equiv 2[7]$ ، $3^{6k+3}\equiv 6[7]$ ،

$3^{6k+4}\equiv 4[7]$ ، $3^{6k+5}\equiv 5[7]$

وبنفس العمل نجد ان بواقي قسمة 4^n على 7 تشكل متتالية دورية دورها هو 3 حيث $4^{3k}\equiv 1[7]$: و

$4^{3k+1}\equiv 4[7]$ و $4^{3k+2}\equiv 2[7]$

(2) العدد $\left(2\times 2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\right)$ يقبل للقسمة على 7 معناه $2\times 2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\equiv 0[7]$

لدينا $2006\equiv 4[7]$ ومنه $2006^{3n+2}\equiv 4^{3n+2}[7]\equiv 2[7]$

و $1424\equiv 3[7]$ ومنه $1424^{6n+1}\equiv 3^{6n+1}[7]\equiv 3[7]$

اذن : $2\times 2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\equiv 2\times 2+3\equiv 0[7]$

وبالتالي من اجل كل عدد طبيعي n فان العدد $\left(2\times 2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\right)$ يقبل القسمة على 7 .

3) لدينا : $u_n=2\times 3^n+3\times 4^n$.

(أ). حساب بدلالة n المجموع s_n حيث : $s_n=u_0+u_1+...+u_n$.

$$s_n=u_0+u_1+...+u_n=2\times 3^0+3\times 4^0+2\times 3^1+3\times 4^1+...+2\times 3^n+3\times 4^n$$

ومنه $s_n=\left(2\times 3^0+2\times 3^1+...+2\times 3^n\right)+\left(3\times 4^0+3\times 4^1+...+3\times 4^n\right)$

وبالتالي : $s_n=2\left(3^0+3^1+...+3^n\right)+3\left(4^0+4^1+...+4^n\right)$

وهو مجموع لمجموعي متتاليتين هندسيتين اساساهما 3 و 4 وحداهما الاولين 1 ومنه

اذن : $S_n = 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2$ $\quad$ $S_n = 2\times 1\times \frac{3^{n+1}-1}{3-1} + 3\times 1\times \frac{4^{n+1}-1}{4-1}$

(ب). تعيين قيّم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها s_n قابلا للقسمة على 7 :

s_n قابلا للقسمة على 7 : تعني $S_n \equiv 0[7]$ أي $3^{n+1} + 4^{n+1} - 2 \equiv 0[7]$ أي $3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7]$

لدينا من السؤال الاول : $4^{3k} \equiv 1[7]$ و $4^{3k+1} \equiv 4[7]$ و $4^{3k+2} \equiv 2[7]$

ومنه $(4^{3k})^2 \equiv 1[7]$ أي $4^{6k} \equiv 1[7]$ و $4^{6k+1} \equiv 4[7]$ و $4^{6k+2} \equiv 2[7]$ و $4^{6k+3} \equiv 1[7]$ و

$4^{6k+4} \equiv 4[7]$ و $4^{6k+5} \equiv 2[7]$

$n+1$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$3^{n+1} \equiv ...$	1	3	2	6	4	5	$[7]$
$4^{n+1} \equiv ...$	1	4	2	1	4	2	$[7]$
$3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv ...$	2	0	4	0	1	0	$[7]$

$3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7]$ محققة من اجل $n+1 = 6k$ أي ان $n = 6k-1$

التمرين (12)باك 2005 رياضي

n عدد طبيعي . نعتبر العددين الطبيعيين : $\alpha = n^2 + n$ و $\beta = n+2$

(1) برهن ان $PGCD(\alpha;\beta) = PGCD(\beta;n)$

(2) استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(\alpha;\beta)$

(3) a و b عددان طبيعيان يكتبان في نظام التعداد ذي الأساس n على الشكل : $a = \overline{3520}$ و $b = \overline{384}$

(أ) برهن ان العدد $3n+2$ قاسم مشترك للعددين a و b

(ب) استنتج تبعا لقيم العدد n ان $PGCD(a;b)$ هو $3n+2$ او $2(3n+2)$

(ج) عين العددين α و β علما ان $PGCD(a;b) = 41$

حل التمرين(12)باك 2005 رياضي

(1) برهان ان $PGCD(\alpha;\beta) = PGCD(\beta;n)$

نضع $d = PGCD(\alpha;\beta)$ و $d' = PGCD(\beta;n)$

$d = PGCD(\alpha;\beta)$ معناه d يقسم α و يقسم β ومنه (d يقسم $\beta n - \alpha$ و يقسم β)

اذن d يقسم $(n+2)n - (n^2+n)$ ومنه d يقسم n و يقسم β وبالتالي و يقسم $PGCD(\beta;n)$

اذن d يقسم d'

$d' = PGCD(\beta;n)$معناه d' يقسم β و يقسم n ومنه (d' يقسم $\beta n - n$ و يقسم β)

اذن d' يقسم $(n+2)n - n$ ومنه d يقسم $n^2 + n$ أي يقسم α و يقسم β وبالتالي d'

يقسم $PGCD(\alpha;\beta)$ اذن d' يقسم d

وبما ان (d يقسم d') و (d' يقسم d) فان $d=d'$

(2) استنتاج القيم الممكنة لـ $PGCD(\alpha;\beta)$:

$$d=PGCD(\alpha;\beta)\Rightarrow d=PGCD(\beta;n)\Rightarrow\begin{cases}d/\beta\\d/n\end{cases}\Rightarrow d/\beta-n\Rightarrow d/2$$

اذن $d=2$ أو $d=1$

(3) $a=\overline{3520}^n$ و $b=\overline{384}^n$

(أ) برهان ان العدد $3n+2$ قاسم مشترك للعددين a و b

$$\begin{cases}a=\overline{3520}^n\\b=\overline{384}^n\end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases}a=3n^3+5n^2+2n\\b=3n^2+8n+4\end{cases}$$

- $3n^3+5n^2+2n=(3n+2)(n^2+n)\Rightarrow(3n+2)/a$
- $3n^2+8n^2+4=(3n+2)(n+2)\Rightarrow(3n+2)/b$

اذن $3n+2$ قاسم مشترك للعددين a و b

(ب)- استنتاج ان $PGCD(a;b)$ هو $3n+2$ او $2(3n+2)$

$PGCD(a;b)=(3n+2)\times PGCD(\alpha,\beta)=(3n+2)d$ وبما ان $d=2$ او $d=1$ ومنه نجد :

$PGCD(a,b)=2(3n+2)$ أو $PGCD(a;b)=3n+2$

(ج) تعيين العددين α و β علما ان $PGCD(a;b)=41$

$$PGCD(a;b)=41\Rightarrow 3n+2=41\Rightarrow 3n=39$$

$$\beta=13+2=15\,;\alpha=13^2+13=182\,;n=13$$

التمرين(13)باك 2007 علوم دقيقة

لتكن في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ ، المعادلة ذات المجهول (x,y) : $43x-13y=\lambda\ ...(*)$ مع $\lambda\in\mathbb{Z}$.

1) تحقق من أن $(-3\lambda,-10\lambda)$ حل للمعادلة $(*)$.

. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(*)$.

2) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ في نظام تعداد أساسه 6 ويكتب $\overline{\beta 0\gamma\gamma\gamma}$ في نظام تعداد أساسه 5 .

. بيّن أنّ α ، β و γ تحقق $43\alpha-13\beta=\gamma$.

. عيّن α ، β و γ ثم أكتب N في النظام العشري .

حل التمرين(13)باك 2007 علوم دقيقة

1) التحقق من أن $(-3\lambda,-10\lambda)$ حل للمعادلة $43x-13y=\lambda\ ...(*)$

بتعويض $x=-3\lambda$ و $y=-10\lambda$ نجد

$43(-3\lambda)-13(-10\lambda)=-192\lambda+130\lambda=\lambda$ ومنه $(*)$ محققة إذن $(-3\lambda,-10\lambda)$ حل للمعادلة $(*)$

. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(*)$.

لدينا : $\begin{cases}43x-13y=\lambda.....................(1)\\ 43(-3\lambda)-13(-10\lambda)=\lambda....(2)\end{cases}$

بطرح (2) من (1) طرف إلى طرف نجد : $43(x+3\lambda)-13(y+10\lambda)=0$ أي

$43(x+3\lambda)=13(y+10\lambda)$

لدينا $13 / 13(y+10\lambda)$ ومنه $13 / 43(x+3\lambda)$ وبما أن 13 و 43 أوليان فيما بينهما فحسب مبرهنة غوص

$13 / (x+3\lambda)$ أي $x+3\lambda=13k$ ومنه $k\in\mathbb{Z}$ / $x=13k-3\lambda$ وبنفس الطريقة نجد :

$y=43k-10\lambda \quad / \quad k\in\mathbb{Z}$

ومنه حلول المعادلة $(*)$ هي $S=\{(13k-3\lambda \ ; \ 43k-10\lambda) \ ,k\in\mathbb{Z} \ \}$

2) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ في نظام تعداد أساسه 6 ويكتب $\overline{\beta0\gamma\gamma\gamma}$ في نظام تعداد أساسه 5 .

.تبيان أنّ α ، β و γ تحقق $43\alpha-13\beta=\gamma$.

$$\begin{aligned}N=\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}&=\alpha\times6^4+\beta\times6^3+\alpha\times6^2+\beta\times6+\alpha\\&=1333\alpha+222\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N=\overline{\beta0\gamma\gamma\gamma}&=\beta\times5^4+\gamma\times5^2+\gamma\times5+\gamma\\&=625\beta+31\gamma\end{aligned}$$

إذن : $1333\alpha+222\beta=625\beta+31\gamma$ ومنه $1333\alpha-403\beta=31\gamma$ بالقسمة على 31

نجد $43\alpha-13\beta=\gamma$

– تعيين α ، β و γ : نضع $\gamma=\lambda$ ونكتب المعادلة $43\alpha-13\beta=\lambda$ فتكون حلولها هي نفس حلول المعادلة (1) أي ان : $\alpha=13k-3\lambda$ و $\beta=43k-10\lambda$ مع $\gamma=\lambda$

مع العلم ان $\lambda\prec5 \ ; \ \beta\prec5 \ ;\alpha\prec6$

قيم λ هي : 0 , 1 , 2 ,3 و 4 وبتعويض هذه القيم في علاقتي α و β نجد مايلي :

λ	0	1	2	3	4
α	$13k$	$13k-3$	$13k-6$	$13k-9$	$13k-12$
β	$43k$	$43k-3$	$43k-20$	$43k-30$	$43k-40$

– لما $\lambda=4$ نجد $\beta=43k-40 \ ; \ \alpha=13k-12$

$\begin{cases}\alpha=13k-12\prec6\\ \beta=43k-40\prec5\end{cases}$ ومنه $k=1$ وبالتالي $\lambda=4 \ , \ \beta=3 \ ; \ \alpha=1$

– لما $\lambda=3$ نجد $\beta=43k-30 \ ; \ \alpha=13k-9$

$13k \prec 15$ $\begin{cases} \alpha = 13k - 9 \prec 6 \\ \beta = 43k - 30 \prec 5 \end{cases}$ و $43k \prec 35$ أي $(k \prec 1,15$ و $k \prec 0,81)$ اي $k = 0$ لا يحقق فهو غير مقبول

- لما $\lambda = 2$

$0 \le 43k - 20 < 5$ أي $\frac{20}{43} \le k < \frac{25}{43}$ مستحيل لأن k عدد صحيح

- لما $\lambda = 1$

$0 \le 43k - 10 < 5$ أي $\frac{10}{43} \le k < \frac{15}{43}$ مستحيل لأن k عدد صحيح

- لما $\lambda = 0$

$0 \le 43k < 5$ يعني أن $0 \le k < \frac{5}{43}$ أي $k = 0$ ومنه $\alpha = 0$ و $\beta = 0$

وعليه : $\lambda = 4$, $\alpha = 1;\ \beta = 3$

- كتابة N في النظام العشري : ومنه

$$\begin{aligned} N &= 1333\alpha + 222\beta \\ &= 1333 + 666 = 1999 \end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned} N &= 625\beta + 31\gamma \\ &= 625 \times 3 + 31 \times 4 = 1875 + 124 = 1999 \end{aligned}$$

التمرين(14)باك 2008 تقني رياضي

(1) n عدد طبيعي أكبر من 5 b, a عددان طبيعيان حيث : $a = n - 2$ و $b = 2n + 3$

ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين b, a

(2) (أ) بين أن العددين b, a من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n + 5$ مضاعف للعدد 7

(ب) عين قيم n التي من أجلها $PGCD(a,b) = 7$

(3) نعتبر العددين p و q حيث : $p = 2n^2 - 7n - 15$ ، $q = n^2 - 7n + 10$

(أ) بين أن p و q يقبلان القسمة على $n - 5$

(ب) عين تبعا لقيم n وبدلالة n $PGCD(p,q)$

حل التمرين(14)باك 2008 تقني رياضي

$\begin{cases} a = n - 2 \\ b = 2n + 3 \end{cases}$ نضع : $PGCD(a,b) = d$

d / a و d / b ومنه $(d / 2a$ و $d / b)$ اذن $d / -2a + b$ أي $d / -2(n-2) + (2n+3)$

وبالتالي $d / 7$ أي $d \in \{1, 7\}$

(2) (أ) a مضاعف لـ 7 و b مضاعف لـ 7 أي $\begin{cases} a = 7k \\ b = 7k' \end{cases}$ أي $\begin{cases} n-2 = 7k \\ 2n+3 = 7k' \end{cases}$ بالطرح نجد $n+5 = 7k' - 7k$ أي

$n+5 = 7t$ حيث t عدد صحيح

من جهة أخرى لدينا : $n+5$ مضاعف لـ 7 تعني $n+5 = 7k$ أي $n = 7k-5$ أي $n-2 = 7k-7$ أي $a = 7(k-1)$

وهذا يعني a مضاعف لـ7

و $n+5$ مضاعف لـ 7 أي $n+5 = 7k$ أي $n = 7k-5$ أي $2n = 14k-10$ أي $2n+3 = 14k-7$

أي : $b = 7(2k-1)$ اذن b مضاعف لـ 7

(ب) $PGCD(a,b) = 7$ وهذا يعني $7/a$ و $7/b$ أي 7 يقسم الفرق أي 7 يقسم $n+5$ أي $n+5 = 7k$

أي $n = 7k-5$

(3) (أ) $p = 2n^2 - 7n - 15$ ، $q = n^2 - 7n + 10$

بالتحليل نجد : $p = (2n+3)(n-5)$ و $q = (n-2)(n-5)$

مما سبق لدينا $PGCD(a,b) = d$ و $d \in \{1,7\}$

$$PGCD(p,q) = PGCD((2n+3)(n-5),(n-2)(n-5)) = (n-5)PGCD(2n+3,n-2) =$$
$$= (n-5)PGCD(b,a) = (n-5)\times d$$

وبما ان $d \in \{1,7\}$ فان $PGCD(p,q) = n-5$ أو $PGCD(a,b) = 7(n-5)$

التمرين(15)باك 2008 رياضي م 1

لتكن في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ ، المعادلة ذات المجهول (x,y) : $(E)...\ 3x - 21y = 78$.

(1) (أ) بين ان المعادلة (E). تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

(ب) اثبت انه اذا كانت الثنائية (x,y)حلا للمعادلة فان $x \equiv 5[7]$

(ج) استنتج حلول المعادلة (E).

(2) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7

(ب) عين الثنائيات(x,y) من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة وتحقق : $5^x + 5^y \equiv 3[7]$

حل التمرين(15)باك 2008 رياضي م 1

$(E)...\ 3x - 21y = 78$

(1) (أ)تبيان ان المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$:

تذكير : تقبل المعادلة $ax + by = c$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$ إذا و فقط اذا كان $PGCD(|a|;|b|)$يقسم العدد c .

نعلم ان : $PGCD(3;21)$. بما ان العدد 3 يقسم العدد 78 $(78 = 3\times 26)$.

نستنتج ان المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

(ب) اثبات ان : $x \equiv 5[7]$:

لدينا : $21y \equiv 0[7]$ و $78 \equiv 1[7]$ وعليه نكتب المعادلة (E) كما يلي :

$3x \equiv 1[7]$ و حسب خواص الموافقة نكتب : $5\times 3x \equiv 5\times 1[7]$ أي : $15x \equiv 5[7]$.

نستنتج أن : $x \equiv 5[7]$.

(ج) استنتاج حلول المعادلة (E) :

من : $x \equiv 5[7]$ نستنتج ان : $x = 7k+5$ و بالتعويض في المعادلة (E) نجد : $y = k-3$.

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات (x,y) حيث : $\begin{cases} x = 7k+5 \\ y = k-3 \end{cases}$.

(2) (أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7:

بواقي القسمة الاقليدية لـ 5^n على 7 دورية و دورها 6 نلخصها في الجدول الاتي :

n	$6m$	$6m+1$	$6m+2$	$6m+3$	$6m+4$	$6m+5$
البواقي	1	5	4	6	2	3

(في هذا الجدول m عدد صحيح) .

(ب) تعيين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة وتحقق : $5^x + 5^y \equiv 3[7]$

نعلم ان حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} x = 7k+5 \\ y = k-3 \end{cases}$.

في هذا السؤال $(x;y) \in \mathbb{N}^2$ و بالتالي $k-3 \geq 0$ و بوضع $k' = k-3$ مع $k' \in \mathbb{N}$.

تصبح حلول المعادلة (E) كما يلي : $(k' \in \mathbb{N})$ $\begin{cases} x = 7k'+26 \\ y = k' \end{cases}$.

نعوض x و y في المعادلة $5^x + 5^x = 3[7]$ فنجد $5^{6(k'+4)+2} + 5^{k'} \equiv 3[7]$.

و بالتالي : $5^{k'} \equiv 6[7]$ و باستخدام بواقي قسمة 5^n على 7 نستنتج $k' = 6m+4$.

ومنه : $(m \in \mathbb{N})$ $\begin{cases} x = 42m+54 \\ y = 6m+4 \end{cases}$

التمرين(16)باك 2009 رياضي م 1

x عدد طبيعي اكبر من 1 و y عدد طبيعي

A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الاساس x بالشكل : $A = \overline{5566}$

(1) (أ) انشر العبارة $(5x^2+6)(x+1)$

(ب) اوجد علاقة تربط بين x و y اذا علمت ان $A = (5x^2+6)(2+2y)$

(ج) احسب x و y اذا علمت ان x عدد اولي اصغر من 12 ثم اكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري

(2) (أ) عين الاعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584

(ب) عين الاعداد الطبيعية a و b حيث $a \succ b$ التي تحقق $\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$

حل التمرين(16)باك 2009 رياضي م 1

(1) (أ) نشر العبارة $(5x^2+6)(x+1)$:

$(1)....(5x^2+6)(x+1)=5x^3+5x^2+6x+6$.

(ب)ايجاد علاقة تربط بين x و y حيث : $A=(5x^2+6)(2+2y)$

من جهة ، لدينا : $(2)....A=(5x^2+6)(2+2y)$.

و من جهة أخرى ، لدينا : $(3)....A=\overline{5566}=5x^3+5x^2+6x+6$.

من (1) و (2) و (3) نستنتج ان : $x+1=2+2y$ ومنه : $x=2y+1$.

(ج)حساب x و y حيث x عدد اولي و $x \prec 12$:

لدينا : A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الاساس x بالشكل $A=\overline{5566}$.

و بالتالي فإن $x \succ 6$ ، و نعلم ان x عدد اولي اصغر من 12 .

نستنتج أن : $x \in \{7;11\}$.

- عندما $x=7$ و بالتعويض في المعادلة $x=2y+1$ نجد: $y=3$.
- عندما $x=11$ و بالتعويض في المعادلة $x=2y+1$ نجد : $y=5$.

إذن : $(x;y) \in \{(7;3),(11;5)\}$.

كتابة العدد A في نظام التعداد العشري :

- من اجل : $(x;y)=(7;3)$ نجد : $A=2008$.
- من اجل $(x;y)=(11;5)$ نجد : $A=7332$.

(2) (أ) تعيين الاعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584 :

تحليل العدد 584 الى جداء عوامل اولية : $584=2^3 \times 73$.

نستنتج ان مجموعة الاعداد المطلوبة هي $\{1;2\}$.

(ب) تعيين a و b حيث $a \succ b$ و $\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$:

اذا كان $PGCD(a;b)=d$ فانه يوجد عددان طبيعيان a' و b' اوليان فيما بينهما بحيث : $a=d\times a'$ و $b=d\times b'$

نفرض ان d هو القاسم المشترك الاكبر للعددين a و b أي $PGCD(a;b)=d$.

يمكن كتابة الجملة $\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$ كما يلي : $\begin{cases} da'+db'=32 \\ (da')^2+(db')^2=584 \end{cases}$.و منه $\begin{cases} d(a'+b')=32 \\ d^2(a'^2+b'^2)=584 \end{cases}$

و بالتالي : $\begin{cases} d/32 \\ d^2/584 \end{cases}$ و حسب السؤال 2 الفرع أ) نستنتج ان : $d \in \{1;2\}$.

- الحالة الاولى $d=1$:

تكتب الجملة $\begin{cases} d(a'+b')=32 \\ d^2(a'^2+b'^2)=584 \end{cases}$ عندئذ كما يلي : $\begin{cases} (a'+b')=32 \\ (a'^2+b'^2)=584 \end{cases}$.

من $a'+b'=32$ ينتج $b'=32-a'$ و بالتعويض في $(a'^2+b'^2)=584$.

نجد $2a'^2-64a'+440=0$ و بالقسمة على 2 ينتج $a'^2-32a'+220=0$.

و بحل هذه المعادلة الاخيرة نحصل على : $a'=10$ او $a'=22$ وبالتالي نجد $b'=32-10=22$

ومنه الثنائيات $(a';b')$ حيث $(a';b') \in \{(10;22),(22;10)\}$.

و بالتالي : $(a;b) \in \{(10;22),(22;10)\}$.

و بما ان $a \succ b$ نستنتج ان : $(a;b)=(22;10)$

- الحالة الثانية $d=2$:

باتباع نفس الطريقة السابقة نجد : $(a';b') \in \{(5;11)(11;5)\}$.

و بالتالي : $(a;b) \in \{(10;22),(22;10)\}$.

و بما ان $a \succ b$ نستنتج ان : $(a;b)=(22;10)$.

خلاصة : توجد ثنائية وحيدة $(x;y)$ حيث $a \succ b$ و تحقق $\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$.هي: $(a;b)=(22;10)$.

التمرين (17)باك 2009 رياضي م 2

نعتبر المتتالية (u_n) التي حدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n+2n+1$

ونعتبر المتتالية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n+\alpha n+\beta$ حيث α و β حقيقيان

(1) عين α و β بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها وحدها الاول .

(2) عبر عن الحد العام v_n ثم u_n بدلالة n.

(3) احسب المجموعين S و S' حيث : $S=v_0+v_1+......+v_n$ و $S'=u_0+u_1+.....+u_n$

(4) (أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 5

(ب)عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها u_n مضاعفا للعدد 5

حل التمرين(17)باك 2009 رياضي م 2

(1) $u_{n+1}=3u_n+2n+1$ و $v_n=u_n+\alpha n+\beta$

تعيين α و β بحيث تكون (v_n) هندسية :

$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta$ ومنه $v_{n+1} = 3u_n + 2n + 1 + \alpha(n+1) + \beta$ ونعلم ان

$u_n = v_n - \alpha n - \beta$ ومنه بالتعويض نجد : $v_{n+1} = 3(v_n - \alpha n - \beta) + 2n + 1 + \alpha(n+1) + \beta$ ومنه نجد

$v_{n+1} = 3v_n - 2\alpha n - 2\beta + 2n + 1 + \alpha$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $\boxed{q=3}$ اذا كان

$-2\alpha n - 2\beta + 2n + 1 + \alpha = 0$ أي $(2-2\alpha)n - 2\beta + 1 + \alpha = 0$ من اجل كل عدد طبيعي n وبالتالي :

$(2-2\alpha) = 0$ و $-2\beta + 1 + \alpha = 0$ ومنه $\boxed{\alpha = 1}$ و $\boxed{\beta = 1}$

الحد الاول : $v_0 = u_0 + \alpha(0) + \beta = 0 + 1 = 1$

(2) كتابة الحد العام v_n ثم u_n بدلالة n :.

$v_n = v_0 \times q^n = 3^3$ و $u_n = v_n - \alpha n - \beta$ ومنه $u_n = 3^n - n - 1$

(3) حساب المجموع S حيث : $S = v_0 + v_1 + ... + v_n$

$$S = v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

و

$$S' = u_0 + u_1 + ... + u_n = (v_0 - 0 - 1) + (v_1 - 1 - 1) + ...(v_n - n - 1) =$$

$$= S - (0 + 1 + ... + n) - (1 + 1 + ... + 1) = S - \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$

(4) (أ) دراسة بواقي القسمة الاقليلدية للعدد 3^n على 5 :

$3^0 \equiv 1[5]$ و $3^1 \equiv 3[5]$ و $3^2 \equiv 4[5]$ و $3^3 \equiv 2[5]$ و $3^4 \equiv 1[5]$

ومنه $3^{4k} \equiv 1[5]$ و $3^{4k+1} \equiv 3[5]$ و $3^{4k+2} \equiv 4[5]$ و $3^{4k+3} \equiv 2[5]$

ومنه البواقي هي كما يلي :

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
البواقي	1	3	4	2

(ب)تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث u_n مضاعفا للعدد 5 :

لدينا : $u_n = 3^n - n - 1$ و u_n مضاعفا للعدد 5 تعني : $u_n \equiv 0[5]$ أي $3^n - n - 1 \equiv 0[5]$

اذا كان : $n = 4k$: $3^{4k} - 4k - 1 \equiv 0[5]$ ومنه $1 - 4k - 1 \equiv 0[5]$ أي $k \equiv 0[5]$ ومنه $k = 5\alpha$

اذن $n = 4(5\alpha) = 20\alpha$

- اذا كان : $n = 4k + 1$: $3^{4k+1} - (4k+1) - 1 \equiv 0[5]$ ومنه $3 - 4k - 2 \equiv 0[5]$ أي $k \equiv 4[5]$ ومنه

$k = 5\alpha + 4$ اذن $n = 20\alpha + 17$

- اذا كان : $n = 4k + 2$: $3^{4k+2} - (4k+2) - 1 \equiv 0[5]$ ومنه $4 - 4k - 3 \equiv 0[5]$ أي $k \equiv 4[5]$ ومنه

$k = 5\alpha + 4$ اذن $n = 20\alpha + 18$

- اذا كان : $n = 4k + 3$: $3^{4k+3} - (4k+3) - 1 \equiv 0[5]$ ومنه $2 - 4k - 4 \equiv 0[5]$ أي $k \equiv 2[5]$ ومنه

$k = 5\alpha + 2$ اذن $n = 20\alpha + 11$

التمرين(18) : باك 2009 تقني رياضي م 1

(1) (أ) عين الاعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2009

(ب) u_0 و a عددان طبيعيان غير معدومين , (u_n) متتالية هندسية أساسها a وحدها الأول u_0 بحيث :

$u_1^2+u_2+35a^2=2009$

احسب a و u_0

(2) نضع $a=7$ و $u_0=2$, احسب u_n بدلالة n

(3) نضع : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

(أ) عبر عن S_n بدلالة n

(ب) عين العدد الطبيعي nحتى يكون $S_n=800$

حل التمرين(18):

(1) (أ) تعيين الاعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2009 :

$2009=49\times 41=7^2\times 41$

وبما ان 1 يقسم 2009 فان الاعداد التي مربع كل منها يقسم 2009 هي : 1 و 7

(ب) حساب u_0 و a حيث (u_n) متتالية هندسية أساسها a وحدها الأول u_0 :

$u_1=u_0\times a$ و $u_2=u_0\times a^2$ ومنه العلاقة $u_1^2+u_2+35a^2=2009$ تكافئ:

$(u_0\times a)^2+u_0\times a^2+35a^2=2009$ ومنه $a^2\left(u_0^2+u_0+35\right)=7^2\times 41$

وهذه الأخيرة تعني a^2 يقسم 2009 حيث a موجب ومنه($a^2=1$ او $a^2=49$) اي ان ($a=1$ او $a=7$)

– اذا كان $a=1$ فان $a^2\left(u_0^2+u_0+35\right)=7^2\times 41$ تعني $u_0^2+u_0-1974=0$

مميز هذه المعادلة $\Delta=7897$ وحلولها $u_0=\frac{-1-\sqrt{7897}}{2}\notin\mathbb{N}$ و $u_0=\frac{-1+\sqrt{7897}}{2}\notin\mathbb{N}$ مرفوضان

اذن القيمة $a=1$ مرفوضة وبالتالي : $\boxed{a=7}$

– اذا كان $a=7$ فان $a^2\left(u_0^2+u_0+35\right)=7^2\times 41$ تكافئ $\left(u_0^2+u_0+35\right)=41$ اذن $u_0^2+u_0-6=0$

حلولها $u_0=2$ او $u_0=-3$ مرفوض لانه ليس طبيعي ومنه $\boxed{u_0=2}$

(2) $a=7$ و $u_0=2$,

حساب عبارة الحد العام : $u_n=u_0\times a^n=2\times 7^n$

(3) (أ) لدينا : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ وهو مجموع $n+1$ حد لمتتالية هندسية

$$S_n=u_0\times\frac{a^{n+1}-1}{a-1}=2\times\frac{7^{n+1}-1}{7-1}=\frac{7^{n+1}-1}{3}$$

(ب) تعيين العدد الطبيعي nحتى يكون $S_n=800$:

$S_n=800$ تعني $\frac{7^{n+1}-1}{3}=800$ ومنه $7^{n+1}=2401$ اي $7^{n+1}=7^4$ اذن $\boxed{n=3}$

التمرين(19) باك 2010 رياضي م 1

(1) نعتبر المعادلة : $7x+65y=2009$ (1) حيث : x و y عددان صحيحان .

(أ)– بيَن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإنَ y مضاعف للعدد 7.

(ب)– حل المعادلة (1).

(2)– أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على9 .

(3)– عيَن قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9.

(4)– نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2^{6n}-1$.

(أ)– تحقق أنَ u_n يقبل القسمة على 9 .

(ب)– حل المعادلة : $(7u_1)x+(u_2)y=126567.....(2)$ ذات المجهول $(x;y)$ الصحيحان

(ج)– عيَن الثنائية $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع $y_0 \geq 25$.

حل التمرين(19) باك 2010 رياضي م 1

(1) (أ)–تبيان أنَه إذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإنَ y مضاعف للعدد7 :

تذكير بمبرهنة غوص : a ، b و c أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا قسم العدد a الجداء $b\times c$ وكان a أوليا مع b فإنَ a يقسم c .

لدينا : $7x+65y=2009$ ومنه : $65y=2009-7x$

وبالتالي : $65y=7(287-x)$ نستنتج أنَ 7 يقسم $65y$ وبما أنَ7 أولي مع 65 وحسب غوص فإنَ7 يقسم y وهذا يعني أنَ y مضاعف للعدد 7 .

إذن: إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإنَ y مضاعف للعدد 7 .

(ب)– حل المعادلة (1) :

y مضاعف للعدد 7 معناه : يوجد عدد صحيح k بحيث $y=7k$ وبالتعويض في المعادلة (1)

نحصل على : $x=287-65k$

إذن حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $(k\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases} x=-65k+287 \\ y=7k \end{cases}$

(2) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9 :

$2^0\equiv 1[9]$ ، $2^1\equiv 2[9]$ ، $2^2\equiv 4[9]$ ، $2^3\equiv 8[9]$ ، $2^4\equiv 7[9]$

، $2^5\equiv 5[9]$ ، $2^6\equiv 1[9]$

نستنتج أنَ بواقي قسمة 2^n على 9 دورية و دورها 6 نلخصها في الجدول الاتي : (في هذا الجدول k عدد طبيعي)

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$2^n\equiv$	1	2	4	8	7	5	$[9]$

(3) تعيين قيم n بحيث يقبل العدد $2^{6n}+3n+2$ القسمة على9 :

من السؤال (2) نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{6n}\equiv 1[9]$

تكتب عندئذ العلاقة : $2^{6n}+3n+2\equiv 0[9]$ كمايلي : $1+3n+2\equiv 0[9]$

ومنه : $3n \equiv 6[9]$ وعليه $n \equiv 2[3]$ وبالتالي $n = 3\alpha + 2$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$.

إذن: يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على9 من أجل $n = 3\alpha + 2$ ، $\alpha \in \mathbb{N}$.

(4) أ- التحقق أنَ u_n يقبل القسمة على9 :

من السؤال (2) نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{6n} \equiv 1[9]$

ومنه $2^{6n} - 1 \equiv 0[9]$ أي $u_n \equiv 0[9]$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n يقبل القسمة على 9

ب- حل المعادلة (2) :

لدينا $u_1 = 2^6 - 1 = 63$ و $u_2 = 2^{12} - 1 = 4095$

تكتب عندئذ المعادلة (2) كمايلي : $7 \times 63x + 4095y = 126567$

وبقسمة الطرفين على 63 نحصل على المعادلة : $7x + 65y = 2009$

أي أنَ المعادلة (2) تكافئ المعادلة (1) نستنتج أنَ لهما نفس مجموعة الحلول .

إذن : حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} x = -65k + 287 \\ y = 7k \end{cases}$

جـ- تعيين الثنائية $(x_0;y_0)$ حل (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع $y_0 \geq 25$:

لدينا : $x_0 \geq 0$ و $y_0 \geq 25$ ومنه : $-65k + 287 \geq 0$ و $7k \geq 25$

وبالتالي : $k \leq 4.41$ و $k \geq 3.57$ نستنتج أنَ $k = 4$ وبالتالي :

$x = -65(4) + 287 = 27$ و $y = 7(4) = 28$

التمرين(20)باك 2010 رياضي م 2

(1)/ برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n :العدد $(3^{3n} - 1)$ يقبل القسمة على 13

(2) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ان $(3^{3n+1} - 3)$ مضاعف ل 13 و $(3^{3n+2} - 9)$ مضاعف لـ13

(3)عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 13 واستنتج باقي قسمة العدد 2005^{2010} على 13

(4) نضع من اجل كل عدد طبيعي p العدد A_p حيث $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$:

ا/ من اجل $p = 3n$ عين باقي قسمة A_p على 13

ب/بين أنه إذا كان $p = 3n + 1$ فان A_p يقبل القسمة على 13

جـ/ عين باقي قسمة A_p على 13 في حالة $p = 3n + 2$

(5) نعتبر العددين الطبيعيين a و b المكتوبان في النظام ذو الأساس 3 على الشكل :

$b = \overline{1000100010000}$ و $a = \overline{1001001000}$

(أ) تحقق أن a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري

(ب) استنتج باقي القسمة الاقليدية لكل من a و b على 13

حل التمرين (20) باك 2010 رياضي م 2

1) البرهان انه ، من اجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n}-1\equiv 0[13]$.

لدينا : $3^{3n}=\left(3^3\right)^n=(27)^n$ ونعلم ان $27\equiv 1[13]$ ومنه : $(27)^n\equiv 1[13]$.

و بالتالي من اجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n}\equiv 1[13]$ إذن من اجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n}-1\equiv 0[13]$

2) استنتاج انه ، من اجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n+1}-3\equiv 0[13]$.

من السؤال (1) وجدنا انه ، من اجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n}-1\equiv 0[13]$ و منه : $3\times\left(3^{3n}-1\right)\equiv 3\times 0[13]$

و بالتالي : $3\times 3^{3n}-3\times 1\equiv 0[13]$ نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n+1}-3\equiv 0[13]$.

– استنتاج انه ، من اجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n+2}-9\equiv 0[13]$.

من السؤال (1) وجدنا انه ، من اجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n}-1\equiv 0[13]$ ومنه : $9\times\left(3^{3n}-1\right)\equiv 9\times 0[13]$

و بالتالي : $2^2\times 3^{3n}-9\times 1\equiv 0[13]$.نستنتج انه ، من اجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n+2}-9\equiv 0[13]$.

3) تعيين ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 13 :

$3^0\equiv 1[13]$ ، $3^1\equiv 3[13]$ ، $3^2\equiv 9[13]$ ، $3^3\equiv 1[13]$. نستنتج ان بواقي قسمة 3^n على 13 دورية و دورها 3 ،

نلخصها في الجدول الاتي :

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
البواقي	1	3	9

استنتاج باقي قسمة 3^n على 13 :

لدينا : $2005=13\times 154+3$ ومنه : $2005\equiv 3[13]$.

و بالتالي : $2005^{2010}\equiv 3^{2010}[13]$ ، لكن : $2010=3\times 670$ أي ان العدد 2010 من الشكل $3k$ ، نستنتج ان

$2005^{2010}\equiv 1[13]$.إذن : باقي قسمة 2005^{2010} على 13 هو 1 .

4) أ) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد A_p على 13 و ذلك من اجل $p=3n$:

لدينا : $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$ ومنه : $A_{3n+1}=3^{n1}+3^{2(2n)}+3^{3(3n)}$ و بالتالي : $A_{3n}=3^{3n}+\left[3^{3n}\right]^2+\left[3^{3n}\right]^3$

و عليه : $A_{3n}\equiv 1+1^2+1^3\equiv 1+1+1[13]$ أي : $A_{3n}=3[13]$

إذن : إذا كان $p=3n$ فإن باقي قسمة A_p على 13 هو 3 .

(ب) البرهان انه اذا كان $p=3n+1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 :

لدينا : $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$ ومنه : $A_{3n+1}=3^{3n+1}+3^{2(3n+1)}+3^{3(3n+1)}$.

وبالتالي : $A_{3n+1}=3^{n+1}+\left[3^{2(n+1)}\right]^2+\left[3^{3(3n+1)}\right]^3$ و عليه : $A_{3n+1}=3+3^2+3^3\equiv 3+9+1\equiv 0[13]$

أي : $A_{3n+1}\equiv 0[13]$ إذن : اذا كان $p=3n+2$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .

(ج) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد A_p على 13 من اجل $p=3n+2$:

لدينا : $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$ ومنه : $A_{3n+2}=3^{3n+2}+3^{2(3n+2)}+3^{3(3n+2)}$.

و بالتالي : $A_{3n+2}=3^{3n+2}+\left[3^{(3n+2)}\right]^2+\left[3^{(3n+2)}\right]^3$ و عليه : $A_{3n+2}=9+9^2+9^3\equiv 9+3+1[13]$

أي : $A_{3n+2}\equiv 0[13]$ إذن : اذا كان $p=3n+2$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .

(5) أ) التحقق ان العدد a يكتب على الشكل A_p في النظام العشري :

تذكير : القول ان عدد طبيعي N يكتب $\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$ في النظام ذي الاساس x يعني :

$$N=\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}=a_n\times x^n+a_{n-1}\times x^{n-1}+...+a_2\times x^2+a_1\times x+a_0$$

و عليه $a=\overline{1001001000}=0+0\times 3^1+0\times 3^2+1\times 3^3+0\times 3^4+0\times 3^5+1\times 3^6+0\times 3^7+0\times 3^8+1\times 3^9$

$$=1\times 3^3+1\times 3^6+1\times 3^9=3^3+3^6+3^9=3^3+3^{3\times 2}+3^{3\times 3}+3^{3\times 3}=A_3$$

إذن : $a=A_3$.

التحقق ان العدد b يكتب على الشكل A_p في النظام العشري : $b=\overline{100010001000}$

$$=0+0\times 3^1+0\times 3^2+0\times 3^3+1\times 3^4+0\times 3^5+0\times 3^6+0\times 3^7+1\times 3^8+0\times 3^9+0\times 3^{10}+0\times 3^{11}+1\times 3^{12}$$

$$=1\times 3^4+1\times 3^8+1\times 3^{12}=3^4+3^8+3^{12}=3^4+3^{2\times 4}+3^{3\times 4}=A_4$$

إذن : $b=A_4$

ب) استنتاج باقي القسمة الاقليدية لكل من العددين a و b على 13 :

من السؤال (4) حصلنا على النتائج الاتية :

- اذا كان $p=3n$ فإن باقي قسمة A_p على 13 هو 3 .
- اذا كان $p=3n+1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .
- اذا كان $p=3n+2$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .

و بالتالي : اذا كان p من مضاعفات العدد 3 فإنَ باقي قسمة A_p على 13 هو 3،

و اذا كان p ليس من مضاعفات العدد 3 فان باقي قسمة A_p هو 0 .

نستنتج ان : $a=A_3\equiv 3[13]$ و $b=A_4\equiv 0[13]$

<u>التمرين(21) باك 2010 تقني رياضي م 1</u>

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الاساس 7 كما يلي : $n=\overline{11\alpha 00}$ حيث α عدد طبيعي

(1) عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3

(2) عين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5

- استنتج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15

(3) نأخذ $\alpha=4$. اكتب العدد n في النظام العشري

حل التمرين(21) باك 2010 تقني رياضي م 1

(1) تعيين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3 : حيث $n=\overline{11\alpha 00}=7^2\alpha+7^3+7^4$

$n\equiv 0[3]$ تعني $7^2\alpha+7^3+7^4\equiv 0[3]$ و بما ان $7^2\equiv 1[3]$ و $7^3\equiv 1[3]$ و $7^4\equiv 1[3]$

فان $\alpha+2\equiv 0[3]$ ومنه $\alpha\equiv 1[3]$ اذن $\alpha=3k+1$ حيث $0\le\alpha\prec 7$

من اجل $k=0$ نجد $\alpha=1$

ومن اجل $k=1$ نجد $\alpha=4$

(2) تعيين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5 : أي $7^2\alpha+7^3+7^4\equiv 0[5]$

ومنه $n\equiv 0[5]$ تعني $7^2\alpha+7^3+7^4\equiv 0[5]$ ومنه $7^2\left(\alpha+7+7^2\right)\equiv 0[5]$

ومنه $\left(7\equiv 2[5]\right)$ $\left(\alpha+2+2^2\right)\equiv 0[5]$ 2^2 اذن $4\left(\alpha+1\right)\equiv 0[5]\Rightarrow\alpha+1\equiv 0[5]\Rightarrow\alpha\equiv 4[5]$

اذن $\alpha=5k+4$ مع $0\le\alpha\prec 7$ وبالتالي $\alpha=4$

- استنتاج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15 : أي $n\equiv 0[15]$

و $n\equiv 0[15]$ تعني $\begin{cases}n\equiv 0[3]\\ n\equiv 0[5]\end{cases}$ وتعني ايضا $\begin{cases}\alpha\equiv 1[3]\\ \alpha\equiv 4[5]\end{cases}$ ومن السؤال السابق نجد ان $\alpha=4$

(3) كتابة العدد n في النظام العشري حيث $\alpha=4$.

$n=\overline{11400}=4.7^2+7^3+7^4\Rightarrow\boxed{n=2940}$

التمرين(22) باك 2010 تقني رياضي م2

(1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 10^n على 13

(2) تحقق ان : $\left(10^{2008}\right)^2+10^{2008}+1\equiv 0[13]$

(3)عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $10^{2n}+10^n+1\equiv 0[13]$

حل التمرين(22) باك 2010 تقني رياضي م 2

(1) تعيين بواقي قسمة 10^n على 13 :

$10^0\equiv 1[13]$ ، $10^1\equiv 10[13]$ ، $10^2\equiv 9[13]$ ، $10^3\equiv 12[13]$ ، $10^4\equiv 3[13]$ ، $10^5\equiv 4[13]$ ، $10^6\equiv 1[13]$.

$10^{6k}\equiv 1[13]$ ، $10^{6k+1}\equiv 10[13]$ ، $10^{6k+2}\equiv 9[13]$ ، $10^{6k+3}\equiv 12[13]$ ، $10^{6k+4}\equiv 3[13]$ ، $10^{6k+5}\equiv 4[13]$.

(2) التحقق ان : $\left(10^{2008}\right)^2+10^{2008}+1\equiv 0[13]$

لدينا $2008=6(334)+4=6k+4$ و من بواقي القسمة نجد $10^{2008}\equiv 3[13]$ ومنه $\left(10^{2008}\right)^2\equiv 9[13]$

اذن $\left(10^{2008}\right)^2+10^{2008}+1\equiv 9+3+1\equiv 0[13]$

(3)تعيين قيم n بحيث يكون : $10^{2n}+10^{n}+1\equiv 0[13]$

$10^{2n}+10^{n}+1\equiv 0[13]$ تعني $\left(10^{n}\right)^2+10^{n}\equiv 12[13]$.

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$10^{n}\equiv\ldots$	1	10	9	12	3	4	$[13]$
$\left(10^{n}\right)^2\equiv\ldots$	1	9	3	1	9	3	$[13]$
$\left(10^{n}\right)^2+10^{n}\equiv$	2	6	12	0	12	7	$[13]$

اذن $\left(10^{n}\right)^2+10^{n}\equiv 12[13]$ محققة من اجل

$\boxed{n=6k+4;k\in\mathbb{N}}$ أو $\boxed{n=6k+2}$.

التمرين(23) باك 2011 رياضي م 1

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها اعداد طبيعية تحقق : $\begin{cases}u_4=15\\ m+d=42\end{cases}$ حيث : $\begin{cases}m=PPCM\left(u_3;u_5\right)\\ d=PGCD\left(u_3;u_5\right)\end{cases}$

(1)عين الحدين u_5 و u_3 واستنتج u_0

(2) اكتب u_n بدلالة n ثم بين ان 2010 حد من حدود (u_n) وعين رتبته

(3)عين الحد الذي ابتداء منه يكون مجموع خمسة حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080

(4) n عدد طبيعي غير معدوم

(أ)احسب بدلالة n المجموع S حيث : $S=u_0+u_1+\ldots+u_n$

(ب) استنتج بدلالة n المجموع S_1 و S_2 حيث : $S_1=u_0+u_2+u_4\ldots+u_{2n}$ و

$S_2=u_1+u_3+u_5\ldots+u_{2n-1}$

حل التمرين(23)باك 2011 رياضي م 1

(1)إيجاد الحدين u_5 و u_3

بما أن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين u_5 و u_3 فإن d يقسم المجموع $u_5+u_3=2u_4=30$ ومنه

d من قواسم العدد30 أي ان $d\in\{1;2;3;5;6;10;15;30\}$ ....(1)

من جهة أخرى d يقسم المضاعف المشترك الأصغر m ومنه فإن d يقسم المجموع $d+m=42$

أي d من قواسم العدد 42: $d\in\{1;2;3;4;6;7;21;42\}$ ....(2)

من (1) و (2) نجد $d \in \{1;2;3;6\}$ وعليه قيم $m = 42-d$ ، $m \in \{41;40;39;36\}$

$$(m;d) \in \{(41;1);(40;2);(39;3);(36;6)\}$$

لدينا العلاقة التالية $u_3.u_5 = m.d$ و لدينا أيضا $u_3 + u_5 = 30$ ومنه الحدين u_3 و u_5 حلا المعادلة التالية:

$$x^2 - 30x + m.d = 0 \text{ ومنه } \sqrt{\Delta} = \sqrt{(-30)^2 - 4(m.d)}$$

ولكي تقبل المعادلة السابقة حلولا في مجموعة الأعداد الطبيعية يجب أن يكون $\sqrt{\Delta}$ طبيعياوالثنائية الوحيدة التي تحقق ذلك هي $(m;d) = (36;6)$ ومنه حلا المعادلة من أجل هذه الثنائية هي : $x_1 = 12;\ x_2 = 18$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية متزايدة فإن : $u_3 = 12$ و $u_5 = 18$

استنتاج u_0 و: $u_0 = u_3 - 3r = 12 - 3(3) = 3$ $(r = u_4 - u_3 = 15 - 12 = 3)$

ومنه $u_0 = 3$ و $r = 3$

(2) كتابة u_n بدلالة n : $u_n = 3 + 3n$

اثبات أن 2010 حد من حدود (u_n):

نحل المعادلة $u_n = 2010 = 3 + 3n$ ومنه $n = 669 \in \mathbb{N}$ ومنه 2010 حد من حدود المتتالية ورتبته 670.

(2)ايجاد الحد الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متتابعة مساوي 10080

$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + u_{p+4} = 10080$ ونحسب الحدود ونعوض فنجد :

$\frac{5}{2}(3 + 3p + 3 + 3p + 12) = 10080$ ومنه $6p + 18 = 4032$ ومنه $p = 669$

ومنه الحد هو : $u_{669} = 3 + 3(669) = 2010$

(3)(أ) حساب المجموع S:

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{2n} = \frac{2n+1}{2}(3 + 3 + 6n) = (2n+1)(3+3n)$$

ب) استنتاج بدلالة n المجموعين: S_1 و S_2 :

$S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \ldots\ldots + u_{2n}$ و $S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \ldots\ldots + u_{2n-1}$

نلاحظ أن $S = S_1 + S_2$ و $S_2 = (u_0 + 3) + (u_2 + 3) + \ldots + (u_{2n-2} + 3) = S_1 + 3n - u_{2n}$

ومنه $S_2 = S_1 + 3n - u_{2n}$ اذن $2S_1 = S - 3n + u_{2n}$ وبالتالي :

$$S_1 = \frac{S + u_{2n} - 3n}{2} = \frac{(2n+1)(3n+3) + 3 + 6n - 3n}{2} = \frac{(2n+1)(3n+3) + 3n + 3}{2};$$

$$S_1 = \frac{3(n+1)(2n+2)}{2} = 3(n+1)^2$$

ومنه

$$S_2 = S_1 + 3n - u_{2n} = 3(n+1)^2 + 3n - 3 - 6n$$
$$= 3(n+1)^2 - 3n - 3 = 3n(n+1)$$

التمرين(24) باك 2011 رياضي م 2

(1) نعتبر المعادلة : $13x-7y=-1 \dots (E)$ حيث x و y صحيحان . حل المعادلة (E)

(2) عين الاعداد الصحيحة a حيث $\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$

(3) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على كل من العددين 7 و 13

(4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 9 كما يلي : $\overline{\alpha 00\beta 086}$ حيث α و β عددان طبيعيان و $\alpha \neq 0$. عين α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91

حل التمرين(24) باك 2011 رياضي م 2 :

(1)حل المعادلة (E):

نلا حظ أن الثنائية $(1;2)$ حل خاص للمعادلة (E) ومنه $\begin{cases} 13x-7y=-1 \dots\dots\dots(1) \\ 13(1)-7(2)=-1 \dots\dots..(2) \end{cases}$

بالطرح نجد: $13(x-1)-7(y-2)=0$ ومنه $13(x-1)=7(y-2)$

ومنه 7 يقسم $13(x-1)$ لكن 7 و 13 أوليان فيما بينهما ومنه حسب غوص 7 يقسم $(x-1)$.

ومنه $x=7k+1$ وبالتعويض نجد : $y=13k+2$ حيث k عدد صحيح

ومنه حلول المعادلة (E) : $S=\{(x;y)=(7k+1;13k+2);k\in Z\}$

(2) إيجاد الأعداد الصحيحة a

لدينا $\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a=7t-1 \dots\dots\dots(1) \\ a=13t' \dots\dots\dots(2) \end{cases} (t;t')\in Z$

من (1) و (2) نجد: $13t'-7t=-1$ حلول هذه المعادلة هي نفسها حلول المعادلة (E)

اي $(t';t)=(7k+1;13k+2);k\in Z$

ومنه $a=91k+13$

(3) – دراسة بواقي قسمة العدد 9^n على كل من 7 و 13:

$9^0\equiv 1[7]$, $9^1\equiv 2[7]$, $9^2\equiv 4[7]$, $9^3\equiv 1[7]$

الدور 3 وبالتعميم نجد:

إذا كان $n=3k$ فباقي قسمة العدد 9^n على 7 هو 1 وإذا كان $n=3k+1$ باقي قسمة العدد 9^n على 7 هو 2

إذا كان $n=3k+2$ باقي قسمة العدد 9^n على 7 هو 4

– بنفس الطريقة نجد بواقي قسمة العدد 9^n على 13 حيث نجد:

إذا كان $n=3k$ باقي قسمة العدد 9^n على 13 هو 1 وإذا كان $n=3k+1$ باقي قسمة العدد 9^n على 13 هو 9

إذا كان $n=3k+2$ باقي قسمة العدد 9^n على 13 هو 3

(4)إيجاد α و β

نكتب العدد $b=\overline{\alpha 00\beta 086}$في النظام العشري نجد $b=9^6\alpha+9^3\beta+78$

العدد b يقبل القسمة على 91 معناه $9^6\alpha+9^3\beta+78\equiv 0[91]$ ...(أ)

لكن $9^6\alpha+9^3\beta+78\equiv \alpha+\beta+78[91]$ ....(ب)

لأن $\left(9^6\equiv 1[91]\ ,\quad 9^3\equiv 1[91]\right)$ يمكن استنتاج هذا مما سبق

من (أ) و (ب) نجد: $\alpha+\beta+78\equiv 0[91]$ ومنه $\alpha+\beta\equiv 13[91]$ ومنه $\alpha+\beta=91k+13$

لكن $1\leq \alpha+\beta\leq 16$ لأن $0\leq \beta\leq 8$ و $0<\alpha\leq 8$

ومنه قيم α و β الممكنة هي: $(\alpha;\beta)=\{(5;8);(6;7);(7;6);(8;5)\}$

التمرين(25) باك 2011 تقني رياضي م 1

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية :

(1) المعادلة $21x+14y=40$ لا تقبل حلولا في مجموعة الاعداد الصحيحة

(2) في نظام التعداد ذي الاساس 7 يكون : $\overline{3421}+\overline{1562}=\overline{5413}$

(3) باقي القسمة الاقليدية للعدد $1+3+3^2+...+3^{2011}$ على 7 هو 6:

حل التمرين(25) باك 2011 تقني رياضي م 1

(1) صحيح المعادلة $21x+14y=40$ لا تقبل حلولا في مجموعة الاعداد الصحيحة لأن :
$PGCD(21;14)=7$

والعدد 7 لا يقسم العدد 40 حسب مبرهنة بيزو

(2) في نظام التعداد ذي الاساس 7 يكون : $\overline{3421}+\overline{1562}=\overline{5413}$ خاطئة لان :

في نظام التعداد ذي الاساس 10 لدينا : $\overline{3421}=1+2\times 7+4\times 7^2+3\times 7^3=1240$

و لدينا ايضا : $\overline{1562}=2+6\times 7+5\times 7^2+1\times 7^3=632$ وبالتالي في نظام التعداد ذي الاساس 10 يكون $\overline{3421}+\overline{1562}=1240+632=1872$

بينما في نظام التعداد العشري لدينا : $\overline{5413}=3+1\times 7+4\times 7^2+5\times 7^3=1921$

(3) باقي القسمة الاقليدية للعدد $1+3+3^2+...+3^{2011}$ على 7 هو 6: خطأ لأن :

$$1+3+3^2+...+3^{2011}=1\times\frac{3^{2012}-1}{3-1}=\frac{1}{2}\left(3^{2012}-1\right)$$

فاذا كان باقي القسمة الاقليدية للعدد $\frac{1}{2}\left(3^{2012}-1\right)$ على7هو6 فهذا معناه $\left(\frac{1}{2}\left(3^{2012}-1\right)-6\right)$ يقبل القسمة على 7

أي $\frac{3^{2012}-13}{2}$ يقبل القسمة على 7 أي ان $3^{2012}-13$ يقبل القسمة على 7 أي $3^{2012}-13\equiv 0[7]$

ندرس بواقي قسمة العدد 3^n على7

$3^0 \equiv 1[7]$ و $3^1 \equiv 3[7]$ و $3^2 \equiv 2[7]$ و $3^3 \equiv 6[7]$ و $3^4 \equiv 4[7]$ و $3^5 \equiv 5[7]$ و $3^6 \equiv 1[7]$

ومنه $3^{6k} \equiv 1[7]$ و $3^{6k+1} \equiv 3[7]$ و $3^{6k+2} \equiv 2[7]$ و $3^{6k+3} \equiv 6[7]$ و $3^{6k+4} \equiv 4[7]$ و $3^{6k+5} \equiv 5[7]$

ولدينا $2012 = 6\times 335 + 2 = 6k+2$ ومنه $3^{2012} \equiv 2[7]$ وبالتالي : $3^{2012} - 13 \equiv 2-13[7]$ أي

$3^{2012} - 13 \equiv 3[7]$

التمرين(26) باك 2011 تقني رياضي م 2

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

(1) تحقق ان : $4 \equiv -3[7]$ ثم بين ان : $A_3 \equiv 6[7]$

(2) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لكل من العددين : 2^n و 3^n على 7

(3) بين انه اذا كان n فرديا فان : $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7 واستنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد A_{2011} على 7

(4) ماهو باقي القسمة الاقليدية للعدد A_{1432} على 7 ؟

حل التمرين(26) باك 2011 تقني رياضي م 2

$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

(1)لدينا : $4-(-3) = 7$ و7 مضاع 7 ومنه $4 \equiv -3[7]$

- تبيان ان : $A_3 \equiv 6[7]$:

لدينا $A_3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$ ولدينا أيضا من السؤال السابق : $4^3 \equiv -3^3[7]$

و $6 \equiv -1[7]$ ومنه $6^3 \equiv -1[7]$ و $5 \equiv -2[7]$ ومنه $5^3 \equiv -2^3[7]$

وبالتالي نجد : $A_3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 \equiv 2^3 + 3^3 - 3^3 - 2^3 - 1[7]$ اذن $A_3 \equiv -1[7]$ اي $A_3 \equiv 6[7]$

(2) درس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لكل من العددين : 2^n و 3^n على 7

(*)- دراسة بواقي قسمة 3^n على 7 :

$3^0 \equiv 1[7]$, $3^1 \equiv 3[7]$, $3^2 \equiv 2[7]$, $3^3 \equiv 6[7]$, $3^4 \equiv 4[7]$, $3^5 \equiv 5[7]$, $3^6 \equiv 1[7]$

لدينا : $3^6 \equiv 1[7]$ ومنه: $3^{6k} \equiv 1[7]$ ، $3^{6k+1} \equiv 3[7]$ ، $3^{6k+2} \equiv 2[7]$ ، $3^{6k+3} \equiv 6[7]$ ،

$3^{6k+4} \equiv 4[7]$ ، $3^{6k+5} \equiv 5[7]$

(*)- دراسة بواقي قسمة 2^n على 7 :

$2^0 \equiv 1[7]$ و $2^1 \equiv 2[7]$ و $2^2 \equiv 4[7]$ و $2^3 \equiv 1[7]$ ومنه الدور 3

ومنه $2^{3k} \equiv 1[7]$ و $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ و $2^{3k+2} \equiv 4[7]$ ومنه البواقي هي : 1 و 2 و 4

(3) تبيان ان : $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7 اذا كان n فرديا :

. $A_n + 1 = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 1$

$6 \equiv -1[7]$ ومنه $6^n \equiv -1[7]$ حيث n فرديا و $5 \equiv -2[7]$ ومنه $5^n \equiv -2^n[7]$ لان n فردي

و $-3\equiv 4[7]$ ومنه $4^n\equiv -3^n[7]$ وبالتالي نجد:

$A_n+1=2^n+3^n+4^n+5^n+6^n+1\equiv 2^n+3^n-3^n-2^n-1+1[7]$ اذن $A_n+1\equiv 0[7]$ وهو المطلوب

– استنتاج باقي القسمة الاقليدية للعدد A_{2011} على 7 :

بما ان 2011 فردي فان: $A_{2011}+1\equiv 0[7]$ ومنه $A_{2011}\equiv -1[7]$ أي $A_{2011}\equiv 6[7]$ ومنه باقي القسمة هو 6

(4) باقي القسمة الاقليدية للعدد A_{1432} على 7 : العدد 1432 زوجي

لدينا : $6\equiv -1[7]$ ومنه $6^{1432}\equiv 1[7]$ و $5\equiv -2[7]$ ومنه $5^{1432}\equiv 2^{1432}[7]$

و $4\equiv -3[7]$ ومنه $4^{1432}\equiv 3^{1432}[7]$

و لدينا : $1432=3\times 477+1$ و $1432=6\times 238+4$ ومنه من دراسة بواقي القسمة على 7 ينتج :

$A_{1432}\equiv 2^{3k+1}+3^{6k+4}+3^{6k+4}+2^{3k+1}+1[7]$ اذن $A_{1432}\equiv 2+4+4+2+1[7]$ أي $A_{1432}\equiv 6[7]$

<u>التمرين(27)باك 2012 رياضي م 1</u>

(1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $(1)...2011x+1432y=31$

أ– أثبت أن العدد 2011 أولي.

ب– باستعمال خوارزمية إقليدس ، عين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة(1) ، ثم حل المعادلة (1).

(2) أ– عيَن، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 ، ثمَ جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7.

ب– عيَن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $2010^n+2011^n+1432^n\equiv 0[7]$

(3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث : α ، β ، γ بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (1) .

عيَن α ، β و γ ثمَ أكتب N في النظام العشري .

<u>حل التمرين(27):باك 2012 رياضي م 1</u>

(1) أ– إثبات أنَ العدد 2011 أولي .

العدد 2011 لأنَه لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية من 2 ، 3 ......،43،47 .

ولدينا : $47^2\succ 2011$ ، ومنه العدد 2011أولي.

ب– إيجاد حل خاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1).

القاسم والمقسوم	2011	1432	579	274	31	26	5
باقي القسمة		579	274	31	26	5	1

وبالتالي : $31=579-274\times 2=579-(1432-579\times 2)\times 2$

أي: $31=579\times 5-1432\times 2=(2011-1432)\times 5-1432\times 2$

إذن : $(7)\times1432-(5)\times2011=31$ ومنه $(5;7)$ حل خاص.

-حل المعادلة(1).

لدينا $\begin{cases}2011x-1432y=31\\2011(5)-1432(7)=31\end{cases}$ إذن $2011(x-5)=1432(y-7)$.

إذن 2011 يقسم $1432(y-7)$ و 2011 ، 1432 أوليان فيما بينهما

ومنه حسب غوص نجد 2011 يقسم $(y-7)$ أي : $y=2011k+7$ حيث k عدد صحيح

بالتعويض نجد : $2011(x-5)=1432(2011k+7-7)$ أي $x-5=1432k$ ومنه $x=1432k+5$

(2) أ- تعيين حسب قيم العدد الطبيعي k، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

لدينا : $2^0\equiv1[7]$ ، $2^1\equiv2[7]$ ، $2^2\equiv4[7]$ ، $2^3\equiv1[7]$.

ومنه من أجل كل عدد طبيعي k فإن $2^{3k}\equiv1[7]$ ، $2^{3k+1}\equiv2[7]$ ، $2^{3k+2}\equiv4[7]$.

- إيجاد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 .

لدينا : $1432\equiv1[3]\Rightarrow1432^{2012}\equiv1^{2012}[3]\equiv1[3]$ أي $1432^{2012}\equiv1[3]$ وبالتالي $1432^{2012}=3k+1$

ولدينا $2011\equiv2[7]$ ومنه $2011^{1432^{2012}}\equiv2^{1432^{2012}}[7]$ إذن $2011^{1432^{2012}}\equiv2^{3k+1}[7]$

ومن السؤال (2) نجد $2^{3k+1}\equiv2[7]$ اذن $2011^{1432^{2012}}\equiv2[7]$

ومنه : باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 هو 2.

ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $2010^n+2011^n+1432^n\equiv0[7]$

لدينا $2010\equiv1[7]\Rightarrow2010^n\equiv1^n[7]\equiv1[7]$

و $2011\equiv2[7]\Rightarrow2011^n\equiv2^n[7]$

و $1432\equiv4[7]\Rightarrow1432^n\equiv4^n[7]$ أي $1432^n\equiv2^{2n}[7]$

وبالتالي $2010^n+2011^n+1432^n\equiv0[7]$ تعني $1+2^n+2^{2n}\equiv0[7]$

إذن $2^n(2^n+1)\equiv6[7]$

ومنه $n\equiv3k+1$ او $n\equiv3k+2$ حيث k عدد طبيعي .

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$2^n\equiv\ldots$	1	2	4	$[7]$
$2^n+1\equiv\ldots$	2	3	5	$[7]$
$2^n(2^n+1)\equiv..$	2	6	6	$[7]$

(3) تعيين α ، β و γ.

لدينا $N=\overline{2\gamma\alpha\beta}^{(9)}=2\times9^3+\gamma\times9^2+\alpha\times9^1+\beta\times9^0=1458+81\gamma+9\alpha+\beta$ حيث $\alpha;\beta;\gamma$ أعداد طبيعية من المجال $[0;8]$.

$(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (1) معناه $\beta=1432k+5$ و $\gamma=2011k+7$ وبالتالي : $\beta=5$ و $\gamma=7$.

α ، β ، γ بهذا الترتيب تشكل حدود متتباعة من متتالية حسابية متزايدة تماما، معناه $2\beta=\alpha+\gamma$ وبالتالي :

$\alpha=2\beta-\gamma$ إذن $\alpha=3$.

ومنه الكتابة العشرية للعدد N هي : $N=\overline{2\gamma\alpha\beta}^{(9)}=1458+81\times7+9\times3+5=2057$

التمرين(28) باك 2012 رياضي م 2

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=16$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=6u_n-9$

(1) (أ) احسب بواقي قسمة كل من الحدود : u_0 و u_1 , u_2 , u_3 , u_4 على 7

(ب) خمن قيمة للعدد a وقيمة للعدد b بحيث : $u_{2k}\equiv a[7]$ و $u_{2k+1}\equiv b[7]$

(2) (أ) برهن انه من كل عدد طبيعي n : $u_{n+2}\equiv u_n[7]$

(ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي k $u_{2k}\equiv 2[7]$ ، ثم أستنتج أنَ : $u_{2k+1}\equiv 3[7]$

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n-\frac{9}{5}$.

(أ)- بيَن أنَ المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعين أساسها وحدها الأول.

(ب)- أحسب بدلالة n كلا من u_n و S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

حل التمرين(28) باك 2012 رياضي م 2

(1) أ- حساب بواقي قسمة كل من الحدود: u_0 و u_1 , u_2 , u_3 , u_4 على 7.

لدينا $u_0=16=7\times2+2 \Rightarrow u_0\equiv2[7]$ ، $u_1=6u_0-9\equiv6\times2-9[7]\equiv3[7]$

$u_2=6u_1-9\equiv6\times3-9[7]\equiv2[7]$ ، $u_3=6u_2-9\equiv6\times2-9[7]\equiv3[7]$

. $u_4=6u_3-9\equiv6\times3-9[7]\equiv2[7]$

ب- التخمين : من خلال النتائج السابقة نخمن أنَ قيمة العدد هي $a=2$ وقيمة العدد $b=3$

(2) أ- إثبات أنَه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2}\equiv u_n[7]$

لدينا $u_{n+2}=6u_{n+1}-9$ وبالتالي $u_{n+2}=6(6u_n-9)-9\equiv-(-u_n-2)-2[7]\equiv u_n[7]$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2}\equiv u_n[7]$

ب- إثبات بالتراجع أنه من أجل مل عدد طبيعي k ، $u_{2k}\equiv2[7]$

لدينا $u_0\equiv2[7]$ أي $u_{2\times0}\equiv2[7]$.

نفترض أنَ : $u_{2k}\equiv2[7]$ ونبرهن أنَ : $u_{2(k+1)}\equiv2[7]$

لدينا $u_{2k+2}\equiv u_{2k}[7]$ (حسب ما سبق) ولدينا $u_{2k}\equiv2[7]$ وبالتالي $u_{2(k+1)}\equiv2[7]$ أي $u_{2k+2}\equiv2[7]$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k}\equiv2[7]$

-استنتاج انَ : $u_{2k+1}\equiv3[7]$

لدينا $u_{n+1}=6u_n-9$ إذن $u_{2k+1}=6u_{2k}-9$ وبالتالي $u_{2k+1}=6\times2-9[7]\equiv3[7]$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k+1} \equiv 3[7]$

(3) أ- إثبات أنَ المتتالية (v_n) هندسية.

لدينا $v_n = u_n - \frac{9}{5}$ وبالتالي $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{9}{5} = 6u_n - 9 - \frac{9}{5} = 6u_n - \frac{54}{5}$ إذن $v_{n+1} = 6\left(u_n - \frac{9}{5}\right) = 6v_n$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 6$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{9}{5} = 16 - \frac{9}{5} = \frac{71}{5}$

ب- حساب بدلالة n كلا من u_n و S_n .

لدينا : $v_n = v_0.q^n = \frac{71}{5}.(6)^n$ ولدينا $v_n = u_n - \frac{9}{5}$ و بالتالي $u_n = v_n + \frac{9}{5} = \frac{71}{5}.(6)^n + \frac{9}{5}$

ولدينا : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \left(v_0 + \frac{9}{5}\right) + \left(v_1 + \frac{9}{5}\right) + ... + \left(v_n + \frac{9}{5}\right)$

وبالتالي : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n + \frac{9}{5}(n+1)$

إذن : $S_n = v_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right) + \frac{9}{5}(n+1) = \frac{71}{5}\left(\frac{6^{n+1}-1}{6-1}\right) + \frac{9}{5}(n+1)$

ومنه : $S_n = \frac{71}{25}\left(6^{n+1}-1\right) + \frac{9}{5}(n+1)$

التمرين(29)باك 2012 تقني رياضي م 1

(1) – أدرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 9^n على 11 .

(2) – ماهو باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11 ؟

(3) – برهن أنَه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $\left(4\times 9^{15n+1} + 4\times 2011^{10n} + 2011^{2012}\right)$ يقبل القسمة على 11 .

(4) عيَن الاعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $\left(2011^{2012} + 2n + 2\right)$ مضاعفا للعدد 11 .

حل التمرين(29) باك 2012 تقني رياضي م 1

(1)- دراسة بواقي قسمة 9^n على 11 :

لدينا: $9^0 \equiv 1[11]$ ، $9^1 \equiv 9[11]$ ، $9^2 \equiv 4[11]$ ، $9^3 \equiv 3[11]$ ، $9^4 \equiv 5[11]$، $9^5 \equiv 1[11]$ البواقي حدود لمتتالية دورية دورها 5 .

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي k فإنَ : $9^{5k} \equiv 1[11]$ ، $9^{5k+1} \equiv 9[11]$ ، $9^{5k+2} \equiv 4[11]$ ، $9^{5k+3} \equiv 3[11]$ ، $9^{5k+4} \equiv 5[11]$

(2) – تحديد باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11 :

لدينا $2011 \equiv 9[11]$ ومنه $2011^{2012} \equiv 9^{2012}[11]$

وبما أنَ $2012 = 5\times 402 + 2$ فإنَ : $2011^{2012} \equiv 9^{5\times 402+2}[11] \equiv 4[11]$

(3) – إثبات أنَ العدد $\left(4\times 9^{15n+1}+4\times 2011^{10n}+2011^{2012}\right)$ يقبل القسمة على 11 :

لدينا : $9^{15n+1}=\left(9^{5n}\right)^3\times 9\equiv(1)^3\times 9[11]\equiv 9[11]$ و $2011^{10n}\equiv 9^{10n}[11]\equiv\left(9^{5n}\right)^2[11]\equiv(1)^2[11]\equiv 1[11]$

ومنه $4\times 9^{15n+1}+4\times 2011^{10n}+2011^{2012}\equiv 4\times 9+4\times 1+4[11]\equiv 44[11]$ أي

$4\times 9^{15n+1}+4\times 2011^{10n}+2011^{2012}=0[11]$

(4) تعيين الاعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $\left(2011^{2012}+2n+2\right)$ مضاعفا للعدد 11 :

لدينا : $2011^{2012}+2n+2\equiv 0[11]$ وبالتالي : $4+2n+2\equiv 0[11]$ أي $2n\equiv 5[11]$ إذن $6\times 2n\equiv 6\times 5[11]$

أي $n\equiv 8[11]$ ومنه $n=11k+8$ حيث k عدد طبيعي .

التمرين(30) باك 2012 تقني رياضي م 2

نسمي (S) الجملة التالية : $\begin{cases}x\equiv 3[15]\\ x\equiv 6[7]\end{cases}$ حيث x عدد صحيح $(x\in\mathbb{Z})$.

(1) بيَن انَ العدد 153 حل للجملة (S) .

(2) إذا كان x_0 حلا لـ (S) بيَن أنَ: (x حل لـ (S)) يكافئ $\left(\begin{cases}x-x_0\equiv 0[15]\\ x-x_0\equiv 0[7]\end{cases}\right)$.

(3) حل الجملة (S) .

(4) يريدمكتبيوضععددمنالكتبفيعلب،فإذااستعملعلباتتسعل 15 كتاباتبقيلديه 3 كتب،وإذااستعملعلباتتسعل 7 كتبتبقيلديه 6 كتب .

إذا علمت انَ عدد الكتب التي بحوزته محصور بين 500 و 600 كتابا ، ما عدد هذه الكتب ؟

حل التمرين(30) باك 2012 تقني رياضي م 2

لدينا (S) الجملة التالية : $\begin{cases}x\equiv 3[15]\\ x\equiv 6[7]\end{cases}$ حيث x عدد صحيح $(x\in\mathbb{Z})$.

(1) – إثبات انَ العدد 153 حل للجملة (S) .

لدينا $\begin{cases}153\equiv 10\times 15+3\\ 153\equiv 21\times 7+6\end{cases}$ أي $\begin{cases}153\equiv 13[15]\\ 153\equiv 6[7]\end{cases}$ ومنه 153 حل للجملة (S).

(2) إثبات أنَ: (x حل لـ (S)) يكافئ $\left(\begin{cases}x-x_0\equiv 0[15]\\ x-x_0\equiv 0[7]\end{cases}\right)$. حيث x_0 حلا لـ (S).

x_0 حلا لـ (S) معناه $\begin{cases}x_0\equiv 3[15]\\ x_0\equiv 6[7]\end{cases}$ و x حلا لـ معناه $\begin{cases}x\equiv 3[15]\\ x\equiv 6[7]\end{cases}$

ومنه (x حل لـ (S)) يكافئ $\begin{cases} x-x_0 \equiv 0[15] \\ x-x_0 \equiv 0[7] \end{cases}$

(3) حل الجملة (S) :

لدينا $\begin{cases} x-x_0 \equiv 0[15] \\ x-x_0 \equiv 0[7] \end{cases}$ معناه $(x-x_0)$ مضاعف مشترك لـ 15 و 7.

بما انَ 7 و 15 اوليان فيما بينهما فإنَ $(x-x_0)$ مضاعف مشترك لـ 15×7 أي $x-x_0 \equiv 0[15\times7]$

بما انَ 153 حل للجملة (S') فإنَ : $x-153 \equiv 0[105]$ إذن $x \equiv 153[105] \equiv 48[105]$

ومنه : $x = 48+105k$ حيث k عدد صحيح .

(4) – تحديد عدد الكتب

نفترض أنَ x هو عدد الكتب وبالتالي $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ إذن $x = 48+105k$ حيث $500 \le x \le 600$

إذن $500 \le 48+105k \le 600$ أي $\dfrac{500-48}{105} \le k \le \dfrac{600-48}{105}$ وبالتالي : $k=5$

ومنه عدد الكتب هو $x = 48+105\times5 = 573$.

التمرين(31) باك 2013تقني رياضي م 2

x و y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهولين $(x;y)$ التالية $11x+7y=1$.

1) أ) عين $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة (E) الذي يحقق $x_0+y_0=-1$.

ب) استنتج حلول المعادلة (E).

2) a و b عددان طبيعيان و S العدد الذي يحقق $\begin{cases} S=11a+1 \\ S=7b+2 \end{cases}$.

أ) بين ان الثنائية $(a;-b)$ حل للمعادلة (E) .

ب) ما هو باقي قسمة اقليدية للعدد S على 77 .

3) n عدد طبيعي باقي قسمته على 11 هو 1 و باقي قسمته على 7 هو 2 .

عين اكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n \prec 2013$.

حل التمرين(31) باك 2013 تقني رياضي م 2

(E) ..... $11x-7y=1$.

1) أ) تعيين $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة (E) الذي يحقق $x_0+y_0=-1$.

نحل الجملة $\begin{cases} 11x_0+7y_0=1 \\ x_0+y_0=-1 \end{cases}$ بالضرب بالعدد (-7) نجد $\begin{cases} 11x_0+7y_0=1 \\ -7x_0-7y_0=7 \end{cases}$.

بالجمع نجد $4x_0=8$ ومنه $x_0=2$ بالتعويض نجد $y_0=-3$.ومنه الثنائية $(2;-3)$ هي حل خاص للمعادلة (E) .

ب) استنتاج حلول المعادلة (E).

نحل الجملة $\begin{cases}11x+7y=1\\11(2)+7(-3)=1\end{cases}$.بالطرح نجد $11(x-2)+7(y+3)=0$

ومنه $11(x-2)=-7(y+3)$ و بالتالي $11(x-2)=7(-y-3)$.

لدينا 7 يقسم $11(x-2)$. والعدد 7 أولى مع العدد 11 ومنه حسب غوص فإن 7 يقسم $(x-2)$

ومنه يوجد عدد صحيح k بحيث $x-2=7k$ ومنه $x=7k+2$.

بالتعويض نجد $11(7k+2-2)=7(-y-3)$.ومنه $11k=(-y-3)$و بالتالي $y=-11k-3$.

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{(7k+2;-11k-3)_{k\in\mathbb{Z}}\}$.

2) a و b عددان طبيعيان و S العدد الذي يحقق $\begin{cases}S=11a+1\\S=7b+2\end{cases}$.

أ) تبيان ان الثنائية $(a;-b)$ حل للمعادلة (E) .

لدينا $\begin{cases}S=11a+1\\S=7b+2\end{cases}$ومنه $11a+1=7b+2$.و بالتالي $11a-7b=-1+2$.

ومنه $11(a)+7(-b)=1$.ومنه الثنائية $(a;-b)$ حل للمعادلة (E) .

ب) باقي القسمة الاقليدية للعدد S على 77 :

بما أن الثنائية $(a;-b)$ حل للمعادلة (E) فإن $\begin{cases}a=7k+2\\-b=-11k-3\end{cases}$.ومنه $\begin{cases}a=7k+2\\b=11k+3\end{cases}$.

و بما أن $S=11a+1$ ومنه كتابة العدد على النحو التالي $S=11(7k+2)+1$ ومنه $S=77k+24_{k\in\mathbb{N}}$.

و بما أن $S=77k+24_{k\in\mathbb{N}}$ إذن $S=24[77]$ ومنه باقي قسمة اقليدية للعدد S على 77 هو 24 .

3) باقي قسمة n على 11 هو 1 و باقي قسمته على 7 هو 2 :

– تعيين اكبر قيمة للعدد n بحيث : $n \prec 2013$.

بما أن باقي قسمته n على 11 هو 1 و باقي قسمته n على 7 هو 2 يعني $\begin{cases}n=11\alpha+1\\n=7\beta+2\end{cases}$.

و من السؤال السابق نستنتج ان $n=77k+24$.و منه $n\prec 2013$ يعني $77k+24\prec 2013$.

و بالتالي $77k\prec 1989$ اذن $k\prec \frac{1989}{77}$ و بالتالي $k\prec 25.83$ و بالتالي $k\le 25$.

اكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n\prec 2013$ من اجل $k=25$.

أي $n=77(25)+24$ ومنه $n=1949$.

التمرين(32) باك 2013 رياضي م 1

من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر العددين الطبيعيين $\alpha=2n^3-14n+2$ و $\beta=n+3$

(1) (أ) بين أن $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;10)$

(ب) ماهي القيم الممكنة لـ $PGCD(\alpha;\beta)$

(ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون $PGCD(\alpha;\beta)=5$

(2) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 11

(ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة : $\begin{cases}4^{5n}+4^n+n\equiv 0[11]\\ n\equiv 2[10]\end{cases}$

حلالتمرين(32) باك 2013 رياضي م 1

(1) (أ) تبيان ان $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;10)$

باجراء القسمة الاقليدية للعدد α على β نجد : $\alpha=\beta(2n^2-6n+4)-10$ وبوضع $q=2n^2-6n+4$

نجد: $\alpha=\beta\cdot q-10$

نضع $d=PGCD(\alpha;\beta)$ و. $PGCD(\beta;10)=d'$

لدينا $\alpha=\beta\cdot q-10$ ومنه $10=\beta q-\alpha$

ولدينا d يقسم β ومنه d يقسم βq و d يقسم α اذن d يقسم $\beta q-\alpha$ أي d يقسم 10

ومنه d قاسم مشترك للعددين β و10 وبالتالي d يقسم d'

ولدينا d' يقسم β ومنه d' يقسم βq ويقسم 10 اذن d' يقسم $\beta q-10$ أي d' يقسم α

وبالتالي d' قاسم مشترك للعددين αو β وبالتالي d' يقسم d

وبما ان d' يقسم d و d يقسم d' فان $d=d'$ ومنه $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;10)$

(ب)القيم الممكنة لـ $PGCD(\alpha;\beta)$

d يقسم فإنَ $d\in\{1,2,5,10\}$.

(ج) تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $PGCD(\alpha;\beta)=5$

$PGCD(\alpha;\beta)=5$ تعني $PGCD(\beta;10)=5$ إذن β مضاعف للعدد 5 وليس مضاعف للعدد 10 أي $\beta=5k$

و $k=2\lambda+1$ ومنه $\beta=5(2\lambda+1)$ معناه $\beta=10\lambda+5$ إذن $n+3=10\lambda+5$ أي $n=10\lambda+2$ مع $\lambda\in N$

(2) أ- دراسة ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11 .

$4^0\equiv 1[11]$ ، $4^1\equiv 4[11]$ ، $4^2\equiv 5[11]$ ، $4^3\equiv 9[11]$ ، $4^4\equiv 3[11]$ ، $4^5\equiv 1[11]$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي p ، $4^{5p}\equiv 1[11]$ ، $4^{5p+1}\equiv 4[11]$ ، $4^{5p+2}\equiv 5[11]$ ، $4^{5p+3}\equiv 9[11]$ ، $4^{5p+4}\equiv 3[11]$

ب- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة : $\begin{cases}4^{5n}+4^n+n\equiv 0[11]\\ n\equiv 2[10]\end{cases}$

معناه $\begin{cases} 4^{5n}+4^{n}+n\equiv 0[11] \\ n\equiv 2[10] \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 1+4^{10\lambda+2}+10\lambda+2\equiv 0[11] \\ n=10\lambda+2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4^{5\times 2\lambda+2}+10\lambda+3\equiv 0[11] \\ n=10\lambda+2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} 10\lambda\equiv -8[11] \\ n=10\lambda+2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} -\lambda\equiv -8[11] \\ n=10\lambda+2 \end{cases}$ ومعناه $\begin{cases} -\lambda\equiv 11\mu+8 \\ n=10\lambda+2 \end{cases}$ إذن $n=10(11\mu+8)+2$

أي $n=110\mu+82$ حيث μ عدد طبيعي.

التمرين(33) باك 2013 رياضي م 2

(1) أ- عيَن الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $2n+27\equiv 0[n+1]$.

ب- عيَن الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية ، حيث : $(b-a)(a+b)=24$

ج- استنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.

(2)- αو β عددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس خمسة على الشكل $\alpha=\overline{10141}$ و $\beta=\overline{3403}$

أ- أكتب العددين αو β في النظام العشري.

ب- عيَن الثنائية $(a;b)$ من الاعداد الطبيعية حيث : $\begin{cases} b^2-a^2=24 \\ \alpha a-\beta b=9 \end{cases}$

(3) أ- عيَن القاسم المشترك الأكبر للعدين 2013 و 1434، ثمَ استنتج القاسم المشترك الأكبر للعدين 671 و 478

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $2013x-1434y=27$.

حل التمرين(33) باك 2013 رياضي م 2

(1) أ- إيجاد الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $2n+27\equiv 0[n+1]$.

لدينا $2n+2\equiv 0[n+1]$ ومنه : $25\equiv 0[n+1]$ أي $n+1$من قواسم 25 ومنه قيم nهي : $n\in\{24;4;0\}$

ب- إيجاد الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق : $(b-a)(a+b)=24$

بما أنَ a و bعددان طبيعيان فإنَ $a+b\succ a-b$ و $(b-a)(b+a)=24$تكافئ الجمل التالية :

$$(1)\begin{cases} b+a=24 \\ b-a=1 \end{cases};(2)\begin{cases} b+a=12 \\ b-a=2 \end{cases};(3)\begin{cases} b+a=8 \\ b-a=3 \end{cases};(4)\begin{cases} b+a=6 \\ b-a=4 \end{cases}$$

الجملتان (2) و (4) فقط تقبلان حلا في مجموعة الأعداد الطبيعية

ومنه نستنتج الثنائيتين التي تحقق $(b-a)(a+b)=24$: $(a;b)\in\{(5;7);(1;5)\}$

ج- استنتاج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$:

لدينا $(b-a)(a+b)=24$تكافئ $b^2-a^2=24$ومنه يمكن رسم قطعة طولها $\sqrt{24}$وذلك برسم مثلث قائم طول وتره

إما 7 أو 5 وطول أحد ضلعيه القائمين هو 5 أو 1 على الترتيب (بالإستعانة بمبرهنة فيثاغورس)

حيث ينتج لدينا قطعة طولها 24 (طول ضلع القائم الثاني)

(2) أ- كتابة العددين αو βفي النظام العشري : $\alpha=671;\quad \beta=478$

ب- تعيين الثنائية $(a;b)$ من الاعداد الطبيعية حيث : $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$:

بالإستعانة بالجزء الأول نستنتج بكل سهولة الثنائية $(a;b)$ حيث : $(a;b) = (5;7)$

(3) أ- تعيين القاسم المشترك الأكبر للعدين 2013 و 1434، ثمَ استنتاج القاسم المشترك الأكبر للعدين 671 و 478

باستعمال خوارزمية إقليدس نجد $PGCD(2013;1434) = 3$

وبما أنَ ناتج قسمة كل من العددين 2013 و 1434 على 3 هو 671 و 478 على الترتيب فإنَ العددين 671 و 478 أوليين فيما بينهما أي $\begin{matrix} PGCD(2013;1434) = 3 \\ PGCD(671;478) = 1 \end{matrix}$ $PGCD(671;478) = 1$

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $2013x - 1434y = 27$.

المعادلة : $2013x - 1434y = 27$ تكافئ المعادلة : $671x - 478y = 9$ والتي نستنتج حلها الخاص من (2) ب- وهو $(5;7)$

$\begin{cases} 671x - 478y = 9.....(1) \\ 674(5) - 478(7) = 9....(2) \end{cases}$ بطرح (2) من (1) نجد $671(x-5) - 478(y-7) = 0$

ومنه $671(x-5) = 478(y-7)$

وعليه فإنَ 478 يقسم $678(x-5)$ وبما أنَ فإنَ العددين 671 و 478 اوليين فيما بينهما فإنه حسب مبرهنة غوص

478 يقسم $(x-5)$ أي $x = 478k + 5$ بالتعويض في (1) نجد : $y = 671k + 7$

$$\boxed{(x;y) = (478k+5; 671k+7); k \in \mathbb{Z}}$$

<u>**التمرين(34) باك 2014 رياضي م 1**</u>

(1) نعتبر المعادلة (E) : $2013x - 1962y = 54$ حيث x و y عددان صحيحان .

(أ) احسب $PGCD(2013,1962)$.

(ب) استنتج ان المعادلة (E) تقبل حلولا .

(ج) بين انه اذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فان : $x \equiv 0[6]$.

(د) استنتج حلا خاصا $(x_0;y_0)$ حيث $74 \prec x_0 \prec 80$ ثم حل المعادلة (E).

(2) نرمز بالرمز الى القاسم المشترك الاكبر للعددين x و y حيث $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة (E) .

(أ) ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

(ب) عين قيم العددين الطبيعيين a و b حيث $671a - 654b = 18$ و $PGCD(a,b) = 18$.

<u>**حل التمرين(34) باك 2014 رياضي م 1**</u>

(1) (E) : $2013x-1962y=54$ حيث x و y عددان صحيحان .

(أ) حساب $PGCD(2013,1962)$.

بما ان : $2013=1962\times1+51;1962=51\times38+24;51=24\times2+3;24=3\times8+0$.

فإن : $PGCD(2013;1962)=3$.

(ب) استنتاج ان المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$:

بما ان 54 يقبل القسمة على $PGCD(2013,1962)$ فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$.

(ج) تبيين انه اذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فان : $x\equiv0[6]$:

المعادلة (E) تكافئ : $671x-654y=18$.

$(x;y)$ حل للمعادلة (E) معناه $671x-654y=18$ ومنه $671x=654y+18$ أي $671x\equiv654y+18[6]$ و بما ان $671\equiv5[6]$ و $654\equiv0[6]$ و $18\equiv0[6]$ فإن $5x\equiv0[6]$ و بما ان 5 و 6 اوليان فيما بينهما فان $x\equiv0[6]$.

(د) استنتاج الحل الخاص $(x_0;y_0)$ و حل المعادلة (E) :

بما ان $74\prec x_0\prec80$ و $x\equiv0[6]$ فإن $x_0=78$ و بالتعويض في المعادلة (E) نجد $y_0=80$ أي الحل الخاص المطلوب هو $(x_0;y_0)=(78;80)$.

حل المعادلة (E) :

لدينا $\begin{cases}671x-654=18\\671(78)-654(80)=18\end{cases}$ و بالطرح : نجد $671(x-78)=654(y-80)$ ومنه 654 يقسم $671(x-78)$ لكن 671 و 654 اوليان فيما بينهما و منه حسب غوص 654 يقسم $(x-78)$ أي $x=654k+78$ و بالتعويض في (E) نجد $y=671k+80$

2) أ) القيم الممكنة لـ d :

$(x;y)$ حل للمعادلة (E) معناه $671x-654y=18$ و منه القيم الممكنة لـ d هو قواسم العدد 18 أي :

ب) تعيين العددين الطبيعيين a و b :

لدينا $671a-654b=18$ و منه $(a;b)$ هي من شكل حلول المعادلة (E) أي $a=654k$ و $b=671k+80$ و لدينا أيضا $PGCD(a;b)=18$ ومنه :

$$\begin{cases}a\equiv0[18]\\b\equiv0[18]\end{cases} \text{ أي } \begin{cases}654k+78\equiv0[18]\\671k+80\equiv0[18]\end{cases} \text{ و بما ان } \begin{cases}654\equiv6[18]\\78\equiv6[18]\\671\equiv5[18]\\80\equiv8[18]\end{cases} \text{ فإن } \begin{cases}6k+6\equiv0[18]....e_1\\5k+8\equiv0[18].....e_2\end{cases}$$

$e_1+(-1)\times e_2:k-2\equiv0[18]$ ومنه $k\equiv2[18]$ أي $k=18\alpha+2$ حيث α عدد طبيعي و منه

$$a=654(18\alpha+2)+78=11772\alpha+1386$$

$$b=671(18\alpha+2)+80=12078\alpha+1422$$

التمرين(35) باك 2014 تقني رياضي م 2

n و p عددان طبيعيان

(1) ادرس حسب قيم n بواقي القسمة الاقليدية على 16 للعدد 5^n

(2) نضع : $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$

(أ) بين انه اذا كان $p = 4k + 2$ حيث k عدد طبيعي فانه يوجد عدد طبيعي n يحقق : $C_n = D_p$

(ب) عين n من اجل $p = 6$

(3) f هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = 5^{(4x+2)} - 9$

ادرس تغيرات الدالة f ثم استنتج إشارة $f(x)$

(4) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 1$ ومن اجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = 5^4\left(u_n + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16}$

(أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{5^{(4n+2)} - 9}{16}$

(ب) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n فان u_n عدد طبيعي

(5) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

حل التمرين(35) باك 2014 تقني رياضي م 2

(1) دراسة بواقي القسمة الاقليدية على 16 للعدد 5^n :

$5^0 \equiv 1[16]$ و $5^1 \equiv 5[16]$ و $5^2 \equiv 9[16]$ و $5^3 \equiv 13[16]$ و $5^4 \equiv 1[16]$

ومنه بواقي القسمة هي كما يلي :

قيم n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
الباقي	1	5	9	13

(2): $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$

(أ) تبيان $C_n = D_p$ اذا كان $p = 4k + 2$

من اجل $p = 4k + 2$ فان $5^p = 5^{4k+2} \equiv 9[16]$ اي $16n + 9 \equiv 9[16]$ اي $5^p = 16n + 9$ ومنه يوجد عدد طبيعي n يحقق : $C_n = D_p$

(ب) تعيين n : من اجل $p = 6$ فان $C_n = D_6$ ومنه $5^6 = 16n + 9$ اي $16n = 15616$ ومنه $n = 976$

(3) $f(x) = 5^{(4x+2)} - 9$ ومعرفة على $]0;+\infty[$

دراسة تغيرات f :

$f(x) = 5^{(4x+2)} - 9 = e^{(4x+2)\ln 5} - 9$

f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا : $f'(x) = 4\ln 5 . e^{(4x+2)\ln 5}$ ونلاحظ انه من اجل كل x من $]0;+\infty[$

فان $f'(x) \succ 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 5^{(4x+2)} - 9 = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{(4x+2)\ln 5} - 9 = +\infty$ و $f(0) = 16$

جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$16 \nearrow$	$+\infty$

- استنتاج إشارة $f(x)$: من اجل كل x من $[0;+\infty[$ فان : $f(x)\succ 0$

(4) (u_n) معرفة بـ : $u_0=1$ و : $u_{n+1}=5^4\left(u_n+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{16}$

(أ) البرهان بالتراجع ان: $u_n=\frac{5^{(4n+2)}-9}{16}$

من اجل $n=0$ لدينا : $1=\frac{5^2-9}{16}=\frac{5^{(4(0)+2)}-9}{16}=u_0$ محققة

نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$ اي نبرهن ان :

$$u_{n+1}=\frac{5^{(4(n+1)+2)}-9}{16}=\frac{5^{4n+6}-9}{16}$$

لدينا $u_{n+1}=5^4\left(u_n+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{16}$ ومن الفرض $u_n=\frac{5^{(4n+2)}-9}{16}$ نجد :

$u_{n+1}=5^4\left(\frac{5^{(4n+2)}-9}{16}+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{16}$ ومنه $u_{n+1}=5^4\left(\frac{5^{(4n+2)}}{16}-\frac{9}{16}+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{16}$ اي ان

$u_{n+1}=5^4\times\frac{5^{(4n+2)}}{16}-\frac{9}{16}$ اذن $u_{n+1}=\frac{5^{4n+6}}{16}-\frac{9}{16}$ وبالتالي $u_{n+1}=\frac{5^{4n+6}-9}{16}$ اذن محققة

اذن من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n=\frac{5^{(4n+2)}-9}{16}$

(ب) برهان ان u_n عدد طبيعي :

لدينا من دراسة بواقي القسمة انه اجل كل عدد طبيعي n : $5^{4n+2}\equiv 9[16]$ ومنه $5^{4n+2}-9\equiv 0[16]$

ومنه $\left(5^{4n+2}-9\right)$ مضاعف للعدد 16 وبالتالي : $\frac{\left(5^{4n+2}-9\right)}{16}$ عدد طبيعي اذن من اجل كل n فان u_n طبيعي

(5) استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا من الأسئلة السابقة: $f(x)=5^{(4x+2)}-9=e^{(4x+2)\ln 5}-9$ ومنه $f(n)=5^{4n+2}-9$

ولدينا : $u_n=\frac{5^{4n+2}-9}{16}$ وبالتالي : $u_n=\frac{1}{16}f(n)$ وبما ان الدالة f متزايدة على $[0;+\infty[$ و $\frac{1}{16}\succ 0$

فان (u_n) متزايدة

التمرين(36) باك 2015 تقني رياضي م 1

(1) أ- عيَن ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13 .

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $42\times 138^{2015}+2014^{2037}-3$ على 13 .

(2) أ- بيَن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+6)8^{2n}[13]$

ب- عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $(5n+1)\times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13]$

حل التمرين(36) باك 2015 تقني رياضي م 1

(1) أ- تعيين ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13 .

لدينا $8^0 \equiv 1[13]$ ، $8^1 \equiv 8[13]$ ، $8^2 \equiv 12[13]$ ومنه $8^2 \equiv -1[13]$ أي $8^4 \equiv 1[13]$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي p ، $8^{4p} \equiv 1[13]$ ، $8^{4p+1} \equiv 8[13]$ ، $8^{4p+2} \equiv 12[13]$ ، $8^{4p+3} \equiv 5[13]$

n	$4p$	$4p+1$	$4p+2$	$4p+3$
باقي قسمة 8^n على 13	1	8	12	5

ب- استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $42\times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3$ على 13 :

لدينا $42 \equiv 3[13]$ و $138 \equiv 8[13]$ ومنه $138^{2015} \equiv 8^{2015}[13]$ أي $138^{2015} \equiv 8^{4\times 503+3}[13]$

ولدينا $8^{4p+3} \equiv 5[13]$ إذن $138^{2015} \equiv 5[13]$ وعليه $42\times 138^{2015} \equiv 3\times 5[13]$ أي $42\times 138^{2015} \equiv 2[13]$

و $2014 \equiv 12[13]$ أي $2014 \equiv -1[13]$ ومنه $2014^{2037} \equiv (-1)^{2037}[13]$ وعليه $2014^{2037} \equiv -1[13]$

أي $2014^{2037} \equiv 12[13]$ إذن $42\times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3 \equiv 2+12-3[13]$

أي $42\times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3 \equiv 11[13]$

(2) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $(5n+1)\times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)8^{2n}[13]$

لدينا $5+8 \equiv 0[13]$ معناه $5 \equiv -8[13]$ ومنه $5^{2n} \equiv (-8)^{2n}[13]$ أي $5^{2n} \equiv 8^{2n}[13]$ و $5^{2n} \equiv -5[13]$

وعليه $5^{2n}\times 5^3 \equiv -5\times 8^{2n}[13]$ أي $5^{2n+3} \equiv -5\times 8^{2n}[13]$ معناه $-5^{2n+3} \equiv -5\times 8^{2n}[13]$

يكافئ $(5n+1)\times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+1)64^n + 5\times 8^{2n}[13]$

ويكافئ $(5n+1)\times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+1)8^{2n} + 5\times 8^{2n}[13]$

أي $(5n+1)\times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)8^{2n}[13]$

ب- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $(5n+1)\times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13]$

$(5n+1)\times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13]$ معناه $(5n+1)8^n \equiv 0[13]$ وبما انّ 8 و 13 اوليان فيما بينهما فإنّ 8^{2n} و13 اوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص $5n+6 \equiv 0[13]$ يكافئ $5n \equiv -6[13]$ يكافئ $5n \equiv 20[13]$ أي $n \equiv 4[13]$

إذن $n = 13m+4$

التمرين(37) باك 2015 رياضي م 1

(1) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7

(ب) استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد : $\left(2015^{53}+1962^{1954}-1954^{1962}\right)$ على 7

(2) (أ) بين ان 89 اولي

(ب) عين كل القواسم الطبيعية للعدد 7832

(ج) بين ان العددين 981 و 977 اوليان فيما بينهما

(3) x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسمهما المشترك الاكبر هو 2

عين x و y علما ان : $\begin{cases} x^2-y^2=31328 \\ x-y\equiv 8[22] \end{cases}$

(4) a و b و c اعداد طبيعية غير معدومة حيث a اولي مع b و a اولي مع c

(أ) باستعمال مبرهنة بيزو برهن ان a اولي مع $b\times c$

(ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان : $PGCD\left(a;b^n\right)=1$

(ج) استنتج القاسم المشترك الاكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962}

<u>حل التمرين(37) باك 2015 رياضي م 1</u>

(1) (أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7 :

$2^0\equiv 1[7]$ و $2^1\equiv 2[7]$ و $2^2\equiv 4[7]$ و $2^3\equiv 1[7]$ ومنه الدور 3

ومنه $2^{3k}\equiv 1[7]$ و $2^{3k+1}\equiv 2[7]$ و $2^{3k+2}\equiv 4[7]$ ومنه البواقي هي : 1 و 2 و 4

(ب) استنتاج باقي القسمة الاقليدية للعدد : $\left(2015^{53}+1962^{1954}-1954^{1962}\right)$ على 7:

لدينا $1962\equiv 2[7]$ ومنه $1962^{1954}\equiv 2^{1954}[7]$ ولدينا $1954=3\times 651+1$ ومنه $2^{1954}\equiv 2[7]$ اذن $1962^{1954}\equiv 2[7]$

ولدينا : $1954\equiv 1[7]$ ومنه $1954^{1962}\equiv 1[7]$ ولدينا أيضا $2015+1\equiv 0[7]$ وهذا معناه $2015\equiv -1[7]$ومنه $2015^{53}\equiv -1[7]$ وبالجمع نجد :

$\left(2015^{53}+1962^{1954}-1954^{1962}\right)\equiv 2-1-1\equiv 0[7]$ أي ان $\left(2015^{53}+1962^{1954}-1954^{1962}\right)$ يقبل القسمة على 7

(2) (أ) تبيان ان 89 اولي

العدد 89 لا يقبل القسمة على 2 ولا على 3 ولا على 5 ولا على 7 و $\sqrt{89}\prec 11$ ومنه 89 عدد اولي

(ب) تعيين القواسم الطبيعية للعدد 7832 : تحليله هو : $7832=2^3\times 11\times 89$ ومنه عدد قواسم العدد 7832 هو $(3+1)\times(1+1)(1+1)$ أي 16 قاسما وهي :

$D_{7832}=\{1;2;3;4;8;11;22;44;88;89;178;356;712;979;1958;3916;7832\}$

(ج) تبيان ان 981 و 977 اوليان فيما بينهما : ليكن d هو القاسم المشترك الاكبر لهما ومنه d يقسم 981 و يقسم 977 وبالتالي فان d لقسم فرقهما أي : 4 ومنه $d \in \{1;2;4\}$ وبما ان العددين 981 و 977 فرديان فان $d=1$ اذن فهما اوليان فيما بينهما

(3) $PGCD(x;y)=2$

تعيين x و y علما ان : $\begin{cases} x^2-y^2=31328 \\ x-y\equiv 8[22] \end{cases}$: نضع $x=2x'$ و $y=2y'$ حيث x' و y' اوليان فيما بينهما وبالتعويض في الجملة نجد : $\begin{cases} 4x'^2-4y'^2=31328 \\ 2x'-2y'\equiv 8[22] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x'^2-y'^2=7832 \\ x'-y'\equiv 4[11] \end{cases}$ أي

$\begin{cases} (x'-y')(x'+y')=7832 \\ x'-y'\equiv 4[11] \end{cases}$ وبما ان العددين x' و y' طبيعيان فان $x'-y' \prec x'+y'$

ولدينا أيضا $x'+y'$ قاسم للعدد 7832 و $x'-y'$ قاسم للعدد 7832

$x'+y'$	7832	3916	1958	979	712	356	178	89	
$x'-y'$	1	2	4	8	11	22	44	88	
$x'-y'\equiv ...$	1	2	4	8	0	0	0	0	$[11]$

ومن الجدول نجد ان :

$x'+y'=1958$ و $x'-y'=4$ وبجمع المعدلتين نجد : $2x'=1962$ أي $x=1962$

وبالتعويض نجد $2y'=1954$ أي $y=1954$

(4) (أ) باستعمال مبرهنة بيزو نبرهن ان a اولي مع $b\times c$ حيث a اولي مع b و a اولي مع c

a اولي مع b معناه يوجد عددان صحيحان α و β حيث : $\alpha\cdot a+\beta\cdot b=1$

و a اولي مع c معناه يوجد عددان صحيحان α' و β' حيث $\alpha'\cdot a+\beta'\cdot c=1$

ومنه $(\alpha\cdot a+\beta\cdot b)(\alpha'\cdot a+\beta'\cdot c)=1$ وهذا يعني: $\alpha\alpha'a^2+\alpha\beta'ac+\beta\alpha'ab+\beta\beta'bc=1$

أي : $(\alpha\alpha'a+\alpha\beta'c+\beta\alpha'b)a+(\beta\beta')bc=1$ اذن يوجد عددان صحيحان u و v بحيث :

$u\cdot a+v\cdot bc=1$ وحسب مبرهنة بيزو فان العدد a اولي مع bc

(ب) اثبات بالتراجع ان من اجل n غير معدوم : $PGCD(a;b^n)=1$:

من اجل $n=1$: $PGCD(a;b^1)=PGCD(a;b)=1$ و منه الخاصية محققة من اجل $n=1$

نفرض ان $PGCD(a;b^n)=1$ و نبرهن ان $PGCD(a;b^{n+1})=1$ أي نفرض ان a اولي مع b^n ونبرهن ان a اولي مع b^{n+1} .

a اولي مع b^n و لدينا a اولي مع b اذن حسب السؤال السابق a اولي مع $b\times b^n$ أي a اولي مع b^{n+1}ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $PGCD(a;b^n)=1$.

(ج) استنتاج القاسم المشترك الاكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962}

لدينا $1954=2\times977$ ومنه $1954^{1962}=2^{1962}\times977^{1962}=2^{1954}\times2^{8}\times977^{1962}$ و $1962=2\times981$

ومنه $1962^{1954}=2^{1954}\times981^{1954}$ و عليه :

$PGCD\left(1954^{1962};1962^{1954}\right)=PGCD\left(2^{1954}\times2^{8}\times977^{1962};2^{1954}\times981^{1954}\right)=2^{1954}PGCD\left(2^{8}\times977^{1962};981^{1954}\right)$

لدينا $PGCD(977;981)=1$ ومنه $PGCD\left(977^{1962};981^{1954}\right)=1$ و كذلك $PGCD(2;981)=1$ ومنه

$PGCD\left(2^{8};981^{1954}\right)=1$ اذن 981^{1954} اولي مع 977^{1962} و 981^{1954} اولي مع 2^{8} و بالتالي 981^{1954} اولي مع

$2^{8}\times977^{1962}$ أي $PGCD\left(2^{8}\times977^{1962};981^{1954}\right)=1$ و عليه $PGCD\left(1954^{1962};1962^{1954}\right)=2^{1954}$.

التمرين(38) باك تقني رياضي 2016 م1

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $6x-7y=19$ حيث x و y عددان صحيحان .

1) جد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) بحيث $x_0=y_0$ ، ثمَ حل المعادلة (E).

2) استنتج قيم العدد الصحيح λ والتي تحقَق : $\begin{cases}\lambda\equiv24[7]\\\lambda\equiv5[6]\end{cases}$ ، ثمَ عيَن باقي قسمة العدد λ على 42.

3) عيَن جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث : $|x+y-1|\le13$.

4) أ- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .

ب- عيَن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقَق الجملة : $\begin{cases}n-5^n\equiv2020[7]\\n\equiv1437[6]\end{cases}$.

حل التمرين(38) باك تقني رياضي 2016 م1

المعادلة (E) ذات مجهول $(x;y)$ ومعرفة بـ: $6x-7y=19$

1) ايجاد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ حيث $x_0=y_0$: بالتعويض في المعادلة نجد $6x_0-7x_0=19$ ومنه $x_0=-19$

نجد $6y_0-7y_0=19$ ومنه $y_0=-19$ومنه الحل الخاص هو $(x_0;y_0)=(-19;-19)$

حل المعادلة (E) لدينا : $\begin{cases}6x-7y=19...\ (1)\\6x_0-7y_0=19...\ (2)\end{cases}$ بطرح (2) من (1) نجد $6(x-x_0)=7(y-y_0)$

لدينا 7 و 6 أوليان فيما بينهما ومنه 6 يقسم $7(y-y_0)$ وبما ان 6 و 7 اوليان فيما بينهما إذن 6 يقسم $y-y_0$

اي ان $(y-y_0)=6k$ ومنه $y=6k+y_0$ نجد إذن $y=6k-19$ حيث $k\in Z$

لدينا 7 و 6 اوليان فيما بينهما ومنه 7 يقسم $6(x-x_0)$ إذن $(x-x_0)=7k$ ومنه نجد $x=7k-19$

ومنه حلول المعادلة (E) هي $(x;y)=(7k-19;6k-19)$ حيث $k\in Z$

2) استنتاج قيم λ حيث $\begin{cases}\lambda \equiv 24[7] \\ \lambda \equiv 5[6]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\lambda = 7y+24... & (3) \\ \lambda = 6x+5..... & (4)\end{cases}$

حيث $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ بطرح (3) من (4) نجد : $6x-7y=19..\quad (E)$

بما أنَ حل المعادلة (E) هو $(x;y)=(7k-19;6k-19)$

فإنَ $\begin{cases}\lambda = 7(6k-19)+24 \\ \lambda = 6(7k-19)+5\end{cases}$ ومنه $\lambda = 42k-109$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

– تعيين باقي قسمة λ على 42

لدينا $\lambda = 42k-109$ ومنه $\lambda \equiv -109[42]$ ونعلم $-109=-3\times 42+17$ أي $-109 \equiv 17[42]$

إذن $\lambda \equiv 17[42]$ اذن باقي قسمة λ على 42 هو $r=17$

3) تعيين جميع الثنائيات $(x;y)$ حيث $|x+y-1| \le 13$

لدينا $(x;y)=(7k-19;6k-19)$ ومنه $|7k-19+6k-19-1| \le 13$

يكافئ $|13k-39| \le 13$ اي $|13(k-3)| \le 13$ يكافئ $|k-3| \le 1$ ومنه $-1 \le k-3 \le 1$

أي أنَ $2 \le k \le 4$. قيمه هي : 2 و 3 و 4

من أجل k يأخذ القيم 4 ;3 ;2 نعوض في الثنائية $(x;y)=(7k-19;6k-19)$ نجد :

$(x;y) \in \{(-5;-7);(2;-1);(9;5)\}$

(4) بواقي قسمة 5^n على 7 حيث n عدد طبيعي و r هو الباقي

n	0	1	2	3	4	5	6
r	1	5	4	6	2	3	1

بواقي القسمة دورية و دورها 6 ونكتب $5^6 \equiv 1[7]$ ومنه $(5^6)^k \equiv 1[7]$ ومنه $5^{6k} \equiv 1[7]$

إذن بواقي 5^n على 7 حيث n عدد طبيعي هي كما يلي

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
r	1	5	4	6	2	3

ب) تعيين قيم n العدد الطبيعي التي تحقق $\begin{cases}n-5^n \equiv 2020[7] \\ n \equiv 1437[6]\end{cases}$

لدينا $\begin{cases}2020 \equiv 4[7] \\ 1437 \equiv 3[6]\end{cases}$ إذن $\begin{cases}n-5^n \equiv 4[7] \\ n \equiv 3[6]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}-n+5^n \equiv 3[7] \\ n = 6k+3\end{cases}$ نجد $\begin{cases}5^n \equiv n+3[7] \\ n = 6k+3\end{cases}$

ومنه $5^{6k+3} \equiv 6k+6[7]$ ولدينا $5^{6k+3} \equiv 6[7]$ ومنه $6 \equiv 6k+6[7]$

اي ان $6k+6 \equiv 6[7]$ أي أنَ $6k=7k'$ حيث $k;k' \in \mathbb{N};\mathbb{N}$ وبما ان 6 و 7 اوليان فيما بينهما فان 6 يقسم k'

اي $k'=6t$ وبما ان $n=6k+3$ فان $n=42t+3$ حيث $t \in \mathbb{N}$

التمرين(39) باك 2016 رياضي م 1

(u_n)متتالية هندسية متزايدة تماما , حدودها موجبة تماما , حدها الأول u_0وأساسها qحيث :

$$\begin{cases} \ln(u_1)+\ln(u_2)=11 \\ u_1+u_2=e^4\left(1+e^3\right) \end{cases}$$

1) احسب u_1 و u_2 ثم استنتج قيمة الأساس q .

2) نضع : $u_1=e^4$ و $q=e^3$.

أ) عبَر عن u_n بدلالة n.

ب) نضع : $S_n=\ln(u_0)+\ln(u_1)+\ln(u_2)+...+\ln(u_n)$. أحسب S_n بدلالة n .

3)من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $a_n=n+3$

أ)بيَن أن : $PGCD(2S_n,a_n)=PGCD(a_n,14)$

ب)عيَن القيم الممكنة ل : $PGCD=(2S_n,a_n)$

ج) عيَن قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها : $PGCD(2S_n,a_n)=7$

4)ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

5)نضع : $b_n=3na_n-2S_n+1437^{2016}+1$

عيَن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $\begin{cases} b_n\equiv 0[7] \\ n\equiv 0[5] \end{cases}$

6)بيَن أنَه من أجل كل عدد طبيعي n, العدد $\left(52+3\times 4^{12n+1}-1437^{9n+1}\right)$ يقبل القسمة على 7

حل التمرين(39) باك 2016 رياضي م 1

(u_n) متتالية هندسية موجبة تماما و متزايدة تماما . حدها الأول u_0و أساسها q

1) أ) حساب u_1 و u_2 .

$$\begin{cases} \ln u_1+\ln u_2=11 \\ u_1+u_2=e^4\left(1+e^3\right) \end{cases}\dots(\mathrm{I}) \quad \text{تكافئ} \quad (\mathrm{I})\Leftrightarrow\begin{cases} \ln(u_1\times u_2)=11 \\ u_1+u_2=e^4\left(1+e^3\right) \end{cases} \quad \text{اي} \quad \begin{cases} u_1\times u_2=e^{11} \\ u_1+u_2=e^4\left(1+e^3\right) \end{cases}$$

u_1 وu_2 هما حليَ المعادلة : $x^2-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ اي ان $(1)\quad x^2-e^4\left(1+e^3\right)x+e^{11}=0$

$$\Delta=b^2-4ac=e^8\left(1+e^3\right)^2-4e^{11}=e^8\left[\left(1+e^3\right)^2-4e^3\right]=e^8\left(e^6-2e^3+1\right)$$

ومنه : $\Delta=e^8\left(e^3-1\right)^2=\boxed{\left[e^4\left(e^3-1\right)\right]^2}$.

بما أنَ $\Delta\rangle 0$فإنَ للمعادلة (1)حلين متمايزين هما :

$$x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{e^4\left(1+e^3\right)-e^4\left(e^3-1\right)}{2} = e^4 \quad \text{و} \quad x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{e^4\left(1+e^3\right)+e^4\left(e^3-1\right)}{2} = e^7$$

ومنه حلول الجملة (II) هي الثنائيات (u_1,u_2) حيث : $(u_1,u_2) \in \left\{\left(e^4,e^7\right),\left(e^7,e^4\right)\right\}$

و بما أنَ (u_n) متزايدة تماما فإنَ : $(u_1,u_2) = \left(e^4,e^7\right)$.

2) (أ) حساب q : $q = \frac{u_2}{u_1} = e^3$.

كتابة u_n بدلالة n :

لدينا : $u_1 = e^4$ و $q = e^3$. ومنه $u_n = u_1.\mathrm{q}^{n-1} = e^4.e^{3n-3}$ اذن $u_n = e^{3n+1}$

ب) حساب المجموع: $S_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \ln u_2 + ... + \ln u_n$

S_n هو مجموع $(n+1)$ حدا لمتتالية عددية

و لدينا : $u_n = e^{3n+1}$ ومنه $\ln u_n = 3n+1$ و منه المتتالية (v_n) : $v_n = \ln u_n = 3n+1$

(v_n) هي متتالية حسابية أساسها $r = 3$ و حدها الأول : $v_0 = 1$.

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n = \frac{n+1}{2}\left(v_0 + v_n\right) = \frac{n+1}{2}(1+3n+1)$$

ومنه : $S_n = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$.

3) الفرض : $a_n = n+3$.

أ) إثبات أنَ : $PGCD(2S_n;a_n) = PGCD(a_n;14)$

لدينا : $2S_n = 3n^2 + 5n + 2$.

بالقسمة الإقليدية لـ $2S_n$ على a_n نجد : $\underline{\underline{2S_n}} = (3n-4)\underline{\underline{a_n}} + \underline{\underline{14}}$

حسب خوارزمية إقليدس ينتج أنَ : $PGCD(2S_n;a_n) = PGCD(a_n;14)$

ب) القيم الممكنة لـ d : $d = PGCD(2S_n;a_n)$

$$PGCD(2S_n;a_n) = PGCD(a_n;14) = d$$

$d/14$ و d/a_n ومنه $d \in \{1;2;7;14\}$ وهي القيم لممكنة لـ d .

ج) تعيين قيم n التي من أجلها يكون : $PGCD(2S_n;a_n) = 7$.اي $PGCD(a_n;14) = d$ معناه

$PGCD(n+3;14) = 7$ ومنه $S_n \equiv 0[7]$ او $a_n \equiv 0[7]$ اي $n+3 \equiv 0[7]$ ومنه $n \equiv -3[7]$

ومنه $n \equiv 4[7]$ وبالتالي قيم n هي : $n = 7k+4$ حيث k عدد طبيعي

4) دراسة بواقي قسمة 2^n على 7 .

$$2^0 \equiv 1[7] \quad ;2^1 \equiv 2[7] \quad ;2^2 \equiv 4[7]; \quad 2^3 \equiv 1[7]$$

نستنتج أنَ بواقي قسمة 2^n على 7 تشكّل حدودا لمتتالية دورية و دورها 3 .

التعميم: من أجل كل κ من $\mathbb{N}$: $2^{3\kappa+a} \equiv 2^a[7] : a \in \{0;1;2\}$

5) $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$ المطلوب : تعيين قيم n : (1)...... $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$

مع: $1437 = 7\times 205 + 2$ و $\kappa = 672$ $2016 = 3\times 672$ و $2^{3k} \equiv 1[7]$

ومنه $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3n^2 + 9n - 3n^2 - 5n - 2 + 2^{3\kappa} + 1 \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} 4n - 2 + 2 \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 4n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$ ومنه نجد $\begin{cases} n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \\ PGCD(7;5) = 1 \end{cases}$ وبالتالي $n \equiv 0[7\times 5]$

و منه : $n \equiv 0[35]$ أي : $\boxed{n = 35\lambda : \lambda \in \mathbb{N}}$

(6) إثبات أنه من أجل كل n من N : $1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]$

لدينا $1437^{9n+1} \equiv 2^{3(3n)+1}[7]$ ومنه $1437^{9n+1} \equiv 2[7]$

$1437^{9n+1} \equiv 2[7]...$ (1

$4^{12n+1} \equiv 2^{24n+2}[7]$ ومنه $4^{12n+1} \equiv 2^{3(8n)+2}[7]$

ومنه: $4^{12n+1} \equiv 4[7]....$ (2 و $52 \equiv 3[7]....$ (3

من 1 و2 و3 ينتج أنَ : $1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52 \equiv 2 - 3\times 4 + 3[7] \equiv -7[7]$

إذن : $1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]$

التمرين(40) باك 2016 رياضي م 2

1)أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n, بواقي القسمة الاقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n, العدد $2\times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11 .

2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $7x - 3y = 8$, حيث x و y عددان طبيعيان .

أ) حلَ المعادلة (E).

ب) d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E).

– ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

– عيَن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$.

ج) جد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق : $2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0[11]$

حل التمرين(40) باك 2016 رياضي م 2

1) أ) بواقي قسمة 3^n على 11 حيث n عدد طبيعي

n	0	1	2	3	4	5
r	1	3	9	5	4	1

عملية القسمة دورية دورها5 و نكتب $3^{5k} \equiv 1[11]$

إذن بواقي قسمة 3^n على 11 حيث n عدد طبيعي كما يلي :

n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
r	1	3	9	5	4

بواقي قسمة 7^n على 11 حيث n عدد طبيعي

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8	1

عملية القسمة دورية دورها 10 و نكتب $7^{10k} \equiv 1[11]$

إذن بواقي قسمة 7^n على 11 حيث n عدد طبيعي كما يلي:

$n=10k+m$	$m=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8

ب) اثبات أنه من أجل كل n عدد طبيعي : $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4} \equiv 0[11]$.

لدينا : $2016 \equiv 3[11]$ ومنه $2016^{5n+4} \equiv 3^{5n+4}[11]$ ومنه $2016^{5n+4} \equiv 4[11]$.

لدينا : $1437 \equiv 7[11]$ ومنه $1437^{10n+4} \equiv 7^{10n+4}[11]$ ومنه $1437^{10n+4} \equiv 3[11]$.

ومنه $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4} \equiv 2\times 4+3[11]$.

أي $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4} \equiv 11[11]$. ومنه $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4} \equiv 0[11]$.

2) المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ حيث : $7x-3y=8$.

أ) ايجاد الحل الخاص $(x_0;y_0)$: نلاحظ أنَ $(2;2)$ حل خاص لان $7(2)-3(2)=14-6=8$.

ومنه $(x_0;y_0)=(2;2)$ حل خاص للمعادلة (E) .

حل المعادلة (E) لدينا : $\begin{cases} 7x-3y=8....(1) \\ 7x_0-3x_0=8....(2) \end{cases}$ بطرح (2) من (1) نجد $7(x-x_0)=3(y-y_0)$.

لدينا 7 و 3 اوليان فيما بينهما ومنه 7 يقسم $3(y-y_0)$ إذن $(y-y_0)=7k$ ومنه $y=7k+y_0$

نجد إذن $y=7k+2$.

لدينا7 و 3 اوليان فيما بينهما ومنه3 يقسم $7(x-x_0)$ إذن $(x-x_0)=3k$ ومنه $x=3k+x_0$ نجد إذن $x=3k+2$

ومنه حلول المعادلة (E) هي $(x;y)=(3k+2;7k+2)$ و $k \in \mathbb{N}$

ب) $PGCD(x;y)=d$ حيث الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E)

– تعيين القيم الممكنة لـ d

$PGCD(x;y)=d$ أي $PGCD(7k+2;3k+2)=d$.

حسب خوارزمية إقليدس

$$7k+2=2(3k+2)+(k-2) \quad \begin{array}{|l|}\hline 3k+2 \\ 2 \\ \hline\end{array} \begin{array}{|l|}\hline 7k+2 \\ 6k+4 \\ k-2 \\ \hline\end{array}$$

ومنه $$PGCD(3k+2;k-2)=d \quad \begin{array}{|l|}\hline k-2 \\ 3 \\ \hline\end{array} \begin{array}{|l|}\hline 3k+2 \\ 3k-6 \\ 8 \\ \hline\end{array}$$

يعني $3k+2=3(k-2)+8$ ومنه $PGCD(k-2;8)=d$

بما أنَ $d/8$ و $d/k-2$ فإنَ $d/4(k-2)+1\times 8$ ومنه $d/4k$ إذن $d/4$ ومنه $PGCD(k-2;8)=d$

قيم d هي قواسم 4 ومنه $d\in\{1,2,4\}$

–تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث $d=4$

لدينا $PGCD(k-2;8)=4$ ومنه بوضع $k-2=4t$

يكون $PGCD(4t;8)=4PGCD(t;2)=4$ ومنه $PGCD(t;2)=1$

أي أنَ 2 و t أوليان فيما بينهما ومنه $t=2\alpha+1$

ومنه $k=4t+2$ أي أنَ $k=8\alpha+6$ حلول المعادلة هي $(3k+2;7k+2)$ اذن الحلول

$\{(x;y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}/(24\alpha+20;56\alpha+44)/\alpha\in\mathbb{N}\}$ هي حلول المعادلة (E) حيث $d=4$

ج) تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث $2016^{7x}+1437^{3y}\equiv 0[11]$

ومنه $\{(x;y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}/(3k+2;7k+2)/k\in\mathbb{N}$

لدينا $2016\equiv 3[11]$ ومنه $2016^{7x}\equiv 3^{7x}[11]$

لدينا $1437\equiv 7[11]$ ومنه $1437^{3y}\equiv 7^{3y}[11]$

أي أنَ $2016^{7x}+1437^{3y}\equiv 0[11]$ يكافئ $3^{21k+14}+7^{21k+6}\equiv 0[11]$

ومنه $3^{4(5k+3)+k+2}+7^{2(10k+3)+k}\equiv 0[11]$

تكافئ $3^{4(5k+3)}\times 3^{k+2}+7^{2(10k+3)}\times 7^{k}\equiv 0[11]$ ومنه $4\times 3^{k}+4\times 7^{k}\equiv 0[11]$

ومنه $4(3^{k}+7^{k})\equiv 0[11]$ ومنه $(3^{k}+7^{k})\equiv 0[11]$

أي البواقي التي مجموعها مضاعف 11 هي مع نفس الترتيب

n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	$5k+5$

r	1	3	9	5	4	1

$n=10k+$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8

ومنه $k=10\lambda+5$ وبالتالي الحلول هي $(x;y)=(30\lambda+17;70\lambda+37)$ و $\lambda\in\mathbb{N}$

<u>التمرين(41) باك 2017 تقني رياضي م 2</u>

(1) بيَن أنَ : من أجل كل عدد طبيعي k ، $4^{5k}\equiv 1[11]$.

(2) استنتج تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11 .

(3) بيَن أنَ : من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1)$ يقبل القسمة على 11.

(4) عيَن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(2\times 2017^{5n+3}+n-3)$ قابلا للقسمة على 11 .

<u>حل التمرين(41) باك 2017 تقني رياضي م 2:</u>

(1) إثبات أنَ : من أجل كل عدد طبيعي kفإنَ : $4^{5k}\equiv 1[11]$

لدينا $4^5=1024\equiv 1[11]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي k نجد $(4^5)^k\equiv 1^k[11]$ وعليه $4^{5k}\equiv 1[11]$

(2) استنتاج تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11 :

لدينا $\begin{cases}4^{5k}\equiv 1[11]\\ 4\equiv 4[11]\end{cases}$ ومنه $4^{5k+1}\equiv 4[11]$ (باستعمال خاصية الضرب)

$\begin{cases}4^{5k}\equiv 1[11]\\ 4^2\equiv 5[11]\end{cases}$ ومنه $4^{5k+2}\equiv 5[11]$ و $\begin{cases}4^{5k}\equiv 1[11]\\ 4^3\equiv 9[11]\end{cases}$ ومنه $4^{5k+3}\equiv 9[11]$

$\begin{cases}4^{5k}\equiv 1[11]\\ 4^4\equiv 3[11]\end{cases}$ ومنه $4^{5k+4}\equiv 3[11]$

$n=$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	
$4^n\equiv ..$	1	4	5	9	3	$[11]$

(3)إثبات أنَ العدد $(2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1)$ يقبل القسمة على 11:

يكفي إثبات أنَ $(2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1)\equiv 0[11]$

لدينا $2017\equiv 4[11]$ و $1438\equiv 8[11]$ ومنه :

$$\left(2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1\right)\equiv 2\times 4^{5n+3}+3\times(2\times 4)^{10n}+1[11]$$

معناه $\left(2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1\right)\equiv 2\times 4^{5n+3}+3\times 2^{2(5n)}\times 4^{5\times(2n)}+1[11]$

أي $\left(2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1\right)\equiv 2\times 4^{5n+3}+3\times 4^{5n}\times 4^{5(2n)}+1[11]$

وبما أنَ $2\times 4^{5n+3}+3\times 4^{5n}\times 4^{5(2n)}+1\equiv 2\times 9+3\times 1\times 1+1[11]$

أي $2\times 4^{5n+3}+3\times 4^{5n}\times 4^{5(2n)}+1\equiv 22[11]$ معناه $2\times 4^{5n+3}+3\times 4^{5n}\times 4^{5(2n)}+1\equiv 0[11]$

فإنه وبالتعدي $\left(2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1\right)\equiv 0[11]$

وعليه $\left(2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1\right)$ يقبل القسمة على 11 .

(4) تعيَين قيم العدد الطبيعي nحتى يكون العدد $\left(2\times 2017^{5n+3}+n-3\right)$ قابلا للقسمة على 11 :

$\left(2\times 2017^{5n+2}+n-3\right)$ يقبل القسمة على 11 معناه $\left(2\times 2017^{5n+2}+n-3\right)\equiv 0[11]$

وبما أنَ $2017\equiv 4[11]$ فإنه ينتج $\left(2\times 2017^{5n+2}+n-3\right)\equiv 2\times 4^{5n+2}+n-3[11]$

ومنه$2\times 4^{5n+2}+n-3\equiv 0[11]$ تكافئ $2\times 4^{5n+2}+n-3\equiv 2\times 5+n-3[11]$ أي

$2\times 4^{5n+2}+n-3\equiv 7+n[11]$وعليه $7+n\equiv 0[11]$ تكافئ $n\equiv -7[11]$ تكافئ $n\equiv 4[11]$

ومنه يوجد عدد طبيعي k' بحيث $n=11k'+4$

التمرين(42) باك جوان 2017 رياضي م 1 :

1) نعتبر المعادلة : $104x-20y=272.......(E)$ ذات المجهول (x,y) حيث x و y عددان صحيحان .

أ) احسب القاسم المشترك الاكبر للعددين 20 و 104 ثم بين ان المعادلة (E) تقبل حلولا.

ب) بين انه اذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 3[5]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E).

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta 01}$ في نظام التعداد الذي اساسه 4، و يكتب $\overline{1\alpha\beta 01}$ في نظام التعداد الذي اساسه 6 حيث α و β عددان طبيعيان .

عين α و β، ثم اكتب λ في النظام العشري .

3) تحقق ان كلا من 2017 و 1009 عدد اولي ، ثم عين الثنائيات $(a;b)$ من الاعداد الطبيعية التي تحقق : $2m-d=2017$ حيث $d=PGCD(a,b)$ ، $m=PPCM(a;b)$

حل التمرين(42) باك جوان 2017 رياضي م 1:

(1) نعتبر $104x-20y=272.......(E)$

أ) حساب القاسم المشترك الاكبر للعددين 20 و 104 لدينا $PGCD(20;104)=4PGCD(5;26)=4$

بما أنَ 4قاسم للعدد 272 فإنَ المعادلة (E) تقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة .

ب)- إثبات أنَه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإنَ $x\equiv 3[5]$

لدينا (E) تكافئ $104x = 20y + 272$ ومنه $104x \equiv 272[5]$ $104x = 5(4y) + 272$

أي أنَ $4x \equiv 2[5]$ و $4 \equiv -1[5]$ ومنه $-x \equiv 2[5]$ أي أنَ $x \equiv -2[5]$ و $-2 \equiv 3[5]$ ومنه $x \equiv 3[5]$

– استنتاج الحلول :

$x \equiv 3[5]$ يعني أنَّ $x = 3 + 5k \ : k \in Z$ بالتعويض في (E) نجد $104(5k+3) = 20y + 272$

ومنه $520k + 40 = 20y$ أي أنَ $y = 26k + 2 \ : k \in \mathbb{Z}$ مجموعة الحلول هي :

. $S = \{(5k+3; 26k+2) : \mathrm{k} \in Z\}$

(2) تعيين العددين α و β : لدينا $\lambda = \overline{1\alpha\alpha\beta01}^{4}$ و $\lambda = \overline{1\alpha\beta01}^{6}$ يعني أنَ :

$$\begin{cases} \lambda = 1 + \beta \times 4^2 + \alpha \times 4^3 + \alpha \times 4^4 + 4^5 \\ \lambda = 1 + \beta \times 6^2 + \alpha \times 6^3 + 6^4 \end{cases}$$

ومنه $16\beta + 320\alpha + 1025 = 36\beta + 216\alpha + 1297$ أي أنَ $104\alpha - 20\beta = 272$ ومنه من حلول المعادلة (E) نستنتج أنَ
$$\begin{cases} \alpha = 3 + 5k \\ \beta = 26k + 2 \end{cases}$$

وعلما أنَ العددين α و β أقل تماما من 4 ومنه من اجل $k = 0$ نجد : $\alpha = 3$ و $\beta = 2$

حساب λ : $\lambda = 1 + 2 \times 6^2 + 3 \times 6^3 + 6^4 = 2017$

(3) التحقق من ان العددين 2017 و 1009 اوليان

العدد2017 يقبل القسمةعلى	2	3	5	7	11	13	17	19	31	37	41	47
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا

ومنه 2017 عدد أولي لأنَ $\sqrt{2017} \leq 47$.

العدد1009 يقبل القسمةعلى	2	3	5	7	11	13	17	19	31	37
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا

ومنه 1009 عدد أولي لأنَ $\sqrt{1009} \leq 37$

– تعيين $a;b$ حيث d قاسم للعددين $d;m$:

ومنه d هو قاسم للعدد $2m - d$ أي قاسم للعدد 2017 ومنه فإنَ القيم الممكنة لـ d هي 1 أو 2017 لان 2017 اولي

• لما $d = 1$ فإنَ $2m - 1 = 2017$ ومنه $m = \dfrac{2018}{2} = 1009$ بما أنَ 1009 عدد أولي و $md = ab$

ومنه $ab = 1009$ إذن الثنائيات $(a;b)$ هي $(1;1009)$ و $(1009;1)$

• لما $d = 2017$ فإنَ $2m - 2017 = 2017$ ومنه $m = 2017$ ومنه $ab = 2017^2$ إذن الثنائية $(a;b)$ هي $(2017;2017)$

التمرين(43) باك جوان 2017 رياضي م 2 :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرَفة على N بحدها الأوَل $u_0 = 1$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 7u_n + 8$.

(1) برهن بالتراجح أنَ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3u_n = 7^{n+1} - 4$.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 1 + 7 + 7^2 + ... + 7^n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

(أ)- احسب بدلالة n المجموع S_n ثم جد علاقة بين S_n و S'_n .

(ب)- استنتج أنَ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$.

(3) (أ)- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5 .

(ب)- عيَن قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5.

حل التمرين(43) باك جوان 2017 رياضي م 2

(u_n) معرَفة بحدها الأوَل $u_0 = 1$ ومن أجل كل $n : u_{n+1} = 7u_n + 8$.

(1) البرهان بالتراجع أنَه من أجل كل n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$.

من اجل $n = 0$ نجد $3u_0 = 7^{0+1} - 4$ وهي محققة لان $3u_0 = 3$ و $7^{0+1} - 4 = 3$

نفرض ان $3u_n = 7^{n+1} - 4$ ونبرهن ان : $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$

لدينا فرضا : $3u_n = 7^{n+1} - 4$ ومن جهة اخرى $u_{n+1} = 7u_n + 8$ اذن : $3u_{n+1} = 3(7u_n + 8) = 21u_n + 24$

ومنه $3u_{n+1} = 21u_n + 24 = 7(3u_n) + 24 = 7(7^{n+1} - 4) + 24 = 7^{n+2} - 28 + 24$

اذن $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$ ومنه الخاصية صحيحة من اجل كل $n+1$ وبالتالي صحيحة من اجل كل n

(2) $S_n = 1 + 7 + 7^2 + ... + 7^n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

(أ)- حساب بدلالة n المجموع S_n :

S_n هو مجموع $(n+1)$ حد لمتتالية هندسية حدها الاول 1 و اساسها 7 . اذن

$$S_n = 1 \cdot \frac{7^{n+1} - 1}{7 - 1} = \frac{1}{6}(7^{n+1} - 1)$$

- حساب المجموع S'_n

$S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ وهذا يكافئ $3S'_n = 3u_0 + 3u_1 + ... + 3u_n$ ونعلم انه من اجل كل n لدينا

$3u_n = 7^{n+1} - 4$ ومنه $3S'_n = (7^1 - 4) + (7^2 - 4) + ... + (7^{n+1} - 4)$ وتكافئ

$3S'_n = (7 + 7^2 + \cdots + 7^{n+1})\underbrace{-4 - 4 ..... - 4}_{n+1}$ أي ان $3S'_n = (7 + 7^2 + \cdots + 7^{n+1}) - 4(n+1)$

ومنه $3S'_n = 7\left(\frac{7^{n+1} - 1}{7 - 1}\right) - 4(n+1) = \frac{7}{6}(7^{n+1} - 1) - 4(n+1) = 7 \cdot S_n - 4(n+1)$

ومنه $S'_n = \frac{7}{3}\cdot S_n - \frac{4}{3}(n+1)$ وهي العلاقة المطلوبة

(ب)- استنتاج أنَ من أجل كل n : $18\times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$.

من العلاقة السابقة : $S'_n = \frac{7}{3}\cdot S_n - \frac{4}{3}(n+1)$ ولدينا سابقا $S_n = \frac{1}{6}(7^{n+1} - 1)$ ومنه بالتعويض نجد

$$18\cdot S'_n = 18\left(\frac{7}{3}\cdot S_n - \frac{4}{3}(n+1)\right) = 42S_n - 24(n+1) = 42\cdot\frac{1}{6}(7^{n+1} - 1) - 24(n+1)$$

اذن $18\cdot S'_n = (7^{n+2} - 7) - 24(n+1) = 7^{n+2} - 24n - 31$

(3) أ- دراسة بواقي قسمة العدد 7^n على 5 :

$7^0 \equiv 1[5]$ و $7^1 \equiv 2[5]$ و $7^2 \equiv 4[5]$ و $7^3 \equiv 3[5]$ و $7^4 \equiv 1[5]$ ومنه نستنتج بواقي القسمة

اذا كان $n = 4k$ فان باقي قسمة 7^n على 5 هو 1 اي $7^{4k} \equiv 1[5]$

اذا كان $n = 4k+1$ فان باقي قسمة 7^n على 5 هو 2 اي $7^{4k+1} \equiv 2[5]$

اذا كان $n = 4k+2$ فان باقي قسمة 7^n على 5 هو 4 اي $7^{4k+2} \equiv 4[5]$

اذا كان $n = 4k+3$ فان باقي قسمة 7^n على 5 هو 3 اي $7^{4k+3} \equiv 3[5]$

(ب)- تعيين قيم n حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5 : اي $S'_n \equiv 0[5]$

وبما ان العددين 5 و 18 اوليين فيما بينهما فان $S'_n \equiv 0[5]$ تكافئ $18S'_n \equiv 0[5]$

اي ان $7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 0[5]$ وبما ان $-24 \equiv 1[5]$ و $31 \equiv 1[5]$ فان : $7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$

ونعوض n في الحالات الاربعة .

الحالة (1) - اذا كان $n = 4k$ نجد : $7^{4k+2} + 4k - 1 \equiv 0[5]$ وتعني $4 + 4k - 1 \equiv 0[5]$ اي $4k \equiv -3[5]$ أي

$-k \equiv -3[5]$ ومنه $k \equiv 3[5]$ ومنه $k = 5\alpha + 3$ وبالتالي : $n = 4(5\alpha+3)$ اذن $n = 20\alpha + 12$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$

الحالة (2) - اذا كان $n = 4k+1$ نجد : $7^{4k+3} + 4k + 1 - 1 \equiv 0[5]$ اي $3 + 4k \equiv 0[5]$ وتعني $-k \equiv -3[5]$

اي $k \equiv 3[5]$ ومنه $k = 5\alpha + 3$ وبالتالي : $n = 4(5\alpha+3)+1$ اذن $n = 20\alpha + 13$

الحالة (3) - اذا كان $n = 4k+2$ نجد : $7^{4k+4} + 4k + 2 - 1 \equiv 0[5]$ اي $7^{4(k+1)} + 4k + 1 \equiv 0[5]$

ومنه $1 - k + 1 \equiv 0[5]$ اي $k \equiv 2[5]$ اي $k = 5\alpha + 2$ وبالتالي : $n = 4(5\alpha+2)+2$ اي $n = 20\alpha + 10$

الحالة (4) - اذا كان $n = 4k+3$ نجد : $7^{4k+5} + 4k + 3 - 1 \equiv 0[5]$ اي $7^{4(k+1)+1} - k + 2 \equiv 0[5]$

ومنه $2 - k + 2 \equiv 0[5]$ اي $k \equiv 4[5]$ اي $k = 5\alpha + 4$ وبالتالي : $n = 4(5\alpha+4)+3$ اي $n = 20\alpha + 19$

الخلاصة : الاعداد الطبيعية n بحيث : $S'_n \equiv 0[5]$ هي : $\{20\alpha+12, 20\alpha+13, 20\alpha+10, 20\alpha+19\}$

التمرين(44) باك 2017 الاستثنائي تقني رياضي م1

(1)عين ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 5 .

(2)استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد 1437^{2017} على 5 .

(3) برهن ان : من اجل كل عدد طبيعي n ، العدد $\left(48^{4n+3}-2\times 9^{2n+1}+1\right)$مضاعف للعدد 5 .

(4)عين الاعداد الطبيعية n حتى يكون العدد $\left(3^{4n}+27^{n}-4\right)$ قابلا للقسمة على 5 .

حل التمرين(44) باك 2017 الاستثنائي تقني رياضي م 1

(1) تعيين حسب قيم n، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^nعلى 5 .

$3^0\equiv 1[5]$و $3^1\equiv 3[5]$ و $3^2\equiv 4[5]$ و $3^3\equiv 2[5]$ و $3^4\equiv 1[5]$

ومنه : اذا كان $n=4k$ فان $3^{4k}\equiv 1[5]$ واذا كان : $n=4k+1$ فان $3^{4k+1}\equiv 3[5]$

واذا كان : $n=4k+2$ فان $3^{4k+2}\equiv 4[5]$ واذا كان : $n=4k+3$ فان $3^{4k+3}\equiv 2[5]$

(2) استنتاج باقي القسمة الاقليدية للعدد: 1437^{2017} على 5 .

لدينا $1437=5(288)-3$ أي ان $1437\equiv -3[5]$ وبالتالي : $1437^{2017}\equiv(-3)^{2017}[5]$

و $(k=504)$:$2017=4k+1$ ومنه $1437^{2017}\equiv -3^{4k+1}[5]$ اذن $1437^{2017}\equiv -3[5]$

ومنه $1437^{2017}\equiv 2[5]$

(3) برهان ان العدد $\left(48^{4n+3}-2\times 9^{2n+1}+1\right)$مضاعف للعدد 5 : أي $\left(48^{3n+3}-2\times 9^{2n+1}+1\right)\equiv 0[5]$

لدينا $48\equiv 3[5]$ ومنه $48^{4n+3}\equiv 3^{4n+3}[5]\equiv 2[5]$

ولدينا أيضا $9^{2n+1}=\left(3^2\right)^{2n+1}=3^{4n+2}\equiv 4[5]$ ومنه $48^{3n+3}-2\times 9^{2n+1}+1\equiv 2-2(4)+1[5]$

وبالتالي $\left(48^{3n+3}-2\times 9^{2n+1}+1\right)\equiv 0[5]$ أي انه يقبل القسمة على 5

(4)تعيين الاعداد الطبيعية n حتى يكون العدد $\left(3^{4n}+27^{n}-4\right)$ قابلا للقسمة على 5 أي $3^{4n}+27^{n}-4\equiv 0[5]$

لدينا $3^{4n}\equiv 1[5]$ و $27\equiv -3[5]$ ومنه $27^{n}\equiv(-3)^{n}[5]$ اذن $27^{n}\equiv(-3)^{n}[5]$ وبالتالي

$27^{n}+1-4\equiv(-3)^{n}-3[5]$

اذن من اجل $n=4k$ فان $27^{n}-3\equiv 3[5]$و ومن اجل $n=4k+1$ فان $27^{n}-3\equiv 4[5]$

ومن اجل $n=4k+2$ فان $27^{n}-3\equiv 1[5]$ و من اجل $n=4k+3$فان $27^{n}-3\equiv 0[5]$

وبالتالي قيم n هي : $n=4k+3$

التمرين(45) باك 2017 الاستثنائي رياضي م 1

نعتبر المعادلةذات المجهولين الصحيحين x و y حيث $63x+5y=159\quad\ldots(E)$

(1) تحقق ان العددين 5 و 63 اوليان فيما بينهما ثم بين ان المعادلة(E) تقبل حلولا .

(2)برهن انه اذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فان $x=3[5]$

(3) λ عدد طبيعي يكتب $\lambda=\overline{5\alpha0\alpha}^{7}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 و يكتب $\lambda=\overline{\beta10\beta0}^{5}$

جد العددين الطبيعيين α و β ثم اكتب العدد $\lambda+2$ في النظام العشري

(4) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 5

(ب)عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $3^{x-y}+4n+1438^{2017}$ القسمة على 5 حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (E) و x عدد طبيعي

حل التمرين(45) باك 2017 الاستثنائي رياضي م 1

(1)التحقق ان العددين 5 و 63 اوليان فيما بينهما لدينا $PGCD=(5;63)=1$ لان $63=3^2\times 7$

و العدد الاولي 5 اولي مع العددين الاوليين 3 و 7 .

$63x+5y=159$ هذه المعادلة تقبل حلولا في مجموعة الاعداد الصحيحة لان $PGCD(5;63)=1$ قاسم للعدد 159 .

(2)البرهان : اذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) يعني ان $63x=-5y+159$ أي ان $63x=159[5]$

أي ان $3x=4[5]$ومنه نجد $6x=8[5]$ أي ان $x=3[5]$ وهو المطلوب (لان $6=1[5]$ و $8=3[5]$).

مما سبق نجد ان $x=3+5k$: $k\in Z$ بالتعويض في المعادلة (E) نجد $63(3+5k)+5y=159$ ومنه

$5y=-315k-30$ و منه $y=-36k-6$ ومنه مجموعة الحلول هي $S=\{(3+5k;-6-63k):k\in Z\}$.

(3) إيجاد العددين الطبيعيان α و β حيث لدينا $\lambda=\overline{5\alpha0\alpha}^{7}$ و $\lambda=\overline{\beta10\beta0}^{5}$

ننشر العدد λ فنجد $\lambda=5\times7^3+\alpha\times7^2+0\times7+\alpha=50\alpha+1715$ و $0\le\alpha\prec 7$.

و $\lambda=\beta\times5^4+1\times5^3+0\times5^2+\beta\times5+0=630\beta+125$ و $0\le\beta\prec 5$.

ومنه نجد $50\alpha+1715=630\beta+125$ أي ان $630\beta-50\alpha=1590$ بالقسمة على 10 نجد

$63\beta-5\alpha=159$ أي ان $63\beta+5(-\alpha)=159$ من حلول المعادلة (E) نستنتج ان $\begin{cases}\beta=3+5k\\-\alpha=-6-63k\end{cases}$

و منه $\begin{cases}\beta=3+5k\\\alpha=6+63k\end{cases}$ لدينا $0\le\alpha\prec 7$ و منه نجد ان $k=0$ أي ان $\begin{cases}\beta=3\\\alpha=6\end{cases}$ ومنه

$\lambda=630(3)+125=2015$ أي ان $\lambda+2=2017$ في النظام العشري.

(4) (أ) دراسة بواقي قسمة 3^n على 5 :

لدينا $3^0=1[5]$ و $3^1=3[5]$ و $3^2=4[5]$ و $3^3=2[5]$ و $3^4=1[5]$ ومنه باقي قسمة 3^n على 5 :

– لما $n=4k$ الباقي هو 1 و لما $n=4k+1$ الباقي هو 3 و لما $n=4k+2$ الباقي هو 4

و لما $n=4k+3$ الباقي هو 2 حيث $k\in\mathbb{N}$.

(ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $3^{x-y}+4n+1438^{2017}$:يقبل القسمة على 5

لدينا من 2) $\begin{cases} x = 5k+3 \\ y = -6-63k \end{cases}$ ومنه $x-y = 68k+9$ أي ان $x-y = 4(17k+2)+1$

و هي من الشكل $n = 4k'+1$ ومنه $3^{x-y} \equiv 3[3]$ و $1438 \equiv 3[5]$.

بالرفع الى قوى 2017 نجد $1438^{2017} \equiv 3^{2017}[5]$ و $2017 = 4(504)+1$ وهو من الشكل $n = 4k'+1$ اذن

$1438^{017} \equiv 3[5]$ و منه $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017} \equiv 6+4n[5]$ و منه $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017} \equiv 0[5]$ يعني ان

$6+4n \equiv 0[5]$ أي $1-n \equiv 0[5]$ ومنه $n = 1[5]$ أي ان $n = 5k+1$ حيث $k \in \mathbb{N}$

التمرين(46) باك 2017 الاستثنائي رياضي م 2

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n + 1$

(1) (أ)-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

(ب)- تحقق أنَه من اجل كل عدد طبيعي n:العددان الطبيعيان u_n و u_{n+1} اوليان فيما بينهما

(2) لتكن المتتالية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

(أ)- أثبت أنَ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .

(ب)- عبر بدلالة n عن المجموع S_n : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{3n}$

(3)عين بدلالة n غير المعدوم القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين $4^{n+1} - 1$ و $4^n - 1$

(4) (أ)- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7 .

(ب)- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد : $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$ القسمة على 7

حل التمرين(46) باك 2017 الاستثنائي رياضي م 2

(1) (أ)-إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n بالتراجع : $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ حيث : $u_0 = 0$

التحقق من اجل $n = 0$: $u_0 = \frac{1}{3}(4^0 - 1) = 0$ محققة

نفرض ان $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ ونبرهن $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$

لدينا $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ و $u_{n+1} = 4u_n + 1$ ومنه $u_{n+1} = 4 \times \frac{1}{3}(4^n - 1) + 1 = \frac{4^{n+1} - 4 + 3}{3} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$

محققة . اذن من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

(ب)- التحقق أنَ u_n و u_{n+1} اوليان فيما بينهما لدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1} - 4u_n = 1$

حسب نظرية بيزو فإنَ العددان u_n و u_{n+1} اوليان فيما بينهما. لانه يوجد عددان صحيحان $\alpha = 1$ و $\beta = -4$

حيث : $\alpha u_{n+1}+\beta u_n=1$

(2) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $v_n=u_n+\frac{1}{3}$.

(أ)– إثبات أنَ المتتالية (v_n) هندسية $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{3}=4u_n+1+\frac{1}{3}$ ومنه $v_{n+1}=4u_n+\frac{4}{3}=4\left(u_n+\frac{1}{3}\right)$

أي أن $v_{n+1}=4u_n$ إذن المتتالية (v_n) هندسية وأساسها 4 وحدها الأول $v_0=u_0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

(ب)– التعبير بدلالة n عن المجموع S_n : $S_n=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{3n}=v_0\left(\frac{q^{3n+1}-1}{q-1}\right)$

أي $S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{4^{3n+1}-1}{4-1}\right)=\frac{1}{9}\left(4^{3n+1}-1\right)$

– تعيين القاسم المشترك الأكبر : $u_n=\frac{1}{3}\left(4^n-1\right)$ ومنه $3u_n=\left(4^n-1\right)$ و $3u_{n+1}=\left(4^{n+1}-1\right)$

$PGCD\left(4^{n+1}-1;4^n-1\right)=PGCD\left(3u_{n+1};3u_n\right)=3PGCD\left(u_{n+1};u_n\right)$

ومنه $PGCD\left(4^{n+1}-1;4^n-1\right)=3$ لأنَ $PGCD\left(u_{n+1};u_n\right)=1$

(4) (أ)– دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7 .

$4^0\equiv1[7]$ و $4^1\equiv4[7]$ و $4^2\equiv2[7]$ و $4^3\equiv1[7]$

ومنه باقي قسمة العدد 4^n على 7 هي :

لما $n=3k$ فان باقي قسمة العدد 4^n على 7 هو 1

لما $n=3k+1$ فان باقي قسمة العدد 4^n على 7 هو 4

لما $n=3k+2$ فان باقي قسمة العدد 4^n على 7 هو 2

(ب)– تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $A_n=9S_n-6n-3^{6n+4}$ القسمة على 7

بالتعويض نجد $A_n=4^{3n+1}-1-6n-3^{6n+4}$ ولدينا $3\equiv-4[7]$ ومنه $3^{6n+4}\equiv4^{6n+4}[7]$

لأنَ العدد $6n+4$ زوجي و $3^{6n+4}\equiv\left(4^{3n+2}\right)^2[7]\equiv4[7]$

$A_n=4^{3n+1}-1-6n-4[7]$ و $4^{3n+1}\equiv4[7]$ و منه $A_n\equiv4-1-6n-4[7]$ أي $A_n\equiv-1-6n[7]$

و A_n يقبل القسمة على 7 يعني أنَ $-1-6n\equiv0[7]$ أي أنَ $-6n\equiv1[7]$ و منه نجد

$n\equiv1[7]$ أي أنَ $n=1+7k$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

التمرين (47) بكالوريا 2017 القبة شعبة الرياضيات

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y التالية : (E) ...$7x-3y=10$

(1) عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة الذي يحقق : $\begin{cases} x_0-1\equiv 0[3] \\ -2\prec x_0\prec 4 \end{cases}$ ثم حل المعادلة (E)

(2) بفرض ان الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) حيث x و y عددان طبيعيان

عين مجموعة الاعداد الطبيعية n التي تحقق الجملة : $\begin{cases} 2^x+y+n^2-2\equiv 0[7] \\ 0\prec n\prec 18 \end{cases}$

(3) جد الثنائية الوحيدة $(x;y)$ حل للمعادلة (E) بحيث المضاعف المشترك الأصغر للعددين x و y هو 2139

حل التمرين(47)بكالوريا 2017 القبة شعبة الرياضيات

(1)تعيين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ لـ $7x-3y=10$ حيث : $\begin{cases} x_0-1\equiv 0[3] \\ -2\prec x_0\prec 4 \end{cases}$:

$x_0-1\equiv 0[3]$ تعني $x_0\equiv 1[3]$ اي ان $x_0=3p+1$ حيث p عدد صحيح وبما ان $-2\prec x_0\prec 4$ فان

$-2\prec 3p+1\prec 4$ اذن $-3\prec 3p\prec 3$ أي $-1\prec p\prec 1$ ومنه $p=0$ وبالتالي $x_0=1$

وبالتعويض في المعادلة $7x-3y=10$ نجد : $3y=7(1)-10$ أي ان $y_0=-1$

اذن الحل الخاص $(x_0;y_0)=(1;-1)$

حل المعادلة (E) : لدينا اذن $\begin{cases} 7x-3y=10 \\ 7(1)-3(-1)=10 \end{cases}$ وبالطرح نجد: $7(x-1)=3(y+1)$

هذه المعادلة تعني 7 يقسم $3(y+1)$ وبما ان 7 اولي مع 3 فانه حسب مبرهنة غوص العدد 7 يقسم $(y+1)$

أي ان $y+1=7k$ ومنه $y=7k-1$ حيث k صحيح

وتعويض $y=7k-1$ في المعادلة $7(x-1)=3(y+1)$ نجد : $x=3k+1$ ومنه مجموعة حلول المعادلة (E)

هي : $\{(x;y)=(3k+1;7k-1)\}$ حيث k صحيح

(2) x و y عددان طبيعيان و k $\{(x;y)=(3k+1;7k-1)\}$ طبيعي

تعيين الاعداد الطبيعية n التي تحقق الجملة : $\begin{cases} 2^x+y+n^2-2\equiv 0[7] \\ 0\prec n\prec 18 \end{cases}$:

بتعويض x و y في الموافقة نجد : $2^{3k+1}+7k-1+n^2-2\equiv 0[7]$ وبما ان $7k\equiv 0[7]$ فان

$2^{3k+1}+n^2-3\equiv 0[7]$ ونعلم ان $2^3=8\equiv 1[7]$ ومنه $2^{3k}\equiv 1[7]$ وبالتالي نجد $2^{3k+1}\equiv 2[7]$

ومنه $n^2-1\equiv 0[7]$ اي $(n+1)(n-1)\equiv 0[7]$ ومنه نجد : $n-1\equiv 0[7]$ او $n+1\equiv 0[7]$ ($n\equiv 6[7]$)

وبالتالي قيم n هي : $n=7k+1$ او $n=7k+1$ او $n=7k+6$

(3) تعيين $(x;y)$ بحيث $PPCM(x;y)=2139$ حيث $x=3k+1$ و $y=7k-1$

هذا يعني : x يقسم 2139 و y يقسم 2139 اي $3k+1$ يقسم 2139 و $7k-1$ يقسم 2139

وقواسم 2139 هي : $D_{2139}=\{1;3;23;31;2139\}$

اذا كان $3k+1=1$ اي $k=0$ ومنه $y=-1$ مرفوضة لان y طبيعي

اذا كان $3k+1=3$ فان k ليس طبيعي فهي مرفوضة

اذا كان $3k+1=23$ فان k ليس طبيعي فهي مرفوضة

اذا كان $3k+1=31$ ومنه $k=10$ وبالتالي $x=3(10)+1$ و $y=7(10)-1$ اذن الثنائية الوحيدة هي :

$(x;y)=(31;69)$ وعندئذ يكون $PPCM(31;69)=2139$

التمرين(48) بكالوريا 2017 القبة شعبة تقني رياضي

(1) (أ)ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 9

(ب) جد باقي قسمة العدد $\left(4^{2015}+4^{2016}+4^{2017}\right)$ على 9

(2) عين قيم العدد الطبيعي α حتى يكون من اجل كل عدد طبيعي n: $\begin{cases}4^n+4^{n+1}+4^{n+2}+\alpha+5\equiv 0[9]\\ 2010\prec\alpha\prec 2020\end{cases}$

(3) احسب بدلالة المجموع : $T_n=3+3\times 4+3\times 4^2+...+3\times 4^n$

(4) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون T_nمضاعفا للعدد 9

حل التمرين(48) بكالوريا 2017 القبة شعبة تقني رياضي

(1) (أ)دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 9 :

$4^0 \equiv 1[9]$ و $4^1 \equiv 4[9]$ و $4^2 \equiv 7[9]$ و $4^3 \equiv 1[9]$ اذن من اجل كل عدد طبيعي k نجد

$4^{3k} \equiv 1[9]$ و $4^{3k+1} \equiv 4[9]$ و $4^{3k+2} \equiv 7[9]$

(ب) تعيين باقي قسمة العدد $\left(4^{2015}+4^{2016}+4^{2017}\right)$ على 9 :

$2015 = 3\times 671+2$ ومنه $4^{2015} = 4^{3(671)+2} \equiv 7[9]$

$2016 = 3\times 672$ ومنه $4^{2016} = 4^{3(672)} \equiv 1[9]$

$2017 = 3(672)+1$ ومنه $4^{2017} = 4^{3(672)+1} \equiv 4[9]$

ومنه نجد بالجمع : $\left(4^{2015}+4^{2016}+4^{2017}\right) \equiv 7+1+4[9]$ اذن $\left(4^{2015}+4^{2016}+4^{2017}\right) \equiv 3[9]$

ومنه باقي قسمة العدد $\left(4^{2015}+4^{2016}+4^{2017}\right)$ على 9 هو 3

(2) تعيين قيم α بحيث من اجل كل n : $\begin{cases} 4^n+4^{n+1}+4^{n+2}+\alpha+5 \equiv 0[9] \\ 2010 \prec \alpha \prec 2020 \end{cases}$

نعلم انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $4^n+4^{n+1}+4^{n+2} \equiv 1+4+7[9]$ اي $4^n+4^{n+1}+4^{n+2} \equiv 3[9]$

اذن $3+\alpha+5 \equiv 0[9]$ و تعني $\alpha+8 \equiv 0[9]$ و منه $\alpha \equiv 1[9]$ أي ان $\alpha = 9p+1$

وبما ان $2010 \prec \alpha \prec 2020$ فان $2010 \prec 9p+1 \prec 2020$ ومنه $2009 \prec 9p \prec 2019$

اذن $223,22 \prec p \prec 224,33$ اذن $p = 223$ ومنه $\alpha = 9(223)+1 = 2008$

(3) حساب المجموع : $T_n = 3+3\times 4+3\times 4^2+\ldots+3\times 4^n$:

$$T_n = 3\left(1+4+4^2+\ldots+4^n\right) = 3\times\frac{4^{n+1}-1}{4-1} = \left(4^{n+1}-1\right)$$

(4) تعيين قيم n حتى يكون T_n مضاعفا للعدد 9 : اي $T_n \equiv 0[9]$

$T_n \equiv 0[9]$ معناه $4^{n+1}-1 \equiv 0[9]$ اي $4^{n+1} \equiv 1[9]$ ومن دراسة بواقي القسمة السابقة نجد : $n+1 = 3k$

اذن $n = 3k-1$ حيث k طبيعي غير معدوم

التمرين(49) باك2017 باتنة شعبة رالرياضيات

(1) حل . في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $2x-5y=4$.

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0=1$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n+5$

a و b عددان صحيحان غير معدومين و (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n=au_n+b-2$

أ) عين $(a;b)$ التي من اجلها تكون (v_n) متتالية هندسية اساسها 3 (يمكن استعمال السؤال الاول)

ب) اكتب v_n بدلالة n ، a و b وبين انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n\equiv 0[7]$

ج) بين انه عندما يكون $a\equiv 0[5]$ فإنه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: v_n يقبل القسمة على 5 .

حل التمرين(49) باك2017 باتنة شعبة الرياضيات

(1) حل المعادلة: $2x-5y=4$.

$2x-5y=4$ معناه $2x=5y+4$ ومنه $2x\equiv 4[5]$ أي $x\equiv 2[5]$ اذن $x=5k+2$ حيث k عدد صحيح

و بالتعويض في المعادلة نجد $2(5k+2)-5y=4$ أي $5y=2(5k+2)-4$ ومنه $y=2k$ حيث k صحيح

2) أ) تعيين $(a;b)$ التي من اجلها تكون (v_n) هندسية اساسها 3 : حيث $v_n=au_n+b-2$ و $u_{n+1}=3u_n+5$

(v_n) هندسية معناه من اجل كل طبيعي : $v_{n+1}=v_n\times q$ ومنه :

$v_{n+1}=au_{n+1}+b-2=a(3u_n+5)+b-2=3au_n+5a+b-2$ و حيث $au_n=v_n-b+2$

و منه $v_{n+1}=3au_n+5a+b-2=3(v_n-b+2)+5a+b-2$ اذن $v_{n+1}=3v_n-2b+5a+4$

و منه (v_n) متتالية هندسية اذا كان $-2b+5a+4=0$ أي $2b-5a=4$

ومن السؤال الاول فان : $b=5k+2$ و $a=2k$ حيث k صحيح

ب) كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، a و b:

(v_n) هندسية اساسها 3 وحدها الاول : $v_0=au_0+b-2=a+b-2$ اذن حدها العام :

$v_n=v_0\times q^n=(a+b-2)3^n$

-تبيان ان $v_n \equiv 0[7]$: لدينا $a=2k$ و $b=5k+2$ اذن $a+b-2=2k+5k+2-2=7k$

ومنه $v_n=(a+b-2)3^n=7k\times 3^n$ وبما ان $7k\equiv 0[7]$ فان $v_n\equiv 0[7]$

(ج) تبيان انه عندما $a\equiv 0[5]$ فإن v_n يقبل القسمة على 5 :

لدينا $b=5k+2$ ومنه $b-2=5k$ أي $b-2\equiv 0[5]$ و عندما $a\equiv 0[5]$ فان $a+b-2\equiv 0[5]$

ومنه $(a+b-2)3^n\equiv 0[5]$ لان $3^n\neq 5k$ (3^n لا يوافق الصفر بترديد 5) وبالتالي $v_n\equiv 0[5]$

التمرين(50) بكالوريا 2017 باتنة شعبة تقني رياضي

أجب بصحيح او خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية :

(1) العدد 25137 يقبل 12 قاسما بالضبط

(2) من اجل كل عدد طبيعي n العدد N حيث : $N=n^5-n$ يقبل القسمة على 30

(3) المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $u_0=2$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=2u_n-n$ حدها العام هو

$u_n=2^n+n+1$

(4) n عدد طبيعي غير معدوم . قيمة المجموع S حيث: $S=3+33+333+3333+....+\underbrace{33...3}_{n\text{مــــرة}}$ هي

$\frac{10}{27}(10^n-1)-\frac{1}{3}n$

حل التمرين(50) بكالوريا 2017 باتنة شعبة تقني رياضي

(1) العدد 25137 يقبل 12 قاسما بالضبط : $25137=3^3\times 7^2\times 19$ ومنه عدد قواسمه هو :

$(3+1)\times(2+1)(1+1)=24$ اذن الإجابة خاطئة

(2) من اجل كل n العدد: $N=n^5-n$ يقبل القسمة على 30 :

$$N=n^5-n=n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$

نعلم انه من جل كل عدد طبيعي n فان $n(n+1)$ عدد زوجي

و نعلم انه من جل كل عدد طبيعي n فان $(n-1)n(n+1)$ عدد مضاعف للعدد 3 (ثلاثة اعداد متتابعة)

اذن $N=n^5-n$ يقبل القسمة على 2 ويقبل القسمة على 3

اذن : $N=n^5-n\equiv 0[2]$ و $N=n^5-n\equiv 0[3]$ اي ان $n^5\equiv n[2]$ و $n^5\equiv n[3]$

وبما ان 2 و 3 اوليين فيما بينهما فان n^5-n يقبل القسمة على 6 ومنه نستنتج ان $n^5-n\equiv 0[6]$

بقي ان نبرهن ان n^5-n يقبل القسمة على 5 لان $5\times 6=30$ و العددان 5 و 6 اوليان فيما بينهما

ونعلم ان كل عدد طبيعي n يكتب على الشكل : $5k$ او $5k+1$ او $5k+2$ او $5k+3$ او $5k+4$

- اذا كان $n\equiv 0[5]$ فان $n^5\equiv 0[5]$ ومنه $n^5-n\equiv 0[5]$
- اذا كان $n\equiv 1[5]$ فان $n^5\equiv 1[5]$ ومنه $n^5-n\equiv 1-1[5]$ اي $n^5-n\equiv 0[5]$
- اذا كان $n\equiv 2[5]$ فان $n^5\equiv 32[5]$ ومنه $n^5-n\equiv 30[5]$ اي $n^5-n\equiv 0[5]$
- اذا كان $n\equiv 3[5]$ فان $n^5\equiv 243[5]$ ومنه $n^5-n\equiv 240[5]$ اي $n^5-n\equiv 0[5]$
- اذا كان $n\equiv 4[5]$ فان $n^5\equiv 1024[5]$ ومنه $n^5-n\equiv 1020[5]$ اي $n^5-n\equiv 0[5]$

اذن من اجل كل n فان $n^5-n\equiv 0[5]$ اي ان n^5-n يقبل القسمة على 5

ومنه بما ان n^5-n يقبل القسمة على 6 وعلى 5 فان n^5-n يقبل القسمة على 30

اذن الجملة المقترحة صحيحة

(3) $u_0=2$ (u_n) : $u_{n+1}=2u_n-n$ حدها العام هو $u_n=2^n+n+1$

نبرهن على ذلك بالتراجع : من اجل $n=0$: $u_0=2^0+0+1=2$ ولدينا في المعطيات $u_0=2$ اذن صحيحة

نفرض الخاصية صحيحة من اجل كل n طبيعي اي نفرض: $u_n=2^n+n+1$ ونبرهن ان $u_{n+1}=2^{n+1}+n+2$

لدينا $u_{n+1}=2u_n-n$ ومنه من الفرض نكتب $u_{n+1}=2\left(2^n+n+1\right)-n=2^{n+1}+2n+2-n=2^{n+1}+n+2$

اذن $u_{n+1}=2^{n+1}+n+2$ ومنه الخاصية صحيحة وبالتالي الجملة صحيحة

(4) : قيمة المجموع $S=3+33+333+3333+....+\underbrace{33...3}_{n\text{ مـــرة}}$ هي $\frac{10}{27}\left(10^n-1\right)-\frac{1}{3}n$:

يمكن ان نكتب : $S=3+33+333+3333+....+\underbrace{33...3}_{n\text{ مـــرة}}=3\left(1+11+111+1111+....+\underbrace{11...11}_{n}\right)$

ويمكن أيضا ملاحظة ان $S=3\left(\frac{10^1-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\frac{10^3-1}{9}+...+\frac{10^n-1}{9}\right)$ ومنه

ومنه نجد أيضا: $S=\frac{3}{9}\left(10^1-1+10^2-1+10^3-1+.....+10^n-1\right)$

$$S=\frac{3}{9}\left(10^1+10^2+10^3+.....+10^n-\left(1+1+1+.....+1\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(10\times\frac{10^n-1}{10-1}-n\right)=\frac{10}{27}\left(10^n-1\right)-\frac{1}{3}n$$

اذن الإجابة صحيحة

التمرين (51) : باك 2018 تقني رياضي م 2

لتكن (u_n) متتلية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام كما يلي $u_n = 2(3)^n$.

و (v_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $v_0 = 4$ و من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = 5v_n + u_n$.

(1) نضع من اجل كل nمن $\mathbb{N}$: $w_n = \dfrac{v_n}{u_n} + \dfrac{1}{2}$

- اثبت ان (w_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{5}{3}$ ، يطلب تعيين حدها الأول .

2) اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم استنتج انه من اجل كل nمن $\mathbb{N}$: $v_n = 5^{n+1} - 3^n$.

3) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعددين 3^n و 5^n على 8 .

4) عين حسب قيم العد الطبيعي nبواقي القسمة الاقليدية للعدد v_n على 8 .

<u>حل التمرين(51)</u>

حيث : $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 2(3)^n$ ؛ $v_0 = 4$ و $v_{n+1} = 5v_n + u_n$ ؛

1) $w_n = \dfrac{v_n}{u_n} + \dfrac{1}{2}$ ؛ اثبات أن (w_n) هندسية أساسها $\dfrac{5}{3}$:

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} + \frac{1}{2} = \frac{5v_n + u_n}{2(3)^{n+1}} + \frac{1}{2} = \frac{5v_n + u_n}{2(3)^n \times 3} + \frac{1}{2} = \frac{5v_n + u_n}{3u_n} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{5v_n}{3u_n} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{3} \times \frac{v_n}{u_n} + \frac{5}{6} = \frac{5}{3}\left(\frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{3} w_n$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية حدها الأول $w_0 = \dfrac{v_0}{u_0} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$ وأساسها $q = \dfrac{5}{3}$

2) كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (w_n) ثم استنتاج أن $v_n = 5^{n+1} - 3^n$:

$$w_n = w_0 \times q^n = \frac{5}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n = \frac{(5)^{n+1}}{2 \times 3^n}$$

- استنتاج عبارة v_n

$w_n = \dfrac{v_n}{u_n} + \dfrac{1}{2}$ و $w_n = \dfrac{(5)^{n+1}}{2(3)^n}$ ومنه $\dfrac{v_n}{u_n} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{(5)^{n+1}}{2(3)^n}$ تكافيء $\dfrac{v_n}{2(3)^n} = \dfrac{(5)^{n+1}}{2(3)^n} - \dfrac{1}{2}$ ومنه

$v_n = (5)^{n+1} - \dfrac{2(3)^n}{2}$ ومنه $v_n = 5^{n+1} - 3^n$

3) دراسة بواقي القسمة لكل من العددين 3^n و 5^n على 8 :

* $3^0 \equiv 1[8]$ ؛ $3^1 \equiv 3[8]$ ؛ $3^2 \equiv 1[8]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا

$3^{2k} \equiv 1[8]$ ؛ $3^{2k+1} \equiv 3[8]$

$5^0 \equiv 1[8]$ ، $5^1 \equiv 5[8]$ ، $5^2 \equiv 1[8]$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي k : $5^{2k}\equiv 1[8]$ ؛ $5^{2k+1}\equiv 5[8]$

$n=$	$2k$	$2k+1$	
$3^n\equiv$	1	3	$[8]$
$5^n\equiv$	1	5	$[8]$

4) تعيين قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة لـ v_n على 8 :

لدينا $5^{n+1}-3^n=5^{2k+1}-3^{2k}\equiv 4[8]$

من أجل $n=2k$: $5^{n+1}-3^n=5^{2k+1}-3^{2k}\equiv 4[8]$ اذن $v_{2k}\equiv 4[8]$

من أجل $n=2k+1$: $5^{n+1}-3^n=5^{2(k+1)}-3^{2k+1}\equiv -2[8]$ ومنه $v_{2k+1}\equiv 6[8]$

التمرين (52) باك 2018 رياضي م 2

1) α و β عددان طبيعيان بحث : $\begin{cases}\alpha+\beta=4035\\ \alpha-\beta=1\end{cases}$

– عيَن العددين α و β، ثمَ بيَن أنَ العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما .

2) عيَن كل الثنائيات الصحيحة $(x;y)$ التي تحقق المعادلة : $1009x-2017y=1$

3) عيَن الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة : $\begin{cases}a\equiv 2019[2017]\\ a\equiv 2019[1009]\end{cases}$

4)أ) n عدد طبيعي ، ادرس تبعا لقيم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.

ب- L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي : $L=\underbrace{\overline{111...1}}_{2018}$

– عيَن باقي القسمة الإقليدية للعدد $42L$ على 9 .

حل التمرين (52)باك 2018 رياضي م 2

1) تعيين العددين α و β :

$\begin{cases}\alpha+\beta=4035\\ \alpha-\beta=1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}2\alpha=4036\\ \beta=\alpha-1\end{cases}$ و منه $\begin{cases}\alpha=2018\\ \beta=2017\end{cases}$.

- تبيان أن $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما:

$\frac{\alpha}{2} = \frac{2018}{2} = 1009$ ولدينا $\alpha - \beta = 1$ ومنه $2\frac{\alpha}{2} - \beta = 1$ ومنه

$1 = (2017)(-1) + (1009)2$ و منه حسب مبرهنة بيزو نستنتج أن 1009 و 2017 أوليان فيما بينهما أي

$\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما .

2) تعيين كل الثنائيات الصحيحة (x, y) التي تحقق المعادلة : $1009x - 2017y = 1$ ....(1)

من السؤال الأول : $1 = (2017)(-1) + (1009)2$ أي $1 = (1)(2017) - (2)(1009)$ .....(2)

بالطرح نجد $1009(x-2) = 2017(y-1)$

1009 يقسم $(x-2)1009$ فهو يقسم $2017(y-1)$ وبما أن 1009 أولي مع 2017 إذن حسب مبرهنة غوص فان 1009 يقسم $y-1$ إذن يوجد عدد صحيح k حيث $y - 1 = 1009k$ ومنه $y = 1009k + 1$.

بالتعويض في المعادلة (1) نجد $x = 2017k + 2$

إذن الثنائيات الصحيحة التي تحقق(1) : هي $(x, y) = (2017k + 2, 1009k + 1)$ حيث k عدد صحيح.

3) تعيين الأعداد الصحيحة a التي تحقق : $\begin{cases} a \equiv 2019[2017] \\ a \equiv 2019[1009] \end{cases}$.

$\begin{cases} a \equiv 2019[2017] \\ a \equiv 2019[1009] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = 2017p + 2019 \\ a = 1009q + 2019 \end{cases}$ ومنه $2017p + 2019 = 1009q + 2019$

و منه $2017p = 1009q$ ..(*)

العلاقة (*) تعني ان 2017 يقسم $1009q$ لكن 2017 أولي مع 1009 ومنه حسب مبرهنة غوص 2017 يقسم q

ومنه يوجد عدد صحيح k' حيث: . $q = 2017k'$

وبالتعويض في a نجد $a = 1009(2017k') + 2019$ ومنه $a = 2035153k' + 2019$.

4) أ) دراسة بواقي قسمة 7^n على 9 :

$7^0 \equiv 1[9]$ و $7^1 \equiv 7[9]$ و $7^2 \equiv 4[9]$ و $7^3 \equiv 1[9]$ دور البواقي هو العدد 3

ومنه من اجل كل عدد طبيعي n فان البواقي تلخص كما في الجدول التالي:

قيم n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$7^n \equiv ...[9]$	1	7	4

ب) L عدد يكتب في النظام ذي الأساس 7 : $L = \overline{\underbrace{111...1}_{2018}}$

تعيين باقي قسمة العدد $42L$ على 9 :

$$L=\underbrace{\overline{111...1}}_{2018\ fois}=1\times 7^{2017}+1\times 7^{2016}+1\times 7^{2015}+...+1\times 7^{0}$$

$$L=7^0+7^1+7^2+...+7^{2017}$$

ونعلم ان : $7^0+7^1+7^2+...+7^{2017}$ هو مجموع 2018 حد من متتالية هندسية أساسها 7 ومنه

$$L=7^0+7^1+7^2+...+7^{2017}=7^0\frac{7^{2018}-1}{7-1}=\frac{7^{2018}-1}{6}$$

ومنه $42L=42\dfrac{7^{2018}-1}{6}=7\left(7^{2018}-1\right)=7^{2019}-7$

لدينا $2019=3\times 673$ اي يكتب $3m$ ومنه حسب الجدول السابق نجد $7^{2019}\equiv 1[9]$

و $7\equiv 7[9]$ بالطرح نجد $7^{2019}-7\equiv 1-7[9]$ ومنه $7^{2019}-7\equiv -6[9]$ ومنه حسب خواص الموافقة نجد $7^{2019}-7\equiv 3[9]$ اي $42L\equiv 3[9]$ إذن باقي قسمة $42L$ على 9 هو 3.

التمرين (53) باك 2019 تقني رياضي م 1

(u_n) و (v_n) متتاليتان حيث $u_0=0$, $u_{n+1}=7u_n-18n+9$ و $v_n=u_n-3n+1$

(1) أثبت أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

(2) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

(3) احسب المجموع المجموع S_n حيث $S_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$

(4) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لـ 7^n على 9

(ب) ماهو باقي القسمة الاقليدية على 9 للعدد : $1954^{1962}+1962^{1954}+1442^{2019}$ ؟

(ج) أثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $6S_n-7u_n\equiv 0[9]$

حل التمرين(53) باك 2019 تقني رياضي م 1

$u_0=0$, $u_{n+1}=7u_n-18n+9$ و $v_n=u_n-3n+1$

(1) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية: $v_{n+1}=u_{n+1}-3(n+1)+1$ و منه $v_{n+1}=7u_n-18n+9-3n-2$

أي $v_{n+1}=7u_n-21n+7$ أي $v_{n+1}=7(u_n-3n+1)$ إذن $v_{n+1}=7v_n$ و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها 7

و حدها الأول $v_0=u_0-3(0)+1$ أي $v_0=1$

(2) عبارة الحد العام $v_n=v_0q^n=7^n$ و $v_n=u_n-3n+1$ و منه $u_n=v_n+3n-1$ اذن $u_n=7^n+3n-1$

.

(3)حساب المجموع S_n : $S_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$ و $u_n=7^n+3n-1$ و هي مجموع متتاليتين (v_n) هندسية

و (w_n) حسابية حيث $w_n=3n-1$ و منه $u_n=v_n+w_n$

$S_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$ أي أن $S_n=(v_0+w_0)+(v_1+w_1)+....+(v_n+w_n)$

أي $S_n = v_0\left(\frac{7^{n+1}-1}{7-1}\right)+\frac{n+1}{2}(w_0+w_n)$ و منه $S_n=\left(\frac{7^{n+1}-1}{6}\right)+\frac{n+1}{2}(-1+3n-1)$

أي $S_n=\left(\frac{7^{n+1}-1}{6}\right)+\frac{n+1}{2}(-2+3n)$

(4)(أ). دراسة بواقي قسمة 7^n على 9 :

من اجل $n=0$: باقي قسمة 7^0 على 9 هو 1

من اجل $n=1$: باقي قسمة 7^1 على 9 هو 7

من اجل $n=2$: باقي قسمة 7^2 على 9 هو 4

من اجل $n=3$: باقي قسمة 7^3 على 9 هو 1

لما $n=3k$ باقي قسمة 7^n على 9 هو 1 و لما $n=3k+1$ باقي قسمة 7^n على 9 هو 7

لما $n=3k+2$ باقي قسمة 7^n على 9 هو 4 .

ب)-إيجاد باقي قسمة العدد $1954^{1962}+1962^{1954}+1442^{2019}$ على 9 :

لدينا $1442\equiv 2[9]$ و منه $1442\equiv -7[9]$ بالرفع الى القوة 2019 نجد $1442^{2019}\equiv -7^{2019}[9]$ لان العدد 2019 فردي

و $2019=3\times 673$ و هي من الشكل $n=3k$ و منه $1442^{2019}\equiv -1[9]$.

و $1962\equiv 0[9]$ و منه $1962^{1954}\equiv 0[9]$

و $1954\equiv 1[9]$ و منه $1954^{1962}\equiv 1[9]$

بالجمع نجد $1954^{1962}+1962^{1954}+1442^{2019}\equiv -1+0+1[9]$ يعني

$1954^{1962}+1962^{1954}+1442^{2019}\equiv 0[9]$ و منه باقي القسمة المطلوب هو 0 .

ج) إثبات أن $6S_n-7u_n\equiv 0[9]$

$S_n=\left(\frac{7^{n+1}-1}{6}\right)+\frac{n+1}{2}(-2+3n)$ و منه $6S_n=(7^{n+1}-1)+3(n+1)(-2+3n)$ و

$u_n=7^n+3n-1$

بالطرح نجد :

$$6S_n-7u_n=(7^{n+1}-1)+3(n+1)(-2+3n)-7^{n+1}-21n+7=(3n+3)(-2+3n)-21n+6$$

ومنه $6S_n-7u_n=9n^2+3n-6-12n+6=9n^2-18n=9(n^2-2n)$ و هو مضاعف للعدد 9 يعني

$6S_n-7u_n\equiv 0[9]$.

التمرين(54) باك 2019 تقني رياضي م 2

(1) نعتبر المعادلة ذات المجهول (x,y) : (E)... $5x-3y=1$ حيث x و y عددان صحيحان

(أ) تحقق ان الثنائية $(6n+2;10n+3)$ حل للمعادلة (E) حيث n عدد طبيعي

(ب) استنتج أن العددين $6n+2$ و $10n+3$ أوليان فيما بينهما

(2) نضع $a=10n+3$ و $b=6n+2$ وليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

أ) بين أن $d=1$ أو $d=41$

(ب) بين أنه اذا كان $d=41$ فان $n\equiv 12[41]$

(3) ليكن العددان الطبيعيان $A=20n^2+36n+9$ و $B=6n^2+19n+15$

(أ) بين أن العددين A و B يقبلان القسمة على $2n+3$

(ب) جد بدلالة n و حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

حل التمرين(54) باك 2019 تقني رياضي م 2

(1) $5x-3y=1$..............(E)

(أ)التحقق :بالتعويض نجد : $5(6n+2)-3(10n+3)=1$ أي $30n+10-30-9=1$ محققة

و منه $(6n+2\,;\,10n+3)$ حل للمعادلة (E)

(ب)بما أن $5(6n+2)-3(10n+3)=1$ فحسب مبرهنة بيزو فإن العددين $(6n+2)$ و $(10n+3)$ أوليان فيما بينهما .

(2) $a=(10n+3)$ و $b=(3n+5)$ و $d=pgcd(3n+5\,;10n+3)$

(أ) d قاسم للعدد a ومنه فانه قاسم للعدد $3a$ ولدينا d قاسم للعدد b ومنه قاسم للعدد $10b$ إذن d قاسم للعدد $10b-3a$

ولدينا $10(3n+5)-3(10n+3)=41$ و منه d قاسم للعدد 41 أي أن $d=1$ أو $d=41$

(ب) إذا كان $d=41$ فإن $(3n+5)\equiv 0[41]$ و $(10n+3)\equiv 0[41]$ و منه

$\begin{cases}(10n+3)\equiv 0[41]\\(9n+15)\equiv 0[41]\end{cases}$ بالطرح نجد $n-12\equiv 0[41]$ و منه $n\equiv 12\ [41]$.

(3) لدينا $A=20n^2+36n+9$ و $B=6n^2+19n+15$

(أ)بالتحليل نجد $A=(2n+3)(10n+3)$ و $B=(2n+3)(3n+5)$ و منه العددان A و B يقبلان القسمة على $(2n+3)$.

(ب) من التحليل السابق يمكن أن نكتب : $pgcd(A\,;B)=pgcd((2n+3)(3n+5);(2n+3)(10n+3))$

ومنه $pgcd(A\,;B)=(2n+3)pgcd(3n+5;10n+3)$.

ومن السؤال (2)(أ) لما $n\equiv 12\ [41]$ أي $n=12+41k$ حيث $k\in\mathbb{N}$ فإن $pgcd(3n+5\,;10n+3)=41$

ومنه $pgcd(A\,;B)=(2n+3)\times 41=82n+123$ حيث $n=12+41k$

ولما $n\neq 12+41k$ حيث $k\in\mathbb{N}$ فإن $pgcd(3n+5\,;10n+3)=1$ ومنه

$pgcd(A\,;B)=(2n+3)\times 1=2n+3$.

التمرين(55) باك 2019 شعبة الرياضيات م 1

1) حل المعادلة (E) : $505x-673y=1$ ذات المجهول (x,y) حيث x و y عددان صحيحان

(لاحظ أن $2019=3\times 673$ و $2020=4\times 505$)

2)بين أنّه من اجل (x,y) حل للمعادلة (E) فان x و y من نفس الإشارة

(3)نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على بـ : $u_0=3$ و $u_{n+1}=u_n+505$ و $v_0=4$ و $v_{n+1}=v_n+673$

- اكتب u_α بدلالة α ثم اكتب v_β بدلالة β حيث α و β عددان طبيعيان

4) أ) عين الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) ثم بين ان هذه الحدود المشتركة تشكل متتالية حسابية (w_n) يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب) نضع من اجل كل عدد طبيعي : $X_n=\frac{1}{505}(w_n-2023)$

- احسب بدلالة n الجداء $p=X_1.X_2......X_n$

حل التمرين(55) باك 2019 شعبة الرياضيات م 1

1) حل المعادلة (E) **:** بما ان $2019 = 673 \times 3$ و $2020 = 505 \times 4$ أي $505 \times 4 - 673 \times 3 = 1$

اذن $(4;3)$ هي حل خاص للمعادلة (E) ، لدينا : $\begin{cases} 505x - 673y = 1 \;......(1) \\ 505(4) - 673(3) = 1 \;......(2) \end{cases}$ بطرح (2) من (1) نجد :

$505(x-4) = 673(y-3)$ ، وبما أنّ 505 و 673 أوليان فيما بينهما فانه حسب مبرهنة غوص :

673 يقسم $505(x-4)$ و 673 أولي مع 505 إذن 673 يقسم $(x-4)$ أي : $x - 4 = 673k$ أي : $x = 673k + 4$

و بالتعويض في (3) نجد : $y = 505k + 3$ و منه : $S = \{(4 + 673k; 3 + 505k)\}$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

2)تبيان أنّ x و y من نفس الإشارة:

لدينا : $x \times y = (673k + 4)(505k + 3)$ أي : $x \times y = 339865k^2 + 4039k + 12$ ، نحسب المميز نجد :

$\Delta = 1$

و منه المعادلة $339865k^2 + 4039k + 12 = 0$ حلولها $k = -\frac{4}{673}$ او $k = -\frac{3}{505}$ وهما عددان لا يحصران أي عدد صحيح .

ومنه إشارة كثير الحدود موجبة من اجل كل عدد صحيح k اذن الجداء xy له إشارة موجبة وهذا يعني أنّ x و y من نفس الإشارة

3) كتابة عبارتي u_α و v_β بدلالة α و β عل الترتيب :

نلاحظ أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) حسابيتين أي أنّ : $u_\alpha = 505\alpha + 3$ و $v_\beta = 673\beta + 4$.

4) أ) تعيين الحدود المشتركة (u_n) و (v_n) :

نضع : $u_\alpha = v_\beta$ أي : $505\alpha + 3 = 673\beta + 4$ و منه : $505\alpha - 673\beta = 1$ وهي معادلة ذات المجهول (α, β) وحلولها هي حلول المعادلة (E) أي : $\alpha = 673n + 4$ و $\beta = 505n + 3$ مع $n \in \mathbb{N}$ ، بتعويض α و β في عبارتي u_α و v_β نجد :

$$u_\alpha = 339865n + 2023 \text{ و } v_\beta = 339865n + 2023 \text{ و } u_\alpha = v_\beta$$

و منه الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) هي الحدود $339865n + 2023$ أي هي حدود المتتالية الحسابية (w_n) ذات الأساس 339865 و الحد الأول $w_0 = 2023$ أي أنّ : $w_n = 339865n + 2023$.

ب) حساب الجداء p **:**

لدينا : $X_n = \frac{1}{505}(w_n - 2023)$ أي $X_n = \frac{1}{505}(339865n + 2023 - 2023) = \frac{339865n}{505} = 673n$

$X_n = 673n$ ومنه الجداء: $p = X_1.X_2......X_n = 673(1) \times 673(2) \times ... \times 673(n) = 673^n \times n!$

التمرين(56) باك 2019 شعبة الرياضيات م 2

(u_n) متتالية عددية حدودها موجبة معرفة بحدها الأول $u_1=0$ حيث ومن اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1}=u_n+2\sqrt{u_n}+1$$

1) أ) تحقق انه : من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n}=1$

ب) استنتج كتابة الحد العام u_n بدلالة n

2) تحقق انه : من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n=n(n-2)+1$

3) عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها $(n-2)$ يقسم $n-5$

4) أ) من اجل كل عدد طبيعي n حيث ، بين ان : $PGCD(n-2;u_n)=1$

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها $(n-2)(n^2+1)$ يقسم $(n-5)u_n$

حل التمرين(56) باك 2019 شعبة الرياضيات م 2

(u_n) متتالية حدودها موجبة و $u_1=0$ و $u_{n+1}=u_n+2\sqrt{u_n}+1$

1) أ) التحقق ان : $\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n}=1$

لدينا : $u_{n+1}=u_n+2\sqrt{u_n}+1$ أي : $u_{n+1}=\left(\sqrt{u_n}+1\right)^2$ و منه : $\sqrt{u_{n+1}}=\left|\sqrt{u_n}+1\right|$

وبما أن الحدود موجبة فان $\sqrt{u_{n+1}}=\sqrt{u_n}+1$ إذن : $\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n}=1$

ب) استنتاج كتابة الحد العام u_n بدلالة n : لدينا : $\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n}=1$

نعتبر المتتالية (v_n) حيث : $v_n=\sqrt{u_n}$ ومنه $v_{n+1}=\sqrt{u_{n+1}}$ أي أن $v_{n+1}=\sqrt{u_n}+1$ أي $v_{n+1}=v_n+1$ وبالتالي

نجد $v_{n+1}-v_n=1$ و منه فإنّ (v_n) متتالية حسابية أساسها 1 و حدها الأول $v_1=1$ أي : $v_n=n-1$

ومن كون $v_n=\sqrt{u_n}$ يكون : $\sqrt{u_n}=n-1$ و منه : $u_n=(n-1)^2$

2) التحقق : لدينا $u_n=(n-1)^2$ ومنه $u_n=n^2-2n+1$ اذن : $u_n=n(n-2)+1$

3) تعيين قيم الطبيعي n التي من اجلها $(n-2)$ يقسم $n-5$:

نعلم أنّ : $n-2$ يقسم $(n-2)$

و $(n-2)$ يقسم $(n-5)$ ومنه $(n-2)$ يقسم الفرق $(n-2)-(n-5)$ أي ان $(n-2)$ يقسم 3

و منه : $(n-2)\in\{-3;-1;1;3\}$ و بالحساب نجد : $n\in\{1;3;5\}$ حيث n طبيعي

4) أ) تبيان ان : $PGCD(n-2;u_n)=1$:

لدينا : $u_n=n(n-2)+1$ أي : $u_n-n(n-2)=1$ اذن يجود عددان صحيحان $\alpha=1$ و $\beta=-n$ بحيث

$$\alpha u_n+\beta(n-2)=1$$

و منه حسب مبرهنة بيزو يكون $n-2$ و u_n أوليان فيما بينهما أي أن $PGCD(n-2;u_n)=1$

ب) تعيين قيم n التي من اجلها $(n-2)(n^2+1)$ يقسم $(n-5)u_n$:

لدينا من السؤال (أ) $PGCD(n-2;u_n)=1$ و $(n-2)(n^2+1)$ قاسم لـ $(n-5)u_n$ تعني أنّ $(n-2)$ قاسم لـ $(n-5)$

ومما سبق وجدنا $n\in\{1;3;5\}$ ولدينا ايضا $(n-2)(n^2+1)$ يقسم $(n-5)u_n$

من أجل $n=1$ فان $-2=(1+1)(-2)=\left(n-2\right)\left(n^2+1\right)$ و $\left(n-5\right)u_n=-4u_1=0$ فالخاصية محققة أي -2 يقسم 0

من أجل $n=3$ فان $10=(1+1)(-2)=\left(n-2\right)\left(n^2+1\right)$ و $\left(n-5\right)u_n=-2u_3=-8$ فالخاصية غير محققة لان 10 لا يقسم -8

من أجل $n=5$ فان $78=\left(n-2\right)\left(n^2+1\right)$ و $\left(n-5\right)u_n=0\times u_5=0$ فالخاصية محققة أي 78 يقسم 0

و منه القيم التي تحقق هي : $n\in\{3;5\}$.

التمرين(57) باك 2020 الشعبة تقني رياضي م 1

نعتبر المعادلتين : $693x-216y=738\ ...(E_1)$ و $77x-24y=82\ ...(E_2)$ حيث x و y عددان صحيحان

(1) جد $PGCD(693;216)$ واستنتج ان المعادلتين متكافئتان .

(2) تحقق أن الثنائية $(2;3)$ حل للمعادلة (E_2) ثم أوجد حلولها في $Z\times Z$.

(3) جد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E_2) التي تحقق $|y-x|\le 54$.

(4) ليكن N عددا طبيعيا يكتب $\overline{\beta 68\alpha}$ في النظام ذي الاساس 9 ويكتب $\overline{1\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذي الاساس 6 . α و β طبيعيان . جد العددين α و β ثم اكتب العدد N في النظام العشري .

حل التمرين (57)باك 2020 الشعبة تقني رياضي م 1

$693x-216y=738\ ...(E_1)$ و $77x-24y=82\ ...(E_2)$

(1) تعيين $PGCD(693;216)$:

$693=3^2\times 7\times 11$ و $216=2^3\times 3^3$ ومنه $PGCD(693;216)=3^2=9$

بقسمة أطراف المعادلة (E_1) على 9 نجد $77x-24y=82$ ومنه نستنتج ان المعادلتين متكافئتان .

(2) نعوض الثنائية $(2;3)$ في (E_2) نجد $77(2)-24(3)=154-72=82$ اذن الثنائية حل للمعادلة (E_2)

لدينا $\begin{cases}77x-24y=82\\77(2)-24(3)=82\end{cases}$ وبطرح الثانية من الاولى نجد $77\left(x-2\right)=24\left(y-3\right)$

لدينا $24/24\left(y-3\right)$ ومنه $24/77\left(x-2\right)$ وبما ان 24 و 77 أوليان فيما بينهما فانه حسب مبرهنة غوس

العدد 24 يقسم $(x-2)$ أي $x-2=24k$ ومنه $x=24k+2$

وبالتعويض في $77\left(x-2\right)=24\left(y-3\right)$ نجد $y-3=77k$ ومنه $y=77k+3$

اذن حلول المعادلة (E_2) هي $(x;y)=(24k+2;77k+3)$ حيث k عدد صحيح

(3) إيجاد $(x;y)$ حلول المعادلة (E_2) التي تحقق $|y-x|\le 54$:

$|y-x|\le 54$ تعني $|77k+3-24k-2|\le 54$ أي $|53k+1|\le 54$ ومنه $-54\le 53k+1\le 54$

أي $-55\le 53k\le 53$ ومنه $\frac{-55}{53}\le k\le 1$ ومنه قيم k هي $\{-1;0;1\}$

وبالتعويض نجد الثنائيات : $(26;80)$، $(2;3)$، $(-22;-74)$

(4) $N=\overline{\beta 68\alpha}^{9}=\overline{1\alpha\beta 0\alpha}^{6}$ حيث $\alpha\prec 6$ و $\beta\prec 6$ إيجاد العددين α و β :

$$\alpha\times 6^0+0\times 6+\beta\times 6^2+\alpha\times 6^3+1\times 6^4=\alpha\times 9^0+8\times 9+6\times 9^2+\beta\times 9^3$$

أي $\alpha+36\beta+216\alpha+1296=\alpha+72+486+729\beta$ ومنه $693\beta-216\alpha=738$

حلول هذه المعادلة هي حلول المعادلة (E_1) وهي نفسها حلول (E_2) ومنه $(\beta;\alpha)=(24m+2;77m+3)$

حيث m عدد طبيعي .

وبما ان $\alpha\prec 6$ و $\beta\prec 6$ فان $m=0$ وبالتالي $(\beta;\alpha)=(2;3)$

كتابة العدد N في النظام العشري :

$$N=\alpha+36\beta+216\alpha+1296=3+36(2)+216(3)+1296=2019$$

التمرين(58) باك 2020 الشعبة تقني رياضي م 2

(1) (أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 5

(ب) استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد : $8^{2020}-2\times 3^{1441}-1$ على 5

(2) من اجل كل عدد طبيعي n نعتبر العدد الطبيعي a_n حيث $a_n=3^{n+1}+4$. عين الاعداد الطبيعية n التي يكون من اجلها : $a_n\equiv 0[5]$

(3) نعتبر العدد الطبيعي b_n حيث $b_n=7a_n+5$

(أ) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الاكبر للعددين a_n و b_n

(ب) بين ان $a_n\equiv 0[5]$ اذا وفقط اذا كان $b_n\equiv 0[5]$

(ج) استنتج الاعداد الطبيعية n التي من اجلها يكون a_n و b_n أوليين فيما بينهما .

حل التمرين(58) باك 2020 الشعبة تقني رياضي م 2

(1) (أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 5 :

$3^0\equiv 1[5]$ و $3^1\equiv 3[5]$ و $3^2\equiv 4[5]$ و $3^3\equiv 2[5]$ و $3^4\equiv 1[5]$

اذن $3^{4k}\equiv 1[5]$ و $3^{4k+1}\equiv 3[5]$ و $3^{4k+2}\equiv 4[5]$ و $3^{4k+3}\equiv 2[5]$

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
البواقي	1	3	4	2

(ب) استنتاج باقي القسمة الاقليدية للعدد : $8^{2020}-2\times 3^{1441}-1$ على 5 :

لدينا $8\equiv 3[5]$ و $2020=4\times 505$ ومنه $8^{2020}\equiv 3^{4\times 2020}[5]$ وبالتالي $8^{2020}\equiv 1[5]$

ولدينا $1441=4\times 360+1$ ومنه $3^{1441}\equiv 3[5]$ إذن $2\times 3^{1441}\equiv 1[5]$

اذن $8^{2020}-2\times 3^{1441}-1\equiv (1-1-1)[5]$ أي $8^{2020}-2\times 3^{1441}-1\equiv -1[5]$ اذن $8^{2020}-2\times 3^{1441}-1\equiv 4[5]$

باقي قسمة العدد $8^{2020}-2\times 3^{1441}-1$ على 5 هو 4 .

(2) تعيين الاعداد الطبيعية n التي يكون من اجلها : $a_n\equiv 0[5]$ حيث $a_n=3^{n+1}+4$

$a_n\equiv 0[5]$ تعني $3^{n+1}+4\equiv 0[5]$ أي $3^{n+1}\equiv -4[5]$ أي $3^{n+1}\equiv 1[5]$

ومن جدول البواقي نجد $n+1=4k$ وبالتالي $n=4k-1$ حيث $k\succ 0$ (او $n=4k+3$)

(3)(أ) تعيين القيم الممكنة لـ : $d=p\gcd(a_n;b_n)$ حيث $b_n=7a_n+5$

d/a_n ومنه $d/7a_n$ وبما أن d/b_n أي $d/7a_n+5$ وبالتالي $d/(7a_n+5)-7a_n$

ومنه نجد $d/5$ وبالتالي القيم الممكنة $p\gcd(a_n;b_n)$ هي $\{1;5\}$

(ب) تبيان ان $a_n\equiv 0[5]$ اذا وفقط اذا كان $b_n\equiv 0[5]$

– اذا كان $a_n\equiv 0[5]$ فان $7a_n\equiv 0[5]$ ومنه $7a_n+5\equiv 5[5]$ أي $7a_n+5\equiv 0[5]$ ومنه $b_n\equiv 0[5]$

– اذا كان $b_n\equiv 0[5]$ فهذا يعني $7a_n+5\equiv 0[5]$ ومنه $7a_n\equiv 0[5]$ ومنه $5a_n+2a_n\equiv 0[5]$ أي $2a_n\equiv 0[5]$

وبالتالي $6a_n\equiv 0[5]$ أي $a_n+5a_n\equiv 0[5]$ وبالتالي $a_n\equiv 0[5]$

(ج) استنتاج الاعداد الطبيعية n التي من اجلها يكون a_n و b_n أوليين فيما بينهما :

يكون a_n و b_n أوليين فيما بينهما اذا كان a_n ليس مضاعفا للعدد 5 . ومن السؤال (2) ينتج ان a_n ليس مضاعفا للعدد 5

اذا كان $n\neq 4k-1$ أي $n\neq 4k+3$ وبالتالي قيم n هي : $\{4k;4k+1;4k+2\}$

التمرين(59) باك 2020 الشعبة رياضيات م 1

ليكن n عددا طبيعيا اكبر تماما من 1 .نعتبر الأعداد الطبيعية : $a=4n+1$ و $b=6n+1$ و $c=3n+2$

(1) أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما

(2) نسمي α القاسم المشترك الأكبر للعددين a و c .

أثبت أن α يقسم 5 ثم عين الأعداد الطبيعيةى n بحيث يكون $\alpha=5$

(3)نسمي β القاسم المشترك الأكبر للعددين a و bc

(أ) أثبت أن α يقسم β

(ب) أثبت أن العددين β و b أوليان فيما بينهما ثم استنتج أن $\alpha=\beta$

(4) نعتبر العددين الطبيعيين A و B حيث $A=4n^2-3n-1$ و $B=18n^3-3n^2-13n-2$

(أ) بين أن كلا من العددين A و B مضاعف للعدد الطبيعي $(n-1)$

(ب) نضع $d=PGCD(A;B)$. عبر حسب قيم α عن d بدلالة n . (لاحظ أن $bc=18n^2+15n+2$)

حل التمرين(59) باك 2020 الشعبة رياضيات م 1

$a=4n+1$ و $b=6n+1$ و $c=3n+2$ و $n\succ 1$

(1) اثبات أن a و b أوليان فيما بينهما :

نلاحظ أن $3a-2b=3(4n+1)-2(6n+1)=12n+3-12n-2=1$ أي $3a-2b==1$

ومنه حسب مبرهنة بيزو فان العددين a و b أوليان فيما بينهما .

(2) $PGCD(a;c)=\alpha$ حيث $a=4n+1$ و $c=3n+2$

اثبات أن α يقسم 5 :

لدينا (α / a و α / c) ومنه ($\alpha / 3a$ و $\alpha / 4c$) اذن $\alpha / 4c-3a$

أي $\alpha / 4(3n+2)-3(4n+1)=5$ اذن $\alpha / 5$ ومنه قيم α هي 1 أو 5 .

تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $\alpha=5$:

$\alpha=5$ تعني $\begin{cases} a\equiv 0[5] \\ c\equiv 0[5] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 4n+1\equiv 0[5] \\ 3n+2\equiv 0[5] \end{cases}$ وبالطرح نجد $n-1\equiv 0[5]$ أي $n\equiv 1[5]$

اذن قيم n هي : $n=5k+1$ حيث k طبيعي

(3) $\beta=PGCD(a;bc)$

(أ) اثبات أن α يقسم β : بما ان $PGCD(a;c)=\alpha$ فان (α / a و α / c) ومنه α / bc اذن

$\alpha / PGCD(a;bc)$ أي ان α يقسم β

(ب) اثبات أن β و b أوليان فيما بينهما :

ليكن d قاسم مشترك للعددين β و b أي (d / β و d / b) أي (d / a و d / b) ومنه $d / PGCD(a;b)$

وبما ان a و b أوليان فيما بينهما فان $d=1$ وبالتالي β و b أوليان فيما بينهما

- استنتاج أن $\alpha=\beta$:

لدينا $PGCD(a;b)=1$ و $PGCD(a;c)=\alpha$

ومنه $\beta=PGCD(a;bc)=PGCD(a;c)=\alpha$ اذن $\alpha=\beta$

(4) $A=4n^2-3n-1$ و $B=18n^3-3n^2-13n-2$

(أ) العدد A مضاعف للعدد الطبيعي $(n-1)$ لان $A=4n^2-3n-1=(n-1)(4n+1)$

العدد B مضاعف لـ $(n-1)$ لان بالقسمة الاقليدية نجد $18n^3-3n^2-13n-2=(n-1)(18n^2+15n+2)$

(ب) $d=PGCD(A;B)$ و $bc=18n^2+15n+2$

التعبير عن d بدلالة n حسب قيم α :

$$d=PGCD(A;B)=PGCD((n-1)(4n+1);(n-1)(18n^2+15n+2))=$$
$$=(n-1)PGCD((4n+1);(18n^2+15n+2))=(n-1)PGCD(a;bc)=(n-1).\beta=(n-1).\alpha$$

قيم α هي 1 أو 5

ومنه اذا كان $\alpha=1$ فان $d=PGCD(A;B)=(n-1)$

واذا كان $\alpha=5$ فان $d=PGCD(A;B)=5(n-1)$

التمرين(60) باك 2020 الشعبة رياضيات م 2

(1) حل المعادلة $3x-5y=2$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان .

(2)(أ) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 7

(ب) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 11 .

(3)عين الاعداد الطبيعية n بحيث يكون : $14\times 4^n+11\times 9^n-4\equiv 0[77]$

(4) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم نضع $u_n = 3\times 4^n + 4\times 9^n$ و $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{15n}$

(أ) عبر عن S_n بدلالة n

(ب) اثبت ان S_n مضاعف للعدد 77 .

حل التمرين(60) باك 2020 الشعبة رياضيات م 2

(1) نلاحظ ان الثنائية $(-1;-1)$ حل للمعادلة $3x - 5y = 2$ لأن $3(-1) - 5(-1) = 2$

ومنه $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 3(-1) - 5(-1) = 2 \end{cases}$ وبالطرح نجد : $3(x+1) - 5(y+1) = 0$ ومنه $3(x+1) = 5(y+1)$

منه $3/3(x+1)$ $3/5(y+1)$ وبما ان 3و5 اوليان فيما بينهما فان $3/(y+1)$ أي $y+1 = 3k$ إذن $y = 3k-1$

حيث k عدد صحيح . وبتعويض y نجد $x = 5k-1$

اذن مجموعة الحلول هي : $S = \{(5k-1;3k-1)./ k\in Z\}$

(2)(أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 7:

$9^0 \equiv 1[7]$ و $9^1 \equiv 2[7]$ و $9^2 \equiv 4[7]$ و $9^3 \equiv 1[5]$

اذن $9^{3k} \equiv 1[7]$ و $9^{3k+1} \equiv 2[7]$ و $9^{3k+2} \equiv 4[7]$

(ب) دراس بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 11 :

$4^0 \equiv 1[11]$ و $4^1 \equiv 4[11]$ و $4^2 \equiv 5[11]$ و $4^3 \equiv 9[11]$ و $4^4 \equiv 3[11]$ و $4^5 \equiv 1[11]$

$n =$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
$4^n \equiv$	1	4	5	9	3

(3)تعيين الاعداد الطبيعية n بحيث يكون : $14\times 4^n + 11\times 9^n - 4 \equiv 0[77]$

يكون العدد $14\times 4^n + 11\times 9^n - 4$ يقبل القسمة على 77 اذا كان يقبل القسمة على كل من 7 و 11 لأن $p\gcd(7;11) = 1$

اذن يجب ان يكون $14\times 4^n + 11\times 9^n - 4 \equiv 0[7]$ و $14\times 4^n + 11\times 9^n - 4 \equiv 0[11]$

$14 \equiv 0[7]$ و $11 \equiv 4[7]$ ومنه $14\times 4^n + 11\times 9^n - 4 \equiv 0[7]$ تعني $4\times 9^n - 4 \equiv 0[7]$

أي $4\times 9^n \equiv 4[7]$ ومنه $9^n \equiv 1[7]$ لان $(4;7) = 1$ ومن الجدول نجد ان $9^n \equiv 1[7]$ تتحقق

من اجل $n = 3k$ حيث k طبيعي .

$14\times 4^n + 11\times 9^n - 4 \equiv 0[11]$ تعني $3\times 4^n + 0 - 4 \equiv 0[11]$ أي $3\times 4^n \equiv 4[11]$

أي $3\times 4^n \equiv 15[11]$ وبما ان $(3;11) = 1$ نجد $4^n \equiv 5[11]$ ومن الجدول نجد : $n = 5k'+2$ حيث k' طبيعي.

اذن ($n = 3k$ و $n = 5k'+2$) أي $n = 3k = 5k'+2$ وتعني $3k - 5k' = 2$

$3k - 5k' = 2$ حلولها هي حلول المعادلة $3x - 5y = 2$ ومنه $(k;k') = (5p-1;3p-1)$

وبالتالي $n = 3k = 3(5p-1) = 15p - 3$ أي $n = 15p - 3$ حيث p عدد طبيعي غير معدوم.

(4) $u_n = 3\times 4^n + 4\times 9^n$ و $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{15n}$

(أ) التعبير عن S_n بدلالة n : عدد الحدود هو $15n$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{15n} = 3\times 4^1 + 4\times 9^1 + 3\times 4^2 + 4\times 9^2 + ... + 3\times 4^{15n} + 4\times 9^{15n}$$

$$= \left(3\times 4^1 + 3\times 4^2 + ... + 3\times 4^{15n}\right) + \left(4\times 9^1 + 4\times 9^2 + ... + 4\times 9^{15n}\right) =$$

$$= 3(4^1 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^{15}) + 4(9^1 + 9^2 + ... + 9^{15n})$$

$4^1 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^{15}$ هو مجموع $15n$ حدلمتتالية هندسية حدها الاول 4 واساسها 4

$9^1 + 9^2 + ... + 9^{15n}$ هو مجموع $15n$ حدلمتتالية هندسية حدها الاول 9 واساسها 9

إذن $S_n = 3\times 4\times \frac{4^{15n} - 1}{4-1} + 4\times 9\times \frac{9^{15n} - 1}{9-1} = (4^{15n+1} - 4) + \frac{1}{2}\times (9^{15n+1} - 9)$

(ب) اثبات ان S_n مضاعف للعدد 77 أي $S_n \equiv 0[77]$ حيث $S_n = (4^{15n+1}-4)+\frac{1}{2}\times(9^{15n+1}-9)$

لدينا $4^5 \equiv 23[77]$ ومنه $(4^5)^3 \equiv 23^3[77]$ أي $4^{15} \equiv 1[77]$ ومنه $4^{15n} \equiv 1[77]$ اذن $4^{15n+1} \equiv 4[77]$

وبالتالي $4^{15n+1}-4 \equiv 0[77]$

ولدينا ايضا $9^5 \equiv 67[77]$ ومنه $(9^5)^3 \equiv 67^3[77]$ أي $9^{15} \equiv 1[77]$ ومنه $9^{15n} \equiv 1[77]$ اذن $9^{15n+1} \equiv 9[77]$

وبالتالي $9^{15n+1}-9 \equiv 0[77]$ ومنه ينتج $\frac{1}{2}\times(9^{15n+1}-9) \equiv 0[77]$ اذن $S_n \equiv 0[77]$

التمرين(61) باك 2021 تقني رياضي الموضوع 1

(1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 9

(2) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2021^{1442} على 9

(3) بين أن العدد : $2021^{1442}+1691^{1954}-8$ مضاعف للعدد 9

(4) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، العدد $1443+2021^{6n+1}+5^{6n}$ مضاعف للعدد 9

(5) من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_n = 2021^{1442}+1691^{1954}+5n$

عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون : $A_n \equiv 0[9]$

حل التمرين(61) باك 2021 تقني رياضي الموضوع 1

(1) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 9 :

$5^0 \equiv 1[9]$ و $5^1 \equiv 5[9]$ و $5^2 \equiv 7[9]$ و $5^3 \equiv 8[9]$ و $5^4 \equiv 4[9]$ و $5^5 \equiv 2[9]$ و $5^6 \equiv 1[9]$

ومنه البواقي هي كما يلي :

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$k \in N$
$5^n \equiv$	1	5	7	8	4	2	$[9]$

(2) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2021^{1442} على 9 :

$2021 \equiv 5[9]$ ومنه $2021^{1442} \equiv 5^{1442}[9]$ وبما أن $1442 = 6\times240+2$ فانه من الجدول السابق لدينا

$5^{1442} \equiv 7[9]$ ومنه $2021^{1442} \equiv 7[9]$ اذن باقي القسمة هو 7 .

(3) تبيان أن : $2021^{1442}+1691^{1954}-8$ مضاعف للعدد 9

$1691 \equiv 8[9]$ و منه $1691 \equiv -1[9]$ وبالتالي : $1691^{1954} \equiv (-1)^{1954}[9]$ أي $1691^{1954} \equiv 1[9]$

لدينا $2021^{1442} \equiv 7[9]$ ومنه بالجمع نجد : $2021^{1442}+1691^{1954}-8 \equiv 7+1-8[9]$ أي

$2021^{1442}+1691^{1954}-8 \equiv 0[9]$ وهذا يعني $2021^{1442}+1691^{1954}-8$ مضاعف للعدد 9

(4) برهان أن العدد $1443+2021^{6n+1}+5^{6n}$ مضاعف للعدد 9 :

من الجدول السابق لدينا $2021^{6n+1} \equiv 5^{6n+1}[9]$ أي $2021^{6n+1} \equiv 5[9]$

و $5^{6n}\equiv 1[9]$ و $1443\equiv 3[9]$ ومنه بالجمع نجد : $5^{6n}+2021^{6n+1}+1443\equiv 0[9]$

إذن $5^{6n}+2021^{6n+1}+1443$ مضاعف للعدد 9

(5) $A_n=2021^{1442}+1691^{1954}+5n$ تعيين الأعداد n التي تحقق : $A_n\equiv 0[9]$

من الأسئلة السابقة لدينا $2021^{1442}\equiv 7[9]$ و $1691^{1954}\equiv 1[9]$ ومنه $A_n\equiv 0[9]$ تعني $7+1+5n\equiv 0[9]$ أي $5n+8\equiv 0[9]$ أي $5n\equiv 1[9]$ ومنه $10n\equiv 2[9]$ أي $n+9n\equiv 2[9]$ وبما أن $9n\equiv 0[9]$ فإن $n\equiv 2[9]$

وبالتالي $n=9k+2$ حيث k عدد طبيعي

التمرين(62) باك 2021 تقني رياضي الموضوع 2

نعتبر المعادلة (E)... $13x-9y=1$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان

(1)(أ) تحقق انه اذا كانت الثنائية $(x;y)$حلا للمعادلة (E)فان $x\equiv 7[9]$

(ب) استنتج حلول المعادلة (E)

(2)(أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على5

(ب) نضع $A_n=3^{4n}+3^{4n+1}+3^{4n+2}-3$ حيث n عدد طبيعي

بين انه من أجل كل عدد طبيعي n ، A_n يقبل القسمة على 5

(3) بفرض ان $(x;y)$ حل للمعادلة (E) حيث x و y عددان طبيعيان

عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $n+3^{y-x}+2023^{2022}$ القسمة على 5 .

حل التمرين(62) باك 2021 تقني رياضي الموضوع 2

(1)(أ) التحقق انه اذا كانت $(x;y)$حلا لـ (E)فان $x\equiv 7[9]$ حيث (E) $13x-9y=1$

$13x-9y=1$ تعني $13x=9y+1$ أي $13x\equiv 1[9]$ أي $4x+9x\equiv 1[9]$ ومنه $4x\equiv 1[9]$ أي $-8x\equiv -2[9]$

ومنه $-8x+9x\equiv -2[9]$ إذن $x\equiv -2[9]$ وبالتالي $x\equiv 7[9]$

(ب) استنتاج حلول المعادلة (E):

$x\equiv 7[9]$ تعني $x=9k+7$ حيث k عدد صحيح

وبتعويض $x=9k+7$ في المعادلة (E) نجد $13(9k+7)-9y=1$ ومنه $9y=117k+90$ وبالتالي

$y=13k+10$ ومنه حلول المعادلة هي : $(x;y)=(9k+7;13k+10)$ حيث k عدد صحيح

(2)(أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على5 :

$3^0\equiv 1[5]$ و $3^1\equiv 3[5]$ و $3^2\equiv 4[5]$ و $3^3\equiv 2[5]$ و $3^4\equiv 1[5]$

ومنه التعميم

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k\in N$
$3^n\equiv$	1	3	4	2	$[5]$

(ب) $A_n=3^{4n}+3^{4n+1}+3^{4n+2}-3$ تبيان أن A_n يقبل القسمة على 5 أي $A_n\equiv 0[5]$

لدينا من السؤال السابق $3^{4n}\equiv 1[5]$ و $3^{4n+1}\equiv 3[5]$ و $3^{4n+2}\equiv 4[5]$

ومنه بالجمع $3^{4n}+3^{4n+1}+3^{4n+2}-3\equiv 1+3+4-3[5]$ إذن $A_n\equiv 0[5]$

(3) $(x;y)=(9k+7;13k+10)$ حيث k طبيعي

تعيين قيم العدد n حتى يقبل العدد $n+3^{y-x}+2023^{2022}$ القسمة على 5 أي $n+3^{y-x}+2023^{2022}\equiv 0[5]$

$2023\equiv 3[5]$ ومنه $2023^{2022}\equiv 3^{2022}[5]$ و $2022=4\times 505+2$ ومنه $3^{2022}\equiv 4[5]$

إذن $2023^{2022}\equiv 4[5]$

و لدينا أيضا $y-x=13k+10-9k-7=4k+3$ ومنه $3^{y-x}=3^{4k+3}\equiv 2[5]$

وبالجمع نجد $n+3^{y-x}+2023^{2022}\equiv n+2+4[5]$ أي $n+3^{y-x}+2023^{2022}\equiv n+1[5]$

إذن $n+3^{y-x}+2023^{2022}\equiv 0[5]$ تعني $n+1\equiv 0[5]$ ومنه $n\equiv 4[5]$

وبالتالي القيم هي : $n=5\alpha+4$ حيث α عدد طبيعي

التمرين(63) باك 2021 شعبة الرياضيات الموضوع الأول

(1) نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: (E).....$42x-y=38$ حيث x و y عددان صحيحان.

حل المعادلة (E) علما أن الثنائية $(1;4)$ حل لها

(2) a ; b ; c أعداد طبيعية حيث a غير معدوم :العدد الطبيعي N يكتب : $N=\overline{ab0cb}^{5}=\overline{a7c5}^{8}$

(أ) بين أن الأعداد a و b و c تحقق : $113a=3(c-42b+151)$ ثم استنتج ان $a=3$

(ب)جد العددين الطبيعيين b و c ثم اكتب العدد N في النظام العشري .

(3)(أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 6 .

(ب)بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2021^{2n}+1441^n+4$ مضاعف للعدد 6 .

(ج) نضع $A_n=2021^{2n}+1441^n+2\times 1442^n$. جد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $A_n\equiv 0[6]$

حل التمرين(63) باك 2021 شعبة الرياضيات الموضوع الأول:

(1) المعادلة (E).....$42x-y=38$ حيث $(1,4)$ حل لها

حل المعادلة $\begin{cases}42x-y=38\\42(1)-(4)=38\end{cases}$ بالطرح نجد $42(x-1)=(y-4)$ العدد 42 يقسم $y-4$ و منه

$y-4=42k : k\in\mathbb{Z}$ أي أن $y=4+42k : k\in Z$ بالتعويض نجد $x=1+k : k\in\mathbb{Z}$ مجموع الحلول هي

$S=\{\ (1+k\ ;42k+4)\ \ :\ k\in\mathbb{Z}\}$

(2) a ; b ; c أعداد طبيعية غير معدومة وحيث : $N=\overline{ab0cb}^{5}=\overline{a7c5}^{8}$

(أ)لدينا $N=\overline{a7c5}^{8}$ يعني أن $N=5+8c+8^2\times 7+8^3a$ أي أن $N=453+8c+512a$

و $N=\overline{ab0cb}^{5}$ يعني أن $N=b+5^1c+0\times 5^2+5^3b+5^4a$ يعني $N=5c+126b+625a$

بالمساواة نجد $625a+126b+5c=512a+8c+453$ أي أن $113a=-126b+3c+453$ يعني أن

$113a=3(c-42b+151)$ و هو المطلوب .

بما أن $pgcd\,(3\,;113)=1$ فحسب مبرهنة غوص 3 قاسم للعدد a و a أصغر تماما من 5 و منه $a=3$.

(ب) لدينا $113a=3(c-42b+151)$ ومنه

$113\times3=3(c-42b+151)$ أي أن $113=(c-42b+151)$ يعني أن $42b-c=38$

وحلولها هي حلول المعادلة (E) ومنه نستنتج أن $k\in\mathbb{N}$: $b=1+k$ و $c=4+42k$ و العددان b ; c

أصغر تماماَ من 5 إذن $k=0$ وبالتالي $b=1$ و $c=4$.

كتابة العدد N في النظام العشري : $N=5\times4+126+625\times3$ و منه $N=2021$

(3) (أ)–دراسة بواقي قسمة 5^n على 6 : من اجل $n=0$ فان $5^0\equiv1[6]$ و $5^1\equiv5[6]$ و $5^2\equiv1[6]$

وبالتالي البواقي هي كما يلي :

$n=$	$2k$	$2k+1$	$k\in N$
$5^n\equiv$	1	5	$[6]$

(ب)–إثبات أن العدد $2021^{2n}+1441^n+4$ مضاعف للعدد 6

$2021\equiv5\,[6]$ و $5\equiv-1\,[6]$ و منه $2021^{2n}\equiv(-1)^{2n}\,[6]$ يعني أن $2021^{2n}\equiv1[6]$

$1441\equiv1\,[6]$ و منه $1441^n\equiv1[6]$ يعني أن $1441^n+4\equiv5\,[6]$

$2021^{2n}\equiv1[6]$ و $1441^n+4\equiv5\,[6]$ بالجمع نجد $2021^{2n}+1441^n+4\equiv6[6]$ و منه

$2021^{2n}+1441^n+4\equiv0\,[6]$ أي ان $2021^{2n}+1441^n+4$ مضاعف للعدد 6 .

(ج)– نضع $A_n=2021^{2n}+1441^n+2\times1442^n$ إيجاد قيم n التي من أجلها $A_n\equiv0[6]$

لدينا $2021^{2n}+1441^n+4\equiv0\,[6]$ يعني $2021^{2n}+1441^n\equiv-4\,[6]$

و $1442\equiv2\,[6]$ و منه $1442^n\equiv2^n\,[6]$ بالضرب في 2 نجد $2\times1442^n\equiv2^{n+1}\,[6]$ ...(*)

و من $2021^{2n}+1441^n\equiv-4\,[6]$ وبالجمع مع (*) نجد $2021^{2n}+1441^n+2\times1442^n\equiv2^{n+1}-4\,[6]$

ويكون $A_n\equiv0[6]$ اذا كان $2^{n+1}-4\equiv0[\,6]$ أي $2^{n+1}\equiv4[\,6]$

$n=$	0	$2k-1$	$2k$	$k\in N^*$
$2^{n+1}\equiv$	2	4	2	$[6]$

و منه $A_n\equiv0[6]$ يكافئ أن $n=2k-1$ و k عدد طبيعي غير معدوم .(n عدد فردي)

التمرين(64) باك جوان 2021 الموضوع الثاني شعبة الرياضيات :

(1)نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $7x-6y=1....(E)$ حيث x و y صحيحان

(أ)حل المعادلة (E) علما ان $(1;1)$ حل لها .

(ب) تحقق أنه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فان xy عدد طبيعي غير معدوم .

(2)(أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7

(ب)-بين أن العدد $4\times 2019^{2021}+2022^{2022}$ يقبل القسمة على 7

(3)برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير المعدوم n : $4^n \equiv 4[6]$

(4)نفرض أن $(a\,;b)$ حل للمعادلة (E) و A عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 4 كما يلي

$A=\overline{333...30}^4$ (عدد أرقامه هو $a\times b$)

(أ) بين أن : $A=4^{ab}-4$

(ب)تحقق أن $A\equiv 0[6]$ ثم عين كل الثنائيات $(a\,;b)$ التي من أجلها يكون A قابلا القسمة على 42

<u>حل التمرين(64) باك جوان 2021 الموضوع الثاني شعبة الرياضيات :</u>

(1)(ا) حل المعادلة $(E)....7x-6y=1$ حيث الثنائية $(1;1)$ حل لها

لدينا $\begin{cases}7x-6y=1\\7(1)-6(1)=1\end{cases}$ بالطرح نجد $7(x-1)=6(y-1)$ بما أن $pgc\,d(7;6)=1$ حسب مبرهنة غوس فإن

7 قاسم للعدد $(y-1)$ يعني أن $y-1=7k:\ k\in\mathbb{Z}$ و منه $y=1+7k:\ k\in\mathbb{Z}$ بالتعويض في المعادلة نجد أن

$x=1+6k:\ k\in\mathbb{Z}$ إذن مجموعة الحلول هي . $S=\{(1+6k;1+7k):\ k\in\mathbb{Z}\}$

(ب)التحقق ان xy عدد طبيعي غير معدوم : إذا كان $(x;y)$ حل للمعادلة (E) يعني $k\in\mathbb{Z}$: $\begin{cases}x=1+6k\\y=1+7k\end{cases}$

و منه $k\in\mathbb{Z}$: $xy=42k^2+13k+1$

xy عدد طبيعي ندرس إشارة $42k^2+13k+1$ نحسب مميزه $\Delta=1$ و منه له جذران هما $\frac{-13-1}{84}=-0.16$ و

$\frac{-13+1}{84}=-0.14$ بما أن k عدد صحيح فإن xy لا ينعدم و لا يوجد عدد صحيح محصور بين العددين -0.16

و -0.14 و منه اشارة $42k^2+13k+1$ هي كما يلي :

k	$-\infty$		-0.16		-0.14		$+\infty$
xy		+	0	-	0	+	

وبالتالي من اجل $k\in]-\infty;-0.16[\cup]-0.14;+\infty[$ فان $xy>0$ أي أن xy عدد طبيعي غير معدوم .

(2)(أ)-دراسة بواقي قسمة 4^n على 7 : $4^0\equiv 1[7]$ و $4^1\equiv 4[7]$ و $4^2\equiv 2[7]$ و $4^3\equiv 1[7]$

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	$k\in\mathbb{N}$
$4^n\equiv$	1	4	2	$[7]$

البواقي هي 1 و 4 و 2 .

(ب)-إثبات أن $4\times 2019^{2021}+2022^{2022}$ يقبل القسمة على 7 :

لدينا $2019\equiv 3\,[7]$ و $3\equiv -4\,[7]$ و منه $2019\equiv -4\,[7]$ أي $2019^{2021}\equiv(-4)^{2021}\,[7]$

أي أن $2019^{2021}\equiv -4^{2021}\ [7]$ بما أن $2021=3\times 673+2$ فإننا نستنتج من الجدول أن
$2019^{2021}\equiv -2\ [7]$

ومنه نجد $4\times 2019^{2021}\equiv -8\ [7]$ و $-8\equiv -1\ [7]$ إذن $4\times 2019^{2021}\equiv -1\ [7]$ ....(1)

ونعلم ان $2022\equiv 6\ [7]$ و $6\equiv -1\ [7]$ و منه $2022^{2022}\equiv (-1)^{2022}\ [7]$ إذن $2022^{2022}\equiv 1\ [7]$ ....(2)

وبجمع (1) و(2) نجد $4\times 2019^{2021}+2022^{2022}\equiv 0[7]$ إذن $4\times 2019^{2021}+2022^{2022}$ يقبل القسمة على 7

(3) البرهان بالتراجع أن : $4^n\equiv 4[6]$ حيث n غير معدوم

$4^1\equiv 4[6]$ محققة و نفرض أن $4^n\equiv 4[6]$ صحيحة و لنبرهن صحة $4^{n+1}\equiv 4[6]$

لدينا $4^n\equiv 4[6]$ و بالضرب في 4 نجد : $4^{n+1}\equiv 16[6]$ و $16\equiv 4[6]$ إذن $4^{n+1}\equiv 4[6]$

و منه من أجل كل عدد طبيعي غير المعدوم n : $4^n\equiv 4[6]$.

(4) نفرض أن $(a\,;b)$ حل للمعادلة (E) و $A=\overline{333...30}^{\,4}$ (عدد أرقامه هو $a\times b$) علما أننا بينا أن $a\times b$ عدد طبيعي

(أ)إثبات أن $A=4^{ab}-4$:

$$A=3\times 4^{ab-1}+3\times 4^{ab-2}+...+3\times 4^2+3\times 4+0\times 4^0=3\left(4+4^2+....+4^{ab-1}\right)$$

ومنه A هو مجموع متتالية هندسية اساسها 4 أي $A=3\times 4.\left(\dfrac{4^{ab-1}-1}{4-1}\right)$

و منه $A=4\left(4^{ab-1}-1\right)$ إذن $A=4^{ab}-4$ و هو المطلوب.

(ب)التحقق أن $A\equiv 0[6]$: بما أنه من أجل كل عدد طبيعي غير المعدوم n : $4^n\equiv 4[6]$

و نعلم ان ab عدد طبيعي فإن $4^{ab}-4\equiv 0[6]$ أي أن $A\equiv 0[6]$.

– تعيين الثنائيات $(a\,;b)$بحيث يكون A قابل للقسمة على 42 :

A قابل للقسمة على 42 و حيث $42=6\times 7$ و $A\equiv 0[6]$ و $pgcd(7;6)$ يعني أن A قابل للقسمة على 7

A قابل للقسمة على 7 يعني أن $4^{ab}-4\equiv 0[7]$أي أن$4^{ab}\equiv 4[7]$ و من دراسة بواقي قسمة 4^n على 7

نجد أن $4^{ab}\equiv 4[7]$ لما $ab=3\alpha+1\ :\ \alpha\in\mathbb{N}$ أي أن $ab\equiv 1[3]$ و $ab\equiv 42k^2+13k+1\ :\ k\in\mathbb{N}$

أي أن $42k^2+13k+1\equiv 1[3]$ بما أن $42\equiv 0[3]$ و $13\equiv 1[3]$ يعني أن $k+1\equiv 1[3]$ و منه
$k=3k'\ :\ k'\in\mathbb{N}$

ومنه الثنائيات $(a\,;b)$ هي : $(a\,;b)=(1+6k\,;1+7k)=(1+18k'\,;1+21k')\ :\ k'\in\mathbb{N}$

وهي القيم المطلوبة حتى يكون A قابل للقسمة على 42 .

<u>التمرين(65) باك 2022 تقني رياضي الموضوع الاول</u>

a و b عددان طبيعيان حيث $a=2022$ و $b=124$

(1) عين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7 .

(2) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7

(3) بين أن العدد a^a+b^b+4 يقبل القسمة على 7 .

(4) من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_n=2021^n+2022^n+2023^n+2024^n$

بين أن $A_n\equiv 1+5^n+6^n[9]$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون A_n+1: مضاعف للعدد 7

حل التمرين(65) باك 2022 تقني رياضي الموضوع الاول

a و b عددان طبيعيان حيث $a=2022$ و $b=124$

(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية : $a\equiv 6[7]$ و $b\equiv 5[7]$.

(2) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7 :

$5^0\equiv 1[7]$ و $5^1\equiv 5[7]$ و $5^2\equiv 4[7]$ و $5^3\equiv 6[7]$ و $5^4\equiv 2[7]$ و $5^5\equiv 3[7]$ و $5^6\equiv 1[7]$

n	6k	6k+1	6k+2	6k+3	6k+4	6k+5
بواقي قسمة 5^n على 7	1	5	4	6	2	3

(3) تبيان أن العدد a^a+b^b+4 يقبل القسمة على 7 :

لدينا $a\equiv 6[7]$ ومنه $2022^{2022}\equiv 6^{2022}[7]$ وبما أن $6\equiv -1[7]$ فإن $6^{2022}\equiv(-1)^{2022}[7]$ ومنه $6^{2022}\equiv 1[7]$

ومنه $a^a\equiv 1[7]$

ومن جهة أخرى لدينا $124\equiv 5[7]$ ومنه $124^{124}\equiv 5^{124}[7]$ و $124=6(20)+4$ ومن البواقي لدينا

$5^{124}\equiv 2[7]$

إذن $b^b\equiv 2[7]$ وبالتالي $a^a+b^b+4\equiv 1+2+4[7]$ أي $a^a+b^b+4\equiv 0[7]$ وتعني a^a+b^b+4 يقبل القسمة على 7

(4) تبيان أن $A_n\equiv 1+5^n+6^n[7]$ حيث : $A_n=2021^n+2022^n+2023^n+2024^n$

لدينا $2022\equiv 6[7]$ ومنه $2022^n\equiv 6^n[7]$ و $2021\equiv 5[7]$ ومنه $2021^n\equiv 5^n[7]$

و $2023\equiv 0[7]$ ومنه $2023^n\equiv 0[7]$ و $2024\equiv 1[7]$ ومنه $2024^n\equiv 1[7]$

ومنه ينتج بالجمع : $2021^n+2022^n+2023^n+2024^n\equiv 5^n+6^n+1[7]$ أي $A_n\equiv 1+5^n+6^n[7]$

تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث A_n+1: مضاعف للعدد 7 : أي $A_n+1\equiv 0[7]$

أي يجب ان يكون $1+5^n+(-1)^n+1\equiv 0[7]$ أي $2+5^n+(-1)^n\equiv 0[7]$

وبالتعويض بكل الحالات : $n=6k$ و $n=6k+1$ و $n=6k+2$ و $n=6k+3$ و $n=6k+4$ و

$n=6k+5$ نجد أن العلاقة تتحقق من أجل : $n=6k+2$ أو $n=6k+3$ حيث k عدد طبيعي .

التمرين(66) باك 2022 تقني رياضي الموضوع الثاني

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $a=5n+2$ و $b=n+1$ و $c=9n+2$

و $d=p\gcd(a;b)$ و $d'=p\gcd(b;c)$

(1) عين القيم الممكنة لكل من d و d' ثم استنتج $p\gcd(a;b;c)$

(2) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد b قاسما لـ a

(3) نعتبر المعادلة (E) ... $17x-4y=29$ حيث x و y عددان صحيحان .

بين انه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 1[4]$ ثم حل المعادلة (E)

(4) عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $x\,y \prec 279$

حل التمرين(66) باك 2022 تقني رياضي الموضوع الثاني

(1)(أ) التحقق انه اذا كانت $(x;y)$ حلا لـ (E) فان $x\equiv 7[9]$ حيث (E) $13x-9y=1$

$13x-9y=1$ تعني $13x=9y+1$ أي $13x\equiv 1[9]$ أي $4x+9x\equiv 1[9]$ ومنه $4x\equiv 1[9]$ أي $-8x\equiv -2[9]$

ومنه $-8x+9x\equiv -2[9]$ إذن $x\equiv -2[9]$ وبالتالي $x\equiv 7[9]$

(ب) استنتاج حلول المعادلة (E):

$x\equiv 7[9]$ تعني $x=9k+7$ حيث k عدد صحيح

وبتعويض $x=9k+7$ في المعادلة (E) نجد $13(9k+7)-9y=1$ ومنه $9y=117k+90$ وبالتالي

$y=13k+10$ ومنه حلول المعادلة هي : $(x;y)=(9k+7;13k+10)$ حيث k عدد صحيح

(2)(أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على5 :

$3^0\equiv 1[5]$ و $3^1\equiv 3[5]$ و $3^2\equiv 4[5]$ و $3^3\equiv 2[5]$ و $3^4\equiv 1[5]$

ومنه التعميم

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k\in N$
$3^n\equiv$	1	3	4	2	$[5]$

(ب) $A_n=3^{4n}+3^{4n+1}+3^{4n+2}-3$ تبيان أن A_n يقبل القسمة على 5 أي $A_n\equiv 0[5]$

لدينا من السؤال السابق $3^{4n}\equiv 1[5]$ و $3^{4n+1}\equiv 3[5]$ و $3^{4n+2}\equiv 4[5]$

ومنه بالجمع $3^{4n}+3^{4n+1}+3^{4n+2}-3\equiv 1+3+4-3[5]$ إذن $A_n\equiv 0[5]$

(3) $(x;y)=(9k+7;13k+10)$ حيث k طبيعي

تعيين قيم العدد n حتى يقبل العدد $n+3^{y-x}+2023^{2022}$ القسمة على 5 أي $n+3^{y-x}+2023^{2022}\equiv 0[5]$

$2023\equiv 3[5]$ ومنه $2023^{2022}\equiv 3^{2022}[5]$ و $2022=4\times 505+2$ ومنه $3^{2022}\equiv 4[5]$

إذن $2023^{2022}\equiv 4[5]$

و لدينا أيضا $y-x=13k+10-9k-7=4k+3$ ومنه $3^{y-x}=3^{4k+3}\equiv 2[5]$

وبالجمع نجد $n+3^{y-x}+2023^{2022}\equiv n+2+4[5]$ أي $n+3^{y-x}+2023^{2022}\equiv n+1[5]$

إذن $n+3^{y-x}+2023^{2022}\equiv 0[5]$ تعني $n+1\equiv 0[5]$ ومنه $n\equiv 4[5]$

وبالتالي القيم هي : $n=5\alpha+4$ حيث α عدد طبيعي

<u>التمرين(67) باك 2022 رياضي الموضوع الاول</u>

(1) (أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $6^{2n}\equiv 1[7]$ ثم استنتج بواقي القسمة الاقليدية للعدد 6^n على 7 .

(2) بين أن العدد $\left(2021^{2022}+1962^{1443}\right)^{1954}-2$ يقبل القسمة على 7 .

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n=2^n+6^n$ و $S_n=a_0+a_1+...+a_n$

(أ) استنتج حسب قيم العدد الطبيعي n . بواقي القسمة الاقليدية للعدد a_n على 7 .

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_{n+6}\equiv S_n[7]$

(ج) اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n\equiv 2^{n+1}+3\times 6^{n+1}+3[7]$ ثم استنتج قيم n بحيث $S_n\equiv 0[7]$

<u>حل التمرين(67) باك 2022 رياضي الموضوع الاول</u>

(1) (أ) تعيين بواقي قسمة 2^n على 7 :

$2^0\equiv 1[7]$ و $2^1\equiv 2[7]$ و $2^2\equiv 4[7]$ و $2^3\equiv 1[7]$

ومنه البواقي هي في الجدول التالي :

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	$k\in N$
$2^n\equiv$	1	2	4	$[7]$

(ب) تبيان أن: $6^{2n}\equiv 1[7]$. لدينا $6^{2n}=\left(6^2\right)^n$ و $36\equiv 1[7]$ ومنه $6^{2n}\equiv 1[7]$

استنتاج بواقي قسمة 6^n على 7 : لدينا $6^{2n}\equiv 1[7]$ ومنه $6^{2n+1}\equiv 6[7]$

إذن إذا كان : $n=2k$ فإن باقي قسمة 6^n على 7 هو 1

وإذا كان : $n=2k+1$ فإن باقي قسمة 6^n على 7 هو 6

(2) تبيان أن: $\left(2021^{2022}+1962^{1443}\right)^{1954}-2$ يقبل القسمة على 7 أي $\left(2021^{2022}+1962^{1443}\right)^{1954}-2\equiv 0[7]$

لدينا $2021 \equiv 5[7]$ أي $2021 \equiv -2[7]$ ومنه $2021^{2022} \equiv (-2)^{2022}[7]$ أي $2021^{2022} \equiv 2^{2022}[7]$

و $2022 = 3(674)$ ومنه $2021^{2022} \equiv 2^{3(674)}[7]$ وبالتالي : $2021^{2022} \equiv 1[7]$

و $1962 \equiv 2[7]$ ومنه $1962^{1443} \equiv 2^{1443}[7]$ أي $1962^{1443} \equiv 2^{3(481)}[7]$ إذن $1962^{1443} \equiv 1[7]$

وبالتالي $\left(2021^{2022}+1962^{1443}\right) \equiv (1+1)[7]$ و $\left(2021^{2022}+1962^{1443}\right)^{1954} \equiv 2^{1954}[7]$

و منه $\left(2021^{2022}+1962^{1443}\right)^{1954} \equiv 2^{3(651)+1}[7]$ أي $\left(2021^{2022}+1962^{1443}\right)^{1954} \equiv 2[7]$

وأخيرا ينتج أن : $\left(2021^{2022}+1962^{1443}\right)^{1954} - 2 \equiv 0[7]$

(3) $a_n = 2^n + 6^n$ و $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$

(أ) استنتاج بواقي قسمة العدد a_n على 7 :

لدينا $a_n = 2^n + 6^n$ و الدور المشترك بين دراسة بواقي $2^n ; 6^n$ هو العدد 6 .

ومنه تنتج بواقي قسمة العدد a_n على 7 التالية :

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
2^n	1	2	4	1	2	4
6^n	1	6	1	6	1	6
a_n	2	1	5	0	3	3

(ب) تبيان أن : $S_{n+6} \equiv S_n[7]$ و $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ و منه $S_{n+6} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n+6}$

و $a_{n+6} = 2^{n+6} + 6^{n+6} = 2^n \times 2^6 + 6^n \times 6^6$ و $2^6 = 64 \equiv 1[7]$ و $6^6 \equiv (-1)^6[7]$ أي $6^6 \equiv 1[7]$

وبالتالي $a_{n+6} = 2^{n+6} + 6^{n+6} \equiv 2^n + 6^n[7]$ وبالتالي $S_{n+6} \equiv S_n[7]$

(ج) إثبات أن : $S_n \equiv 2^{n+1} + 3\times 6^{n+1} + 3[7]$

لدينا $a_n = 2^n + 6^n$ و $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ أي

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k + \sum_{k=0}^{n} 6^k = 1\times\frac{2^{n+1}-1}{2-1} + 1\times\frac{6^{n+1}-1}{6-1} = 2^{n+1} - 1 + \frac{6^{n+1}-1}{5}$$

ومنه $S_n = 2^{n+1} - 1 + \dfrac{6^{n+1}-1}{5}$ أي $15S_n = 15\times 2^{n+1} - 15 + 3\times 6^{n+1} - 3$

$$15S_n = 15\times 2^{n+1} + 3\times 6^{n+1} - 18$$

وبما أن $15 \equiv 1[7]$ و $-18 \equiv 3[7]$ فإن $S_n \equiv 2^{n+1} + 3\times 6^{n+1} + 3[7]$

-* استنتاج قيم n بحيث $S_n \equiv 0[7]$: أي $2^{n+1} + 3\times 6^{n+1} + 3 \equiv 0[7]$

بتعويض قيم n نجد البواقي التالية :

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$2^{n+1} + 3\times 6^{n+1} + 3 \equiv$	2	3	1	1	4	0	$[7]$

إذن قيم n هي $n = 6k+5$ حيث k طبيعي

التمرين(68) باك 2022 رياضي الموضوع الثاني

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $A_n = n^3 + 5n^2 + 7n + 9$ و $B_n = n + 2$

(1) (أ) بين أن $p\gcd(A_n; B_n) = p\gcd(B_n; 7)$ و

(ب) استنتج القيم الممكنة لـ $p\gcd(A_n; B_n)$

(ج) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون A_n و B_n أوليين فيما بينهما .

(2) نعتبر المعادلة (E) ... $A_2x - B_2y = 29$ حيث x و y عددان صحيحان

(أ)بين انه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[4]$

(ب)عين حلول المعادلة (E)

(3) (أ) استنتج حلول المعادلة (E') ... $51x - 4y = 45$

(ب) عين الثنائيات $(x; y)$حلول المعادلة (E') حيث $3 \leq |y - 12x|$

حل التمرين(68) باك 2022 رياضي الموضوع الثاني

$A_n = n^3 + 5n^2 + 7n + 9$ و $B_n = n + 2$

(1) (أ) تبيان أن $p\gcd(A_n; B_n) = p\gcd(B_n; 7)$

لدينا $n^3 + 5n^2 + 7n + 9 = (n+2)(n^2 + 3n + 1) + 7$ أي $A_n = B_n(n^2 + 3n + 1) + 7$

و اذا كان $d = p\gcd(A_n; B_n)$ فهذا يعني d يقسم $n^3 + 5n^2 + 7n + 9$ و d يقسم $n + 2$

ومنه d يقسم $(n+2)(n^2 + 3n + 1)$ ومنه d يقسم 7 .

إذن $p\gcd(A_n; B_n) = p\gcd(B_n; 7)$

(ب) استنتاج القيم الممكنة لـ $p\gcd(A_n; B_n)$: d يقسم 7 ومنه القيم الممكنة هي 1 أو 7 .

(ج) تعيين قيم العدد n حتى يكون A_n و B_n أوليين فيما بينهما :

اذا كان $p\gcd(A_n; B_n) = 7$ فهذا يعني $p\gcd(B_n; 7) = 7$ أي $n + 2 \equiv 0[7]$ ومنه $n \equiv 5[7]$

وهذا يعني $n = 7k + 5$ حيث k طبيعي

وبالتالي حتى يكون A_n و B_n أوليين فيما بينهما فإن قيم العدد n هي كل الاعداد الطبيعية ماعدا الاعداد :

$n = 7k + 5$

اذن قيم n هي : $n = 7k$ أو $n = 7k + 1$ أو $n = 7k + 2$ أو $n = 7k + 3$ أو $n = 7k + 4$ أو $n = 7k + 6$

(2) (E) ... $A_2x - B_2y = 29$ أي $51x - 4y = 29$ حيث x و y صحيحان

(أ) إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $51x = 4y + 29$ أي $51x \equiv 29[4]$

أي $51x \equiv 29[4]$ ومنه $48x + 3x \equiv 1[4]$ أي $3x \equiv 1[4]$ ومنه $9x \equiv 3[4]$ وبالتالي فإن $x \equiv 3[4]$

(ب)تعيين حلول المعادلة (E)

$x \equiv 3[4]$ تعني $x = 4k+3$ وبالتعويض في (E) نجد $51(4k+3)-4y = 29$ ومنه

$4y = 51\times 4k + 153 - 29$ أي $y = 51k+31$ ومنه الحلول هي : $(x;y) = (4k+3\,;\,51k+31)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(3) (أ) استنتاج حلول : (E') ... $51x - 4y = 45$

$51x-4y=45$ تعني $51x-4y=16+29$ أي $51x-4y-16=29$ ومنه $51x-4(y+4)=29$

ومن حلول المعادلة (E) نجد $y+4=51k+31$ أي $y=51k+27$

ومنه حلول المعادلة (E') هي $(x;y)=(4k+3\,;\,51k+27)$

(ب) تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول (E') حيث $|y-12x| \le 3$: هذا يعني $|51k+27-12(4k+3)| \le 3$

أي $|3k-9| \le 3$ ومنه $-3 \le 3k-9 \le 3$ أي $6 \le 3k \le 12$ إذن $2 \le k \le 4$ ومنه قيم k هي : 2 ،3 ، 4

وبالتالي الحلول هي : $(11;129)$ و $(15;180)$ و $(19;231)$