تمارين المتتاليات في الباكالوريا الجزائرية للشعب العلمية من 2016 الى 2022

إعداد الأستاذ : قليل مصطفى

التمرين باك 2016 ع ت الموضوع الاول

(I) f دالة عددية معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{2x+8}$. (C) تمثيلها في م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

(1)(أ)- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

(ب)- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

(2) عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي $y=x$ معادلة له.

(3) أرسم (C) و (Δ).

II (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1}=f(u_n)$.

(1) مثّل في الشكل السابق على محور الفواصل , الحدود u_0 , u_1 , u_2 و u_3 (بدون حسابها) موضّحا خطوط الإنشاء.

(2) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

(3) (أ)- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n , $0\le u_n\le 4$.

(ب)- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(ج)- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n, $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$.

ثمّ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$.

(د)- استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

حل التمرين باك 2016 ع ت الموضوع 1

الجزء1 :

1) أ) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+8}=+\infty$

ب) دراسة تغيرات الدالة ثمّ تشكيل جدول تغيراتها

f تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ومنه $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+8}}$ ومنه بما أنّ $f'(x)\succ 0$ فإنّ f متزايدةعلى $]0;+\infty[$

جدول التغيرات

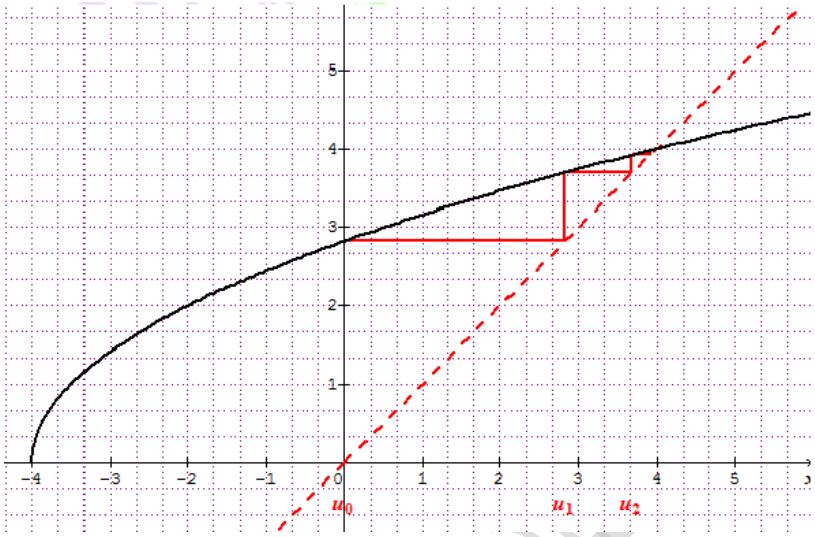
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{8}$ ↗	$+\infty$

2) إحداثيات تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $(\Delta): y=x$

لدينا $f(x)=y$ يعني أنَ $x=\sqrt{2x+8}$ ومنه $x^2-2x-8=0$

هذه المعادلة من الدرجة 2 حلاها هما $x=-2$ مرفوضة و $x=4$ نقطة التقاطع هي $A(4;4)$

(3) رسم المنحنى والمستقيم



الجزء2 :

1) $u_{n+1}=f(u_n)$ و $u_0=0$. تمثيل الحدود $u_3;u_2;u_1;u_0$ دون حسابها في المنحنى أعلاه

2) التخمين حول إتجاه تغير وتقارب المتتالية :

من خلال ترتيب الحدود يتَضح أنَ (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو 4

3) أ) برهان بالتراجع أنَ من أجل كل n من N أن : $0\le u_n\prec 4$

بفرض $p(n)$ خاصية حيث $0\le u_n\prec 4$

من أجل $n=0$ فإنَ $u_0=0$ ومنه $p(0)$ صحيحة لأنَ $0\le 0\prec 4$

بفرض الخاصية $p(n)$ صحيحة من اجل n أي $0\le u_n\prec 4$ ولنبرهن صحة الخاصية $p(n+1)$

أي أنَ $0\le u_{n+1}\prec 4$

البرهان : نعلم أنَ $0\le u_n\prec 4$ و بوضع $u_{n+1}=f(u_n)$

لدينا أنَ f متزايدة على المجال $[0;+\infty[$ ومنه متزايدة من أجل N وبالتالي $f(0)\le f(u_n)\prec f(4)$

لدينا $f(0)=\sqrt{8}$ و $f(4)=4$ ومنه $\sqrt{8}\le f(u_n)\prec 4$

نستنتج $0\le u_{n+1}\prec 4$ لأنَ $\sqrt{8}\succ 0$

ومنه الخاصية $p(n+1)$ صحيحة إذن $0\le u_n\prec 4$

ب) دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n)

$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+8}-u_n$ بالضرب في المرافق ينتج $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u^2+2u_n+8}{\sqrt{2u_n+8}+u_n}$

إشارة الفرق من إشارة $-u_n^2+2u_n+8$ و $-u_n^2+2u_n+8=0$ هي معادلة من الدرجة الثانية ينتج $u_n=-2$ أو $u_n=4$

$-u_n^2+2u_n+8=(4-u_n)(u_n+2)$ ومنه اشارة $-u_n^2+2u_n+8$ هي كما يلي :

u_n	-2		0		4		$+\infty$
$(u_n+2)(4-u_n)$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

نحدّد فقط الجزء المعرّف في الجدول و هو : $0 \le u_n \prec 4$

نجد الإشارة موجبة و نعلم أنّ $0 \le u_n \prec 4$ ومن خلال الجدول نستنتج أنّ $u_{n+1} - u_n \ge 0$

ومنه (u_n) متزايدة على $[0;+\infty[$

ج) إثبات أنّه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ أن : $4 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4 - u_n)$ حيث $u_0 = 0$ و $u_1 = 2\sqrt{2}$

باستعمال البرهان بالتراجع : من اجل $n = 0$: $4 - u_1 \le \frac{1}{2}(4 - u_0)$ وهي محققة لأن $4 - 2\sqrt{2} \prec 2$

نفرض الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n ونبرهن انها صحيحة من اجل n+1

أي نفرض أن $4 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4 - u_n)$ ونبرهن أن $4 - u_{n+2} \le \frac{1}{2}(4 - u_{n+1})$ حيث $u_{n+2} = \sqrt{2u_{n+1} + 8}$

$$4 - u_{n+2} = 4 - \sqrt{2u_{n+1} + 8} = \frac{\left(4 - \sqrt{2u_{n+1} + 8}\right)\left(4 + \sqrt{2u_{n+1} + 8}\right)}{4 + \sqrt{2u_{n+1} + 8}}$$

ومنه $$4 - u_{n+2} = \frac{16 - (2u_{n+1} + 8)}{4 + \sqrt{2u_{n+1} + 8}} = \frac{2(4 - u_{n+1})}{4 + \sqrt{2u_{n+1} + 8}}$$

لدينا سابقا $0 \le u_{n+1} \prec 4$ ومنه $0 \prec 2u_{n+1} \prec 8$ ومنه $8 \prec 8 + 2u_{n+1} \prec 16$ ومنه $\sqrt{8} \prec \sqrt{8 + 2u_{n+1}} \prec 4$

ومنه $4 + \sqrt{8} \prec 4 + \sqrt{8 + 2u_{n+1}} \prec 8$ ومنه $\frac{1}{8} \prec \frac{1}{4 + \sqrt{8 + 2u_{n+1}}} \prec \frac{1}{4 + \sqrt{8}}$ ومنه $\frac{2}{8} \prec \frac{2}{4 + \sqrt{8 + 2u_{n+1}}} \prec \frac{2}{4 + \sqrt{8}}$ و

وبضرب الأطراف بالعدد الموجب $4 - u_{n+1}$ نجد

$$\frac{2(4 - u_{n+1})}{8} \prec \frac{2(4 - u_{n+1})}{4 + \sqrt{8 + 2u_{n+1}}} \prec \frac{2(4 - u_{n+1})}{4 + \sqrt{8}} = \frac{4 - u_{n+1}}{2 + \sqrt{2}}$$

وبما أن $\frac{4 - u_{n+1}}{2 + \sqrt{2}} \prec \frac{4 - u_{n+1}}{2}$ فإننا نجد $\frac{2(4 - u_{n+1})}{4 + \sqrt{8 + 2u_{n+1}}} \prec \frac{4 - u_{n+1}}{2}$ أي أن $4 - u_{n+2} \le \frac{1}{2}(4 - u_{n+1})$

<u>خلاصة:</u> اذن الخاصية صحيحة من اجل n+1 وبالتالي نستنتج صحة الخاصية

- <u>الاستنتاج:</u> استنتاج أنّ $4 - u_n \le \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$

لدينا من أجل $n = 0$ نجد $4 - u_1 \le \frac{1}{2}(4 - u_0)$ $\cdots(1)$

لدينا من أجل $n = 1$ نجد $4 - u_2 \le \frac{1}{2}(4 - u_1)$ $\cdots(2)$

لدينا من أجل $n = 2$ نجد $4 - u_3 \le \frac{1}{2}(4 - u_2)$ $\cdots(3)$

لدينا من أجل n نجد $4 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4 - u_n)$ $\cdots(n)$

بضرب (1) في (2) إلى (n) طرف لطرف نجد :

$$(4 - u_1)(4 - u_2)\cdots(4 - u_n)(4 - u_{n+1}) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)(4 - u_1)\ldots(4 - u_n)$$

وبالاختزال نجد $(4 - u_{n+1}) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)$ أي $(4 - u_n) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)$

د) النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا $(4-u_n)\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(4-u_0)$ ومنه $u_n\ge 4-\left(\frac{1}{2}\right)^n(4-u_0)$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\ge\lim\limits_{n\to+\infty}\left[4-\left(\frac{1}{2}\right)^n(4-u_0)\right]$

وبما ان $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[4-\left(\frac{1}{2}\right)^n(4-u_0)\right]=4-\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n(4)=4-0=4$

و المتتالية محدودة بالعدد 4 فان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=4$

التمرين باك 2016 ع ت الموضوع الثاني

(I) f الدالة العددية المعرَفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{5x}{x+2}$.

(1) (أ) احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

(2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0,+\infty[$: $f(x)\ge 0$

(II) (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{5u_n}{u_n+2}$

(1) (أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 3$.

(ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=1-\frac{3}{u_n}$

(أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ يطلب حساب حدها الأول v_0

(ب) اكتب بدلالة n عبارة v_n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n

(جـ) احسب نهاية المتتالية : (u_n)

3) اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+.....+\frac{1}{u_n}$.

حل التمرين باك 2016 ع ت الموضوع 2

الجزء 1 :

(1) (أ) لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{5x}{x+2}$

النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x}{x+2}=5$

(ب) دراسة تغيرات الدالة ثمّ تشكّيل جدول تغيراتها :

الدالة f تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ومنه $f'(x)=\frac{10}{(x+2)^2}$ بما أنّ $f'(x)\succ 0$ موجبة فإنّ f متزايدة على المجال $]0;+\infty[$

جدول التغيرات

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	5

(2) إثبات أنَ من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإنَ $f(x)\geq 0$

من خلال جدول التغيرات لدينا من أجل : $x\in]0;+\infty[$ فإنَ $f(x)\in[0;5[$ و بما أنَ f متزايدة على المجال $]0;+\infty[$ فإنَ $f(x)\geq 0$

<u>الجزء 2 :</u>

(1) المتتالية (u_n) حيث $u_{n+1}=\dfrac{5u_n}{u_n+2}$ معرفة على N و $u_0=1$

(أ) البرهان بالتراجع أنَ من أجل كل n من N أنَ : $1\leq u_n\leq 3$

بفرض $p(n)$ خاصية حيث $1\leq u_n\leq 3$

من اجل $n=0$ فإنَ $u_0=1$ ومنه $p(0)$ صحيحة لأنَ $1\leq 1\leq 3$

بفرض الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل n أي $1\leq u_n\leq 3$ و لنبرهن صحة الخاصية $p(n+1)$ اي من اجل أي n : فانَ $1\leq u_{n+1}\leq 3$

البرهان : نعلم أنَ $1\leq u_n\leq 3$ و بوضع $u_{n+1}=f(u_n)$

لدينا أنَ f متزايدة على المجال $]0;+\infty[$ و منه متزايدة من أجل كل n من N و بالتالي

$f(1)\leq f(u_n)\leq f(3)$

لدينا $f(1)=\dfrac{5}{3}$ و $f(3)=3$ ومنه $\dfrac{5}{3}\leq f(u_n)\leq 3$ و نستنتج أنَ $1\leq u_{n+1}\leq 3$ لانَ $\dfrac{5}{3}\succ 1$

ومنه الخاصية $p(n+1)$ صحيحة إذن $1\leq u_n\leq 3$

(ب) دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا $u_{n+1}-u_n=\dfrac{5u_n}{u_n+2}-u_n=\dfrac{-u_n^2+3u_n}{u_n+2}$

إشارة الفرق من إشارة $-u_n^2+3u_n$ ومن $u_n(-u_n+3)=0$ ينتج :

u_n		0		1		3	
$u_n(-u_n+3)$	−	0	+		+	0	−

نعلم أنَ $1\leq u_n\leq 3$ من خلال الجدول نستنتج أنَ $u_{n+1}-u_n\geq 0$ ومنه (u_n) متزايدة من اجل كل n طبيعي

المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بـ 3 و متزايدة فهي متقاربة

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعَرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n=1-\dfrac{3}{u_n}$

(أ) بيان أنَ (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{2}{5}$:

(v_n) متتالية هندسية يعني أنَ $v_{n+1}=v_n.q$

لدينا $v_{n+1}=1-\dfrac{3}{u_{n+1}}=1-\dfrac{3(u_n+2)}{5u_n}$ ومنه $v_{n+1}=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{3(u_n+2)}{2u_n}\right)=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{4(u_n-3)}{4u_n}\right)$

ومنه $v_{n+1}=\frac{2}{5}\left(\frac{u_n-3}{u_n}\right)=\frac{2}{5}v_n$ (لاحظ أنَ $v_n=1-\frac{3}{u_n}=\frac{u_n-3}{u_n}$) ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ وحدها الأول $v_0=1-\frac{3}{u_0}=-2$ و حدها العام هو $v_n=-2\left(\frac{2}{5}\right)^n$

ب) عبارة الحد العام u_n بدلالة n هي :

لدينا $v_n=-2\left(\frac{2}{5}\right)^n$ ومنه بما أنَ $v_n=1-\frac{3}{u_n}$ فإنَ $u_n=\frac{3}{1-v_n}$ وبالتالي عبارة u_n :

$$u_n=\frac{3}{2\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}$$

جـ) حساب النهاية : بما أنَ $\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$ لأنَ $-1\le\frac{2}{5}\le 1$ فإنَ

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}=\frac{3}{\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}=3$$

3) حساب المجموع $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+....+\frac{1}{u_n}$

عدد الحدود هو $n+1$ ومنه المتتالية (u_n) عددية لا يمكن حساب المجموع باستعمال القوانين المدروسة

يجب كتابة u_n بدلالة v_n

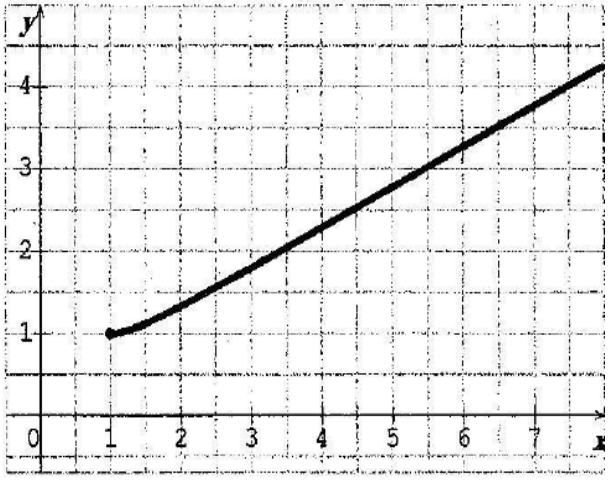
لدينا $v_n=1-\frac{3}{u_n}$ ومنه $u_n=\frac{3}{1-v_n}$ يصبح المجموع $S_n=\frac{1-v_0}{3}+\frac{1-v_1}{3}+....+\frac{1-v_n}{3}$

ومنه $S_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}v_0+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}v_1+...+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}v_n$ ومنه $S_n=\frac{1}{3}(n+1)-\frac{1}{3}(v_0+v_1+...+v_n)$

المجموع $v_0+v_1+..+v_n=v_0\left(\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)}\right)$ لأنَ المتتالية (v_n) هندسية ومنه

وبالتالي $v_0+v_1+..+v_n=\frac{-10}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$ $S_n=\frac{1}{3}(n+1)+\frac{10}{9}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$

التمرين باك تقني رياضي 2016 الموضوع الثاني



نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بـ :

$f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل)

(1) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$

(2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

(أ) أنقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .

(ب) أعط تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

(جـ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 6$.

(د) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

(هـ) برر تقارب المتتالية (u_n).

(3) تعتبر المتتاليتين العدديتين (v_n) و (w_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ ب : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n}$ و $w_n=\ln(v_n)$.

(أ) برهن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول .

(ب) أكتب w_n بدلالة n ثم v_n بدلالة n

(ج) بين أن $u_n=\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{2^n}}$ ثم أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

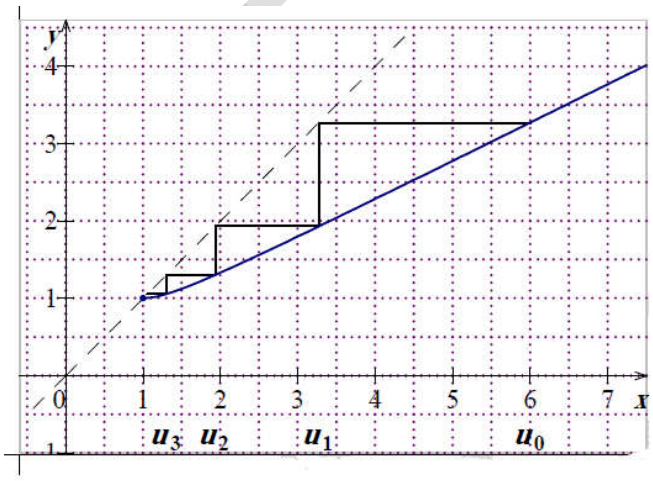
(4) أحسب بدلالة n المجموع التالي : $S_n=\dfrac{1}{w_0}+\dfrac{1}{w_1}+.....+\dfrac{1}{w_2}$.

حل التمرين باك 2016 ت ر الموضوع 2

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$ إثبات أن الدالة f متزايدة تماما على $[1,+\infty[$

باشتقاق الدالة f نجد : $f'(x)=\dfrac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$ وبما ان $x\ge 1$ فان $f'(x)\ge 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[1,+\infty[$

(2)(أ) نقل المنحنى (C_f) وتمثيل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) (أنظر الرسم)



(ب)التخمين : من خلال تمثيل الحدود نخمن ان (u_n) متناقصة و متقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحنى والمنصف الأول .

(جـ) البرهان بالتراجع : أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: فإن: $1\le u_n\le 6$.

من اجل $n=0$ محققة لأن $1\le(u_0=6)\le 6$

ثانيا نفرض صحة الخاصية من اجل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$ أي نفرض : $1\le u_n\le 6$

ونبرهن : $1\le u_{n+1}\le 6$.

لدينا : $1 \le u_n \le 6$ و f متزايدة على $[1,+\infty[$ ومنه ينتج : $f(1) \le f(u_n) \le f(6)$ وبما ان

$f(6) = \frac{36}{11} \prec 6$

و $f(1) = 1$ فان $1 \le u_{n+1} \le 6$ و مما سبق ينتج : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $1 \le u_n \le 6$. أي (u_n) محدودة .

(د) تغيرات (u_n) :

دراسة إشارة الفرق : $u_{n+1} - u_n$.

من أجل كل n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n(2u_n - 1)}{2u_n - 1} = \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1}$. وبما أن $u_n \ge 1$

فإن : $1 - u_n \le 0$ و $2u_n - 1 \succ 0$ وبالتالي $u_{n+1} - u_n \le 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة .

(هـ) تبرير تقارب (u_n) : بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة .

(3) لدينا : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$

(أ) إثبات أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها 2

$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}\right) = \ln(u_{n+1} - 1) - \ln(u_{n+1})$ ومنه $w_{n+1} = \ln\left(\frac{\frac{u_n^2}{2u_n - 1} - 1}{\frac{u_n^2}{2u_n - 1}}\right)$

$w_{n+1} = \ln\left(\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2u_n - 1} \times \frac{2u_n - 1}{u_n^2}\right)$ ومنه $\mathrm{w}_{n+1} = \ln\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n^2}$

إذن $w_{n+1} = \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right)^2 = 2\ln\frac{u_n - 1}{u_n} = 2\ln(v_n)$ وبالتالي : $w_{n+1} = 2w_n$ ومنه : المتتالية (w_n) هندسية أساسها 2

وحدها الأول : $w_0 = \ln(v_0) = \ln(u_0 - 1) - \ln(u_0)$. ومنه : $w_0 = \ln 5 - \ln 6 = \ln\frac{5}{6}$.

(ب) عبارة w_n : لدينا $w_n = w_0 \times q^n$. ومنه $w_n = \ln(5/6) \times 2^n$

عبارة v_n : لدينا $w_n = \ln(v_n)$ ومنه $v_n = e^{w_n}$ ومنه $v_n = e^{2^n \times \ln\frac{5}{6}} = e^{\ln\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}$

(جـ) تبيان عبارة u_n :

لدينا: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ ومنه : $u_n = \frac{1}{1 - v_n}$ وبالتعويض نجد : $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$.

نهاية (u_n) :لدينا $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}} = \frac{1}{1-0}$ ومنه : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

(4) حساب المجموع :

لدينا : $s_n = w_0^{-1} + w_1^{-1} + w_2^{-1} + ... + w_n^{-1}$ ومنه : $s_n = w_0^{-1} + w_0^{-1}q^{-1} + ... + w_0^{-1}q^{-n}$

ومنه : $s_n = w_0^{-1}\left(1 + q^{-1} + q^{-2} + ... + q^{-n}\right)$ وينتج : $s_n = w_0^{-1}\left(\frac{1 - q^{-(n+1)}}{1 - q^{-1}}\right)$.

ولدينا $w_0 = \ln\left(\frac{5}{6}\right)$ و $q = 2$ أخيرا : $s_n = \frac{2}{\ln(5/6)} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

التمرين باك علوم تجريبية 2017 الموضوع الاول

(u_n)و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = \frac{1}{4}$

ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$ و $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

(1) (أ)- برهن بالتراجع أنَه من اجل كل عدد طبيعي n: $0 \prec u_n \prec 1$.

(ب)- بيَن أنَ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثمَ استنتج أنَها متقاربة .

(2) (أ)- بيَن أنَ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ثمَ عبَر عن حدها العام v_n بدلالة n.

(ب)- أثبت أنَه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$ ثمَ استنتج النهاية $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

حل التمرين باك 2017 ع ت الموضوع 1 :

$u_0 = \frac{1}{4}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$ و $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

(1) (أ)- البرهان بالتراجع أنَ : من اجل كل عدد طبيعي n، $0 \prec u_n \prec 1$.

من اجل $n = 0$: $0 \prec u_0 \prec 1$ وهي محققة لان $u_0 = \frac{1}{4}$ نفرض $0 \prec u_n \prec 1$ ونبرهن ان $0 \prec u_{n+1} \prec 1$

لدينا $0 \prec u_n \prec 1$ ومنه $4 \prec u_n + 4 \prec 5$ وبالقلب نجد : $\frac{1}{5} \prec \frac{1}{u_n + 4} \prec \frac{1}{4}$ وبضرب الاطراف بالعدد -10 نجد

$\frac{-10}{5} \prec \frac{-10}{u_n + 4} \prec \frac{-10}{4}$ وباضافة العدد 3 نجد : $3 - \frac{5}{2} \prec \frac{-10}{u_n + 4} + 1 \prec 1$ ومنه $0 \prec \frac{1}{2} \prec u_{n+1} \prec 1$ اذن

$0 \prec u_{n+1} \prec 1$ ومنه من اجل كل n : $0 \prec u_n \prec 1$

(ب)- تبيان أنَ (u_n) متزايدة تماما : $u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{10}{u_n + 4} - u_n = \frac{-u_n^{\,2} - u_n + 2}{u_n + 4} = \frac{(-u_n + 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$

وبما ان $0 \prec u_n \prec 1$ فان $0 \prec (-u_n + 1)$ ومنه $u_{n+1} - u_n \succ 0$ وبالتالي (u_n) متزايدة تماما

وبما ان (u_n) محدودة من الاعلى ومتزايدة فانها متقاربة

(2) (أ)- اثبات أنَ (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$: لدينا $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$ ومنه

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{1 - u_{n+1}} = \frac{3 - \frac{10}{u_n + 4} + 2}{1 - 3 + \frac{10}{u_n + 4}} = \frac{5 - \frac{10}{u_n + 4}}{-2 + \frac{10}{u_n + 4}} = \frac{5(u_n + 4) - 10}{-2(u_n + 4) + 10} = \frac{5(u_n + 2)}{2(1 - u_n)} = \frac{5}{2} v_n$$

$v_{n+1}=\frac{5}{2}v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ وحدها الاول $v_0=\frac{u_0+2}{1-u_0}=3$ و عبارة الحد العام : $v_n=3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^n$

(ب)- اثبات أنَ : $u_n=1-\frac{3}{v_n+1}$: لدينا $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$ ومنه $v_n\cdot(1-u_n)=u_n+2$ اذن

$$-u_n-v_nu_n=2-v_n$$

$$u_n=\frac{v_n-2}{v_n+1}=\frac{v_n+1-3}{v_n+1}=1-\frac{3}{v_n+1}$$ ومنه

استنتاج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^n=+\infty$ لان $\frac{5}{2}\succ 1$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{v_n+1}\right)=1-\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{v_n+1}=1-\frac{3}{\lim\limits_{n\to+\infty}v_n+1}=1$$ اذن

التمرين باك 2017 علوم تجريبية الموضوع الثاني

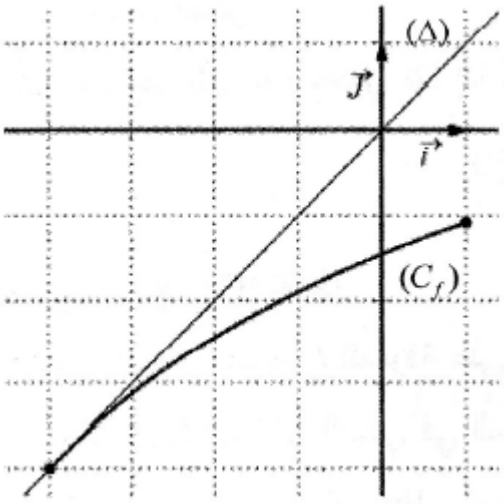
المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. f الدالة المعرَفة على المجال $[-4;1]$كما يلي :

$f(x)=\frac{3x-16}{x+11}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها ، (Δ)المستقيم ذو المعادلة $y=x$

(I) تحقق أنَ الدالة fمتزايدة تماما على $[-4;1]$ثمَ بيَن أنَه من أجل كل $x\in[-4;1]$فإنَ : $f(x)\in[-4;1]$

(II) (u_n) متتالية معرَفة بحدَها الأول $u_0=0$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

(1) انقل الشكل المقابل ثمَ مثَل على حامل محور الفواصل



الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

(لايطلب حساب الحدود)

ثمَ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)وتقاربها .

(2) برهن بالتراجع أنَه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$-4\prec u_n\leq 0$

ثمَ بيَن أنَ المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

(3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرَفة كما يلي : من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n\times u_n=1-4v_n$

أثبت انَ المتتالية (v_n) حسابيا أساسها $\frac{1}{7}$ ، ثمَ احسب المجموع S حيث $S=v_0\times u_0+v_1\times u_1+\ldots+v_{2016}\times u_{2016}$

حل التمرين باك 2017 ع ت الموضوع 2 :

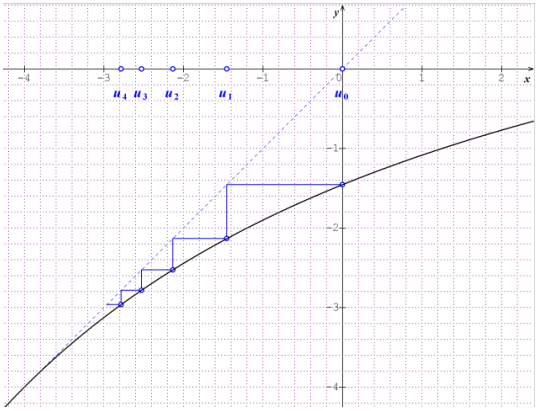
f معرَفة على $[-4;1]$ حيث : $f(x)=\frac{3x-16}{x+11}$

(I) اثبات ان f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$: $f'(x)=\frac{49}{(x+11)^2}\succ 0$ ومنه f متزايدة تماما على $[-4;1]$

- تبيان انه من اجل $x\in[-4;1]$ فإنَ : $f(x)\in[-4;1]$:

$x \in [-4;1]$ تعني $-4 \le x \le 1$ وبما ان f متزايدة تماما فان $f(-4) \le f(x) \le f(1)$ ونجد :

$-4 \le f(x) \le -\frac{13}{12} \prec 1$ اذن $f(x) \in [-4;1]$



(II) (u_n) متتالية حيث $u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

نخمن ان (u_n) متناقصة ومتقاربة

(2) البرهان بالتراجع أنَ : $-4 \prec u_n \le 0$

من اجل $n = 0$: $-4 \prec u_0 \le 0$ محققة

نفرض الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن انها صحيحة من اجل $n+1$ اي نفرض $-4 \prec u_n \le 0$ ونبرهن ان $-4 \prec u_{n+1} \le 0$.

لدينا $-4 \prec u_n \le 0$ وبما ان الدالة f متزايدة تماما على $[-4;1]$ فان $f(-4) \prec f(u_n) \le f(0)$ اي

$-4 \prec u_{n+1} \le -\frac{16}{11}$ وبما ان $-\frac{16}{11} \prec 0$ فان $-4 \prec u_{n+1} \le 0$

ومنه من اجل كل n فان $-4 \prec u_n \le 0$ اي ان المتتالية (u_n) محدودة

- تبيان أنَ (u_n) متناقصة تماما : $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 16}{u_n + 11} - u_n = \frac{-u_n^2 - 8u_n - 16}{u_n + 11} = \frac{-(u_n + 4)^2}{u_n + 11}$

من السؤال السابق لدينا $-4 \prec u_n \le 0$ ومنه $u_n + 11 \succ 0$ و $(u_n + 4)^2 \succ 0$ وبالتالي : $u_{n+1} - u_n \prec 0$

اذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

(3) (v_n) متتالية معرّفة كما يلي : $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$ ومنه : $v_n = \frac{1}{u_n + 4}$

اثبات انَ المتتالية (v_n) حسابيا أساسها $\frac{1}{7}$:

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 4} = \frac{1}{\frac{3u_n - 16}{u_n + 11} + 4} = \frac{u_n + 11}{7u_n + 28}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 11}{7u_n + 28} - \frac{1}{u_n + 4} = \frac{u_n + 11 - 7}{7u_n + 28} = \frac{u_n + 4}{7(u_n + 4)} = \frac{1}{7}$$

اذن (v_n) حسابيا أساسها $\frac{1}{7}$ و حدها الاول $v_0 = \frac{1}{4}$

حساب المجموع S : $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$ ومنه

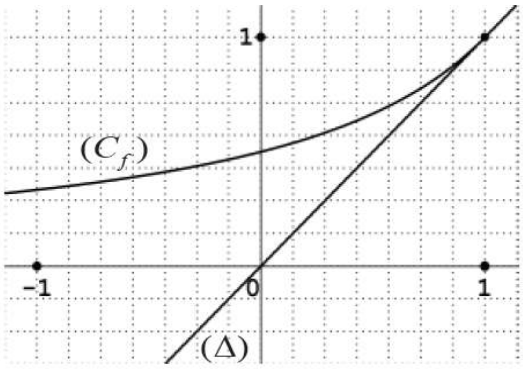
$$S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \ldots + v_{2016} \times u_{2016} = (1 - 4v_0) + (1 - 4v_1) + \cdots + (1 - 4v_{2016})$$

$$= (1 + 1 + \cdots + 1) - 4(v_0 + v_1 + \cdots + v_{2016}) = 2017 - 4\left(\frac{2017}{2}(v_0 + v_{2016})\right)$$

$S = 2017 - 4\left(\frac{2017}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{8071}{28}\right)\right) = -1161792$ ومنه $v_{2016} = v_0 + 2016 \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{4} + \frac{2016}{7} = \frac{8071}{28}$

التمرين باك 2017 تقني رياضي الموضوع الاول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty,1[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$. (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ و ليكن (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y=x$.



(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الاول حيث u_0 حيث $u_0=-1$.

و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

(1) اعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط التمثيل ، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

(2) برهن بالتراجع أن : من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \prec 1$

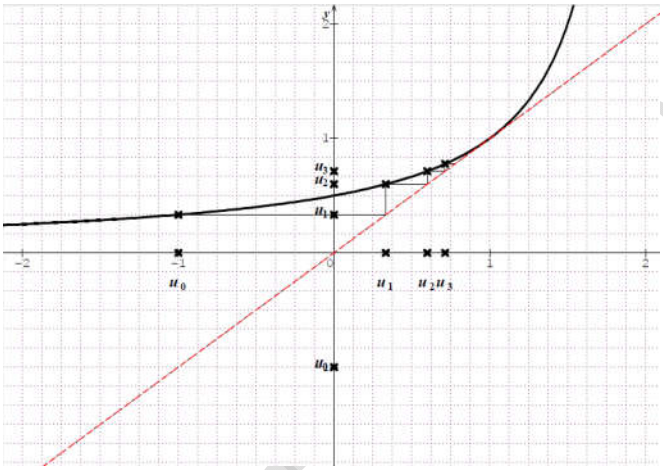
(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) ثم استنتج انها متقاربة .

(4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\dfrac{2}{1-u_n}$

(أ) برهن ان المتتالية (v_n) حسابية اساسها 2 ثم عين عبارة حدها العام v_n بدلالة n .

(ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة u و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

حل التمرين باك 2017 ت ر الموضوع :



f معرفة على المجال $]-\infty,1[$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$.

$u_0=-1$ ومن أجل كل $n\in N$: $u_{n+1}=f(u_n)$

(1) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 :

نلاحظ من المنحنى أن $u_0 \prec u_1 \prec u_2 \prec u_3$ ومنه المتتالية (u_n) تبدو متزايدة تماما ومتقاربة وتتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

(2) برهان أنه من اجل كل $n\in\mathbb{N}: u_n \prec 1$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=-1\prec 1$ ومنه الخاصية صحيحة

نفرض أنَها صحيحة من أجل كل n ونبرهن أنَها صحيحة من أجل $n+1$ أي نفرض أنَ $u_n \prec 1$ ونبرهن أنَ $u_{n+1}\prec 1$

لدينا فرضا $u_n \prec 1$ وبما أنَ f متزايدة على $]-\infty,1[$ فإنَ $f(u_n)\prec f(1)$ أي $f(u_n)\prec \dfrac{1}{2-1}$ ومنه $u_{n+1}\prec 1$

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \prec 1$

(3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج انها متقاربة :

لدينا $f(x)-x=\dfrac{1}{2-x}-x=\dfrac{x^2-2x+1}{2-x}=\dfrac{(x-1)^2}{2-x}$ و نعلم أن $2-x\succ 0$ على $]-\infty,1[$

ومنه $f(x)-x\succ 0$ من أجل كل x من المجال $]-\infty,1[$ وهذا يعني $u_{n+1}-u_n\succ 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما.

الإستنتاج : بما أنَ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلي بالعدد 1 فهي متقاربة .

(4) (v_n)معرفة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\dfrac{2}{1-u_n}$

(أ) إثبات أنَ (v_n) حسابية اساسها 2 :

لدينا $v_{n+1}-v=\dfrac{2}{1-u_{n+1}}-\dfrac{2}{1-u_n}=\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{2-u_n}}-\dfrac{2}{1-u_n}=\dfrac{2}{1-u_{n+1}}-\dfrac{2}{1-u_n}$

$v_{n+1}-v=\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{2-u_n}}-\dfrac{2}{1-u_n}=\dfrac{2}{\dfrac{1-u_n}{2-u_n}}-\dfrac{2}{1-u_n}=$

$=\dfrac{2(2-u_n)}{1-u_n}-\dfrac{2}{1-u_n}=\dfrac{2(2-u_n)-2}{1-u_n}=\dfrac{2(1-u_n)}{1-u_n}=2$

أي $v_{n+1}-v_n=2$ ومنه المتتالية (v_n)حسابية أساسها 2وحدها الأول $v_0=\dfrac{2}{1-u_0}=\dfrac{2}{1+1}=1$

- عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

$v_n=v_0+nr$ أي $v_n=1+2n$

(ب) استنتاج عبارة الحد العام u_n بدلالة n و حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

لدينا $v_n=\dfrac{2}{1-u_n}$ ومنه $(1-u_n)=\dfrac{2}{v_n}$ومنه $u_n=1-\dfrac{2}{v_n}=\dfrac{v_n-2}{v_n}$وعليه $u_n=\dfrac{1+2n-2}{1+2n}$ ومنه $u_n=\dfrac{2n-1}{2n+1}$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n}{2n}=1$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=1$

التمرين باك 2017 شعبة رياضيات الموضوع الثاني :

نعتبر المتتالية العددية (u_n)المعرَفة على $\mathbb{N}$بحدها الأوَل $u_0=1$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=7u_n+8$.

(1) برهن بالتراجع أنَ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3u_n=7^{n+1}-4$.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=1+7+7^2+.....+7^n$ و $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$.

(أ)- احسب بدلالة n المجموع S_n ثم جد علاقة بين S_n و S'_n .

(ب)- استنتج أنَ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $18\times S'_n=7^{n+2}-24n-31$.

(3) (أ)- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5.

(ب)- عيَن قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5.

حل التمرين باك 2017 رياضي الموضوع 2

(u_n) معرَفة بحدها الأوَل $u_0=1$ ومن أجل كل n : $u_{n+1}=7u_n+8$.

(1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل n : $3u_n=7^{n+1}-4$.

من اجل $n=0$ نجد $3u_0=7^{0+1}-4$ وهي محققة لان $3u_0=3$ و $7^{0+1}-4=3$

نفرض ان $3u_n=7^{n+1}-4$ ونبرهن ان : $3u_{n+1}=7^{n+2}-4$

لدينا فرضا : $3u_n=7^{n+1}-4$ ومن جهة اخرى $u_{n+1}=7u_n+8$ اذن : $3u_{n+1}=3(7u_n+8)=21u_n+24$ ومنه

$3u_{n+1}=21u_n+24=7(3u_n)+24=7(7^{n+1}-4)+24=7^{n+2}-28+24$ اذن $3u_{n+1}=7^{n+2}-4$ ومنه

الخاصية صحيحة من اجل كل n

(2) $S_n=1+7+7^2+.....+7^n$ و $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$.

(أ)- حساب بدلالة n المجموع S_n : هو مجموع $(n+1)$ حد لمتتالية هندسية حدها الاول 1 و اساسها 7 . اذن

$$S_n=1\cdot\frac{7^{n+1}-1}{7-1}=\frac{1}{6}(7^{n+1}-1)$$

$S'_n=u_0+u_1+...+u_n$ وهذا يكافئ $3S'_n=3u_0+3u_1+...+3u_n$ ونعلم انه من اجل كل n لدينا $3u_n=7^{n+1}-4$

ومنه

$3S'_n=(7^1-4)+(7^2-4)+...+(7^{n+1}-4)$ وتكافئ $3S'_n=(7+7^2+\cdots+7^{n+1})-4(n+1)$ ومنه

$$3S'_n=7\left(\frac{7^{n+1}-1}{7-1}\right)-4(n+1)=\frac{7}{6}(7^{n+1}-1)-4(n+1)=7\cdot S_n-4(n+1)$$ ومنه

$$S'_n=\frac{7}{3}\cdot S_n-\frac{4}{3}(n+1)$$ وهي العلاقة المطلوبة

(ب)- استنتاج أنَ من أجل كل n : $18\times S'_n=7^{n+2}-24n-31$.

من العلاقة السابقة : $S'_n=\frac{7}{3}\cdot S_n-\frac{4}{3}(n+1)$ ولدينا سابقا $S_n=\frac{1}{6}(7^{n+1}-1)$ ومنه

$$18\cdot S'_n=18\left(\frac{7}{3}\cdot S_n-\frac{4}{3}(n+1)\right)=42S_n-24(n+1)=42\cdot\frac{1}{6}(7^{n+1}-1)-24(n+1)$$

اذن $18\cdot S'_n=(7^{n+2}-7)-24(n+1)=7^{n+2}-24n-31$

(3) (أ)- دراسة بواقي قسمة العدد 7^n على 5 :

$7^0\equiv 1[5]$ و $7^1\equiv 2[5]$ و $7^2\equiv 4[5]$ و $7^3\equiv 3[5]$ و $7^4\equiv 1[5]$ ومنه نستنتج بواقي القسمة

اذا كان $n=4k$ فان باقي قسمة 7^n على 5 هو 1 اي $7^{4k}\equiv 1[5]$

اذا كان $n=4k+1$ فان باقي قسمة 7^n على 5 هو 2 اي $7^{4k+1}\equiv 2[5]$

اذا كان $n=4k+2$ فان باقي قسمة 7^n على 5 هو 4 اي $7^{4k+2}\equiv 4[5]$

اذا كان $n=4k+3$ فان باقي قسمة 7^n على 5 هو 3 اي $7^{4k+3}\equiv 3[5]$

ب- تعيين قيم n حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5 : اي $S'_n\equiv 0[5]$ وبما ان العددين 5 و 18 اوليين فيما بينهما فان $S'_n\equiv 0[5]$ تكافئ

$18S'_n\equiv 0[5]$ اي ان $7^{n+2}-24n-31\equiv 0[5]$ وبما ان $-24\equiv 1[5]$ و $31\equiv 1[5]$ فان :

$7^{n+2}+n-1\equiv 0[5]$

ونعوض n في الحالات الاربعة .

الحالة (1) - اذا كان $n=4k$ نجد : $7^{4k+2}+4k-1\equiv 0[5]$ وتعني $4+4k-1\equiv 0[5]$ اي $4k\equiv -3[5]$

اي $-k\equiv -3[5]$ ومنه

$k\equiv 3[5]$ ومنه $k=5\alpha+3$ وبالتالي : $n=4(5\alpha+3)$ اذن $\boxed{n=20\alpha+12}$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$

الحالة (2) – اذا كان $n=4k+1$ نجد : $7^{4k+3}+4k+1-1\equiv 0[5]$ اي $3+4k\equiv 0[5]$ وتعني $-k\equiv -3[5]$
اي $k\equiv 3[5]$ ومنه $k=5\alpha+3$ وبالتالي : $n=4(5\alpha+3)+1$ اذن $\boxed{n=20\alpha+13}$ $\alpha\in\mathbb{N}$
الحالة (3) – اذا كان $n=4k+2$ نجد : $7^{4k+4}+4k+2-1\equiv 0[5]$ اي $7^{4(k+1)}+4k+1\equiv 0[5]$ ومنه
$1-k+1\equiv 0[5]$ اي $k\equiv 2[5]$
اي $k=5\alpha+2$ وبالتالي : $n=4(5\alpha+2)+2$ اي $\boxed{n=20\alpha+10}$ $\alpha\in\mathbb{N}$
الحالة (4) – اذا كان $n=4k+3$ نجد : $7^{4k+5}+4k+3-1\equiv 0[5]$ اي $7^{4(k+1)+1}-k+2\equiv 0[5]$ ومنه
$2-k+2\equiv 0[5]$ اي $k\equiv 4[5]$
اي $k=5\alpha+4$ وبالتالي : $n=4(5\alpha+4)+3$ اي $\boxed{n=20\alpha+19}$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$
خلاصة : الاعداد الطبيعية n بحيث : $S'_n\equiv 0[5]$ هي : $\{20\alpha+12,20\alpha+13,20\alpha+10,20\alpha+19\}$

التمرين باك 2017 ع ت الاستدراكي الموضوع الاول

(u_n)و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي :
$u_0=1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+1$ و $v_0=6$ و $v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n+1$.
(1)أحسب الحدين : u_1و v_1
(2) (أ) أكتب $u_{n+2}-u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1}-u_n$.
(ب)– برهن بالتراجح أنَ المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما.
(3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=u_n-v_n$.
برهن ان المتتالية (w_n) هندسية بطلب تعيين أساسها q وحدها الأول w_0 ثم عبر عن w_n بدلالة n
(4) بيَن أنَ المتتاليتين (u_n)و (v_n) متجاورتان .

حل التمرين باك 2017 ع ت الاستدراكي الموضوع الاول :

لدينا $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+1\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=6\\v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n+1\end{cases}$.

(1)حساب الحدين $u_1=\frac{3}{4}u_0+1=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$ و $v_1=\frac{3}{4}v_0+1=\frac{18}{4}+1=\frac{22}{4}=\frac{11}{2}$

(2) (أ) كتابة $u_{n+2}-u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1}-u_n$

$u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{3}{4}u_{n+1}+1-\frac{3}{4}u_n-1$ و منه $u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{3}{4}(u_{n+1}-u_n)$

(ب)بالتراجع :

–البرهان أن المتتالية (u_n) متزايدة التحقق : لدينا $u_1-u_0=\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}$ و منه $u_1-u_0\geq 0$.

نفرض أن $u_{n+1}-u_n\geq 0$ و لنبرهن أن $u_{n+2}-u_{n+1}\geq 0$.

و لدينا $u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{3}{4}(u_{n+1}-u_n)$ و بما أن $u_{n+1}-u_n\geq 0$ فإن $u_{n+2}-u_{n+1}\geq 0$.

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n \geq 0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة

البرهان أن المتتالية (v_n) متناقصة : التحقق $v_1-v_0=\frac{11}{2}-6=-\frac{1}{2}$ و منه $v_1-v_0 \leq 0$

نفرض أن $v_{n+1}-v_n \leq 0$ و لنبرهن أن $v_{n+2}-v_{n+1} \leq 0$.

و لدينا $v_{n+2}-v_{n+1}=\frac{3}{4}(v_{n+1}-v_n)$ و بما أن $v_{n+1}-v_n \leq 0$ فإن $v_{n+2}-v_{n+1} \leq 0$.

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}-v_n \leq 0$ و منه المتتالية (v_n) متناقصة.

(3)لدينا $w_n=u_n-v_n$ البرهان أن (w_n) هندسية :

$w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+1-\frac{3}{4}v_n-1$ أي أن $w_{n+1}=\frac{3}{4}(u_n-v_n)=\frac{3}{4}w_n$

و منه (w_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ و حدها الأول $w_0=u_0-v_0$ و منه $w_0=1-6=-5$

عبارة حدها العام هي $w_n=w_0\ q^n=-5\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

(4) تبيان أن المتتاليتين (v_n) و (u_n) متجاورتان :

بما أن المتتالية (v_n) متناقصة و المتتالية (u_n) متزايدة و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-5\times\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

أي ان $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$ و منه المتتاليتان (v_n) و (u_n) متجاورتان.

التمرين باك 2017 ع ت الاستدراكي الموضوع الثاني

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{3x+1}{x+3}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها ،

(Δ)المستقيم ذو المعادلة $y=x$

α عدد حقيقي موجب , (u_n)المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=\alpha$ ومن اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

I) عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

II) نضع فيما يلي $\alpha=5$

(1)(أ) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 و u_1 و u_3 و u_4 (دون حساب الحدود)

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

(2) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرّفة كما يلي : من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

(أ) برهن انّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول

(ب)عبلا بدلالة n عن v_n و u_n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

(3) احسب المجموع S_n حيث : $S_n = v_n + v_{n+1} + ... + v_{n+2016}$ ثم استنتج بدلالة المجموع S'_n حيث :

$$S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \frac{1}{u_{n+2} + 1} ..... + \frac{1}{u_{n+2016} + 1}$$

حل التمرين باك 2017 ع ت الاستدراكي الموضوع الثاني :

$$f(x) = \frac{3x+1}{x+3} \quad \text{و} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

(u_n) متتالية (I) ثابتة يعني أن من اجل كل n : $u_n = f(u_n)$ أي $u_0 = f(u_0)$ أي ان $f(\alpha) = \alpha$

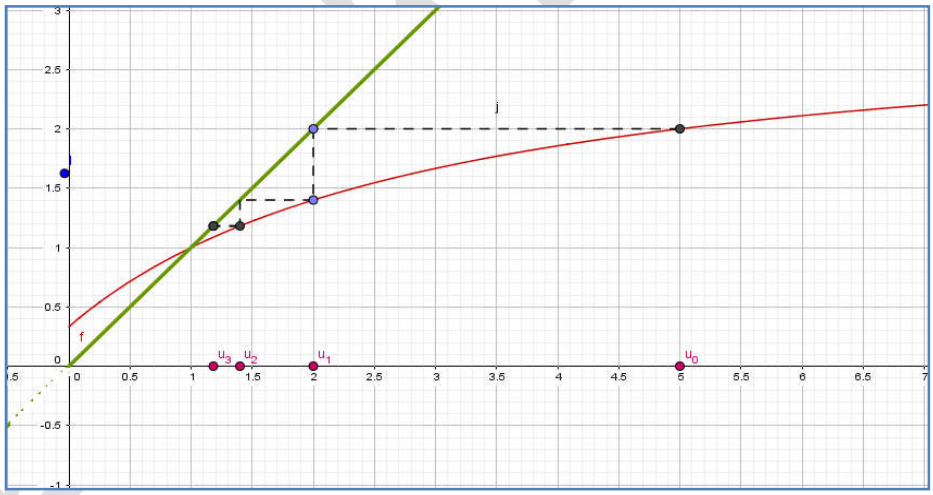
أي ان $\frac{3\alpha+1}{\alpha+3} = \alpha$ يعني أن $\alpha^2 + 3\alpha = 3\alpha + 1$ مع $\alpha \neq -3$ و منه $\alpha^2 = 1$ إذن $\alpha = 1$ لان α موجب

و هي القيمة التي تجعل المتتالية (u_n) ثابتة .

(II) لدينا $\alpha = 5$

(1) (أ) تمثيل الحدود

(ب) التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة .



(2) لدينا $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

(أ) البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1}$ أي ان $v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n+1}{u_n+3} - 1}{\frac{3u_n+1}{u_n+3} + 1}$ و منه $v_{n+1} = \frac{3u_n + 1 - u_n - 3}{3u_n + 1 + u_n + 3}$ أي ان $v_{n+1} = \frac{2}{4}\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1}\right)$

و منه $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ اذن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول: $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{2}{3}$

(ب) عبارة الحد العام v_n : $v_n = v_0 q^n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي ان : $v_n = \frac{1}{3 \times 2^{n-1}}$.

- عبارة الحد العام u_n : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ يكافئ $v_nu_n+v_n=u_n-1$ و منه $-v_nu_n+u_n=v_n+1$

أي ان $u_n=\frac{1+v_n}{1-v_n}$ بالتعويض نجد $u_n=\frac{1+\frac{1}{3\times 2^{n-1}}}{1-\frac{1}{3\times 2^{n-1}}}$ و منه $u_n=\frac{3\times 2^{n-1}+1}{3\times 2^{n-1}-1}$.

- حساب النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+\frac{1}{3\times 2^{n-1}}}{1-\frac{1}{3\times 2^{n-1}}}\right]=1$. لان $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{3\times 2^{n-1}}=0$

(3)حساب المجموع $S_n=v_n+v_{n+1}+...+v_{n+2016}$:

هو مجموع لمتتالية هندسية وعدد الحدود هو $n+2016-n+1=2017$

و منه : $S_n=v_n\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}-1}{\frac{1}{2}-1}\right]=\frac{2}{3\times 2^{n-1}}\left[1-\frac{1}{2^{2017}}\right]$.

- حساب المجموع $S_n'=\frac{1}{u_n+1}+\frac{1}{u_{n+1}+1}+...+\frac{1}{u_{n+2016}+1}$:

لدينا $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ و منه $v_n=1-\frac{2}{u_n+1}$ أي ان $\frac{2}{u_n+1}=1-v_n$ ومنه $\frac{1}{u_n+1}=\frac{1-v_n}{2}$

بالتعويض نجد

$$S_n'=\frac{1-v_n}{2}+\frac{1-v_{n+1}}{2}+...+\frac{1-v_{n+2016}}{2}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(v_n+v_{n+1}+.....v_{n+2016}\right)=\frac{1}{2}(2017)-\frac{1}{2}S_n$$

و منه $S_n'=\frac{2017}{2}-\frac{1}{3\times 2^{n-1}}\left(1-\frac{1}{2^{2017}}\right)$.

التمرين باك 2017 الاستثنائي ت ر الموضوع الثاني

نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرفة ب : $u_1=\frac{1}{\alpha}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_{n+1}=\frac{n+1}{\alpha n}u_n$

حيث α عدد حقيقي اكبر من او يساوي 2 .

(1)(أ) بيّن أنّ : من أجل كل عدد طبيعي n ، غير معدوم : $u_n\succ 0$.

(ب) بين ان المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة تماما ثم استنتج انها متقاربة .

(2) نعتبر المتتالية $\left(v_n\right)$ المعرفة كما يلي : من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $v_n=\frac{1}{\alpha n}u_n$

(أ) بين ان المتتالية $\left(v_n\right)$ هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ و عين حدها الأول v_1 بدلالة α.

(ب) جد بدلالة n و α عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

(3) احسب بدلالة n و α المجموع S_n حيث : $S_n=u_1+\frac{1}{2}u_2+....+\frac{1}{n}u_n$ ثم عين قيمة α حيث $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2016}$

حل التمرين باك 2017 الاستثنائي ت ر الموضوع الثاني

(u_n)معرفة بـ: $u_1=\frac{1}{\alpha}$ و $u_{n+1}=\frac{n+1}{\alpha n}u_n$ حيث $\alpha \succ 2$

(1) (أ) البرهان بالتراجع ان : $u_n \succ 0$

من اجل $n=1$: $u_2=\frac{2}{\alpha}u_1=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{2}{\alpha^2}\succ 0$ ومنه الخاصية صحيحة

نفرض الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن انها صحيحة من اجل $n+1$ أي نفرض : $u_n \succ 0$ ونبرهن ان $u_{n+1}\succ 0$

لدينا $u_n \succ 0$ وبما ان $\alpha \succ 2$ فان $\frac{n+1}{\alpha n}\succ 0$ وبالتالي $\frac{n+1}{\alpha n}u_n \succ 0$ أي ان $u_{n+1}\succ 0$

وبالتالي الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n حيث $n\succ 0$

(ب) تبيان ان (u_n)متناقصة تماما :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{\alpha n}u_n-u_n=u_n\left(\frac{n+1}{\alpha n}-1\right)=u_n\left(\frac{n(1-\alpha)+1}{\alpha n}\right)$$

بما أن $\alpha \succ 2$ فان $1-\alpha \prec -1$ $((1-\alpha))$سالب) وبما ان $n\succ 1$فان $n(1-\alpha)\prec -1$ وبالتالي

$n(1-\alpha)+1\prec 0$

ومنه $u_{n+1}-u_n$ اذن المتتالية متناقصة

– بما أن المتتالية (u_n)متناقصة ومحدودة من الأسفل فإنها متقاربة

(2) (v_n)معرفة من اجل $n\succ 0$: $v_n=\frac{1}{\alpha n}u_n$

(أ) تبيان ان (v_n) هندسية :

$$v_{n+1}=\frac{1}{\alpha(n+1)}u_{n+1}=\frac{1}{\alpha(n+1)}\times\frac{n+1}{\alpha n}u_n=\frac{1}{\alpha^2\cdot n}\cdot\alpha n\cdot v_n$$

ومنه $v_{n+1}=\frac{1}{\alpha}v_n$ اذن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ وحدها الأول : $v_1=\frac{1}{\alpha}u_1=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha^2}$

(ب) عبارة الحد العام v_n :

$$v_n=v_1\cdot q^{n-1}=\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1}=\frac{1}{\alpha^{n+1}}$$

– استنتج عبارة u_n : $v_n=\frac{1}{\alpha n}u_n$ ومنه $u_n=\alpha n\cdot v_n$ وبالتالي :

$$u_n=n\cdot\frac{1}{\alpha^n}=\frac{n}{\alpha^n}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\alpha^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{e^{\ln\alpha^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{e^{n\ln\alpha}}$ وبما ان $\ln\alpha\succ 0$فان $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{e^{n\ln\alpha}}=0$

(3) حساب المجموع S_n :حيث $u_n=\frac{n}{\alpha^n}$

$S_n=u_1+\frac{1}{2}u_2+\frac{1}{3}u_3....+\frac{1}{n}u_n=\frac{1}{\alpha^1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\alpha^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\alpha^3}....+\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{\alpha^n}$ ومنه $S_n=\frac{1}{\alpha^1}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}....+\cdot\frac{1}{\alpha^n}$

وبالتالي S_n هو مجموع nحد لمتتالية هندسية حدها الأول $\frac{1}{\alpha}$واساسها $\frac{1}{\alpha}$ ومنه

$$S_n=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}{1-\frac{1}{\alpha}}=\frac{1-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}{\alpha-1}$$

- تعيين قيمة α : حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{2016}$ معناه $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^n}{\alpha-1} = \dfrac{1}{2016}$

وبما ان $\dfrac{1}{\alpha} \prec 1$ فان $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^n = 0$ ومنه $\dfrac{1}{\alpha-1} = \dfrac{1}{2016}$ اذن $\alpha = 2017$

التمرين باك رياضي 2017 الاستثنائي الموضوع الثاني

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n + 1$

(1) (أ)-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \dfrac{1}{3}\left(4^n - 1\right)$

(ب)- تحقق أنَه من اجل كل عدد طبيعي n :العددان الطبيعيان u_nو u_{n+1} اوليان فيما بينهما

(2) لتكن المتتالية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$.

أ- أثبت أنَ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0.

ب- عبر بدلالة n عن المجموع S_n : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{3n}$

(3)عين بدلالة n غير المعدوم القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين $4^{n+1} - 1$و $4^n - 1$

4) (أ)- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7.

(ب)- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد : $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$ القسمة على 7

حل التمرين باك رياضي 2017 الاستثنائي الموضوع الثاني :

(1) (أ)-إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \dfrac{1}{3}\left(4^n - 1\right)$ حيث : $u_0 = 0$

التحقق $u_0 = \dfrac{1}{3}\left(4^0 - 1\right) = 0$ محققة

نفرض أنَ $u_n = \dfrac{1}{3}\left(4^n - 1\right)$ ولنبرهن أنَ $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(4^{n+1} - 1\right)$

لدينا $u_n = \dfrac{1}{3}\left(4^n - 1\right)$ و $u_{n+1} = 4u_n + 1$ ومنه $u_{n+1} = 4\times\dfrac{1}{3}\left(4^n - 1\right) + 1 = \dfrac{4^{n+1} - 4 + 3}{3} = \dfrac{1}{3}\left(4^{n+1} - 1\right)$

محققة إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \dfrac{1}{3}\left(4^n - 1\right)$.

(ب)- التحقق أنَ u_nو u_{n+1} اوليان فيما بينهما لدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1} - 4u_n = 1$

حسب نظرية بيزو فإنَ العددان u_n و u_{n+1} اوليان فيما بينهما.لانه يوجد عددان صحيحان $\alpha = 1$و $\beta = -4$ حيث :

$\alpha u_{n+1} + \beta u_n = 1$

(2) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$.

(أ)- إثبات أنَ المتتالية (v_n) هندسية ومنه $v_{n+1} = u_{n+1} + \dfrac{1}{3} = 4u_n + 1 + \dfrac{1}{3}$ $v_{n+1} = 4u_n + \dfrac{4}{3} = 4\left(u_n + \dfrac{1}{3}\right)$

أي أن $v_{n+1} = 4u_n$ إذن المتتالية (v_n) هندسية وأساسها 4 وحدها الأول $v_0 = u_0 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$.

(ب)- التعبير بدلالة n عن المجموع S_n : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{3n} = v_0\left(\frac{q^{3n+1}-1}{q-1}\right)$

أي $S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{4^{3n+1}-1}{4-1}\right) = \frac{1}{9}\left(4^{3n+1}-1\right)$

- تعيين القاسم المشترك الأكبر : $u_n = \frac{1}{3}\left(4^n-1\right)$ ومنه $3u_n = \left(4^n-1\right)$ و $3u_{n+1} = \left(4^{n+1}-1\right)$

$PGCD\left(4^{n+1}-1;4^n-1\right) = PGCD\left(3u_{n+1};3u_n\right) = 3PGCD\left(u_{n+1};u_n\right)$

ومنه $PGCD\left(4^{n+1}-1;4^n-1\right) = 3$ لأنَ $PGCD\left(u_{n+1};u_n\right) = 1$

(4) (أ)- دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7 .

$4^0 \equiv 1[7]$ و $4^1 \equiv 4[7]$ و $4^2 \equiv 2[7]$ و $4^3 \equiv 1[7]$

ومنه باقي قسمة العدد 4^n على 7

لما $n = 3k$ فان باقي قسمة العدد 4^n على 7 هو 1

لما $n = 3k+1$ فان باقي قسمة العدد 4^n على 7 هو 4

لما $n = 3k+2$ فان باقي قسمة العدد 4^n على 7 هو 2

(ب)- تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$ القسمة على 7

بالتعويض نجد $A_n = 4^{3n+1} - 1 - 6n - 3^{6n+4}$ ولدينا $3 \equiv -4[7]$ ومنه $3^{6n+4} \equiv 4^{6n+4}[7]$ لأنَ العدد $6n+4$ زوجي . و $3^{6n+4} \equiv \left(4^{3n+2}\right)^2[7] \equiv 4[7]$

$A_n \equiv 4^{3n+1} - 1 - 6n - 4[7]$ و $4^{3n+1} \equiv 4[7]$ ومنه $A_n \equiv 4 - 1 - 6n - 4[7]$ أي $A_n \equiv -1 - 6n[7]$

و A_n يقبل القسمة على 7 يعني أنَ $-1 - 6n \equiv 0[7]$ أي أنَ $-6n \equiv 1[7]$ و منه نجد $n \equiv 1[7]$ أي أنَ $n = 1 + 7k$ حيث $k \in \mathbb{N}$ وهو المطلوب .

التمرين باك 2018 علوم تجريبية الموضوع الأول

(u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$

1) (أ)- برهن بالتراجح أنَه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \succ -2$.

(ب)- بيَن أنَ المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ثمَ استنتج أنَها متقاربة .

2) نضع من أجل كل عدد n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$. اثبت أنَ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الاول

(3) عبَر عن الحد العام v_n و u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

(4)- بين أنَه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0v_0 + u_1v_1 + ... + u_nv_n = \frac{1}{3}\left(1 - n^2\right)$

حل التمرين باك 2018 علوم تجريبية الموضوع الأول :

(1) (أ)- البرهان بالتراجع أنَ : $u_n \succ -2$. حيث $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$

من اجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1 \succ -2$ فالخاصية محققة

نفرض $u_n \succ -2$ ونبرهن ان $u_{n+1} \succ -2$

$u_n \succ -2$ تكافئ $u_n + 5 \succ 3$ ومنه نجد أيضا $\frac{1}{u_n + 5} \prec \frac{1}{3}$ ومنه $-\frac{9}{u_n + 5} \succ -3$ وهذا يكافئ $1 - \frac{9}{u_n + 5} \succ -2$

اذن $u_{n+1} \succ -2$ اي محققة ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ -2$

(ب)- تبيَان أنَ المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{9}{u_n + 5} - u_n = \frac{u_n + 5 - 9 - u_n^2 - 5u_n}{u_n + 5}$ ومنه $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 - 4u_n - 4}{u_n + 5} = -\frac{(u_n + 2)^2}{u_n + 5}$

و بما ان $u_n \succ -2$ فإن $u_{n+1} - u_n \prec 0$. اذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

(2) اثبات ان المتتالية (v_n) حسابية: حيث $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

لدينا $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 2} = \frac{1}{1 - \frac{9}{u_n + 5} + 2} = \frac{1}{3 - \frac{9}{u_n + 5}} = \frac{u_n + 5}{3u_n + 15 - 9}$ و منه $v_{n+1} = \frac{u_n + 5}{3(u_n + 2)}$

ومنه $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 5}{3(u_n + 2)} - \frac{1}{u_n + 2} = \frac{u_n + 5 - 3}{3(u_n + 2)} = \frac{u_n + 2}{3(u_n + 2)} = \frac{1}{3}$

و منه المتتالية (v_n)حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{3}$

(3) عبارة الحد العام : $v_n = v_0 + nr$ و منه $v_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n$

بما ان $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$ فإن $u_n + 2 = \frac{1}{v_n}$ ومنه $u_n = -2 + \frac{1}{v_n}$ وبالتعويض نجد $u_n = -2 + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}n}$ و منه

$u_n = \frac{1 - 2n}{1 + n}$ اذن $u_n = -2 + \frac{3}{1 + n}$

- حساب النهاية : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1 - 2n}{1 + n} = -2$

(4) تبيان ان : $u_0 v_0 + u_1 v_1 + ... + u_n v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

لدينا $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$ و منه $u_n . v_n + 2v_n = 1$ اذن $u_n . v_n = 1 - 2v_n$

و منه نجد من اجل كل عدد طبيعي : $S_n = (1 - 2v_0) + (1 - 2v_1) + ... + (1 - 2v_n)$

ويمكن ان نكتب أيضا $S_n=(1+1+....+1)-2(v_0+v_1+....+v_n)$ و منه

$$S_n=(n+1)-2\left(\frac{n+1}{2}\right)(v_0+v_n)$$

اذن $S_n=(n+1)-(n+1)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}n\right)=(n+1)\left(1-\frac{2+n}{3}\right)=(1+n)\left(\frac{1-n}{3}\right)$ اذن $S_n=\frac{1}{3}(1-n^2)$

التمرين باك 2018 علوم تجريبية الموضوع الثاني

(u_n) متتالية معرّفة بحدّها الأول $u_0=0$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

(1)احسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3

(2) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1}\succ 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3) (v_n)متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي بـ : $v_n=2n+1$

(أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n}=v_n$

(ب) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة nثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

(4) احسب المجموعين S_n و T حيث :

$S_n=\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)+...+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ و $T=e^{u_{1439}}+e^{u_{1440}}+....+e^{u_{2018}}$

حل التمرين باك 2018 علوم تجريبية الموضوع الثاني

المتتاليّة (u_n)معرّفة كما يلي $u_0=0$ و $u_{n+1}=u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

(1) حساب الحدود : u_1، u_2 ، u_3

$u_1=u_0+\ln(3)=\ln(3)$ ، $u_2=u_1+\ln\left(\frac{5}{3}\right)=\ln(3)+\ln(5)-\ln(3)=\ln(5)$ ، $u_3=\ln(5)+\ln\left(\frac{7}{5}\right)=\ln(7)$

(2) تبيان أنّ : $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ أي $\frac{2n+3}{2n+1}-1>0$

لدينا : $\frac{2n+3}{2n+1}-1=\frac{2}{2n+1}$ ، نعلم أنّ : $\frac{2}{2n+1}>0$ ، ومنه : $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

استنتاج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ ، وَ $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ ، أي : $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)>\ln(1)$ ، أي : $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)>0$ ،

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

(3) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 2n+1$:

(أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، : $e^{u_n} = v_n$

– نتحقق من صحة الخاصية من اجل $n = 0$:

$e^{u_0} = v_0$ ، و $v_0 = 2(0)+1 = 1$ و $e^{u_0} = e^0 = 1$ منه : $1 = 1$ ، إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

– نفرض صحة الخاصية من اجل n، أي : $e^{u_n} = v_n$، و نبرهن صحتها من اجل $n+1$ ، أي : $e^{u_{n+1}} = v_{n+1}$.

لدينا فرضا : $e^{u_n} = v_n$ و : $e^{u_{n+1}} = e^{u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}$، أي : $e^{u_{n+1}} = e^{u_n} \times e^{\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}$ ، أي :

$e^{u_{n+1}} = e^{u_n} \times \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ ، وبما ان $v_{n+1} = 2n+3$ و $v_n = 2n+1$ فان $e^{u_{n+1}} = v_n \times \frac{v_{n+1}}{v_n}$،

و منه : $e^{u_{n+1}} = v_{n+1}$.

إذن الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ اذن الخاصية صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: **اي** $e^{u_n} = v_n$.

(ب) استنتاج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) :

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا $e^{u_n} = v_n$ ومنه $u_n = \ln(v_n)$ وبالتالي : $u_n = \ln(2n+1)$

حساب النهاية : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(2n+1) = +\infty$

(4) حساب المجموعين S_n وَ T :

– **حساب** S_n : $S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + ... + \ln\left(\frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}\right) + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ ، أي :

$S_n = \cancel{\ln v_1} - \ln v_0 + \cancel{\ln v_2} \cancel{- \ln v_1} + ... + \cancel{\ln v_{n-1}} \cancel{- v_{n-2}} + \ln v_n \cancel{- \ln v_{n-1}}$

أي : $S_n = -\ln v_0 + \ln v_n$، و منه $S_n = -\ln(1) + \ln(2n+1)$: $S_n = u_n = \ln(2n+1)$ ،

أي : $S_n = \ln(2n+1)$.

حساب T : $T = e^{1439} + e^{1440} + ... + e^{2018}$ حيث $e^{u_n} = v_n$ و $v_n = 2n+1$

(v_n) هي متتالية حسابية اساسها 2 وحدها الاول $v_0 = 1$

$T = e^{1439} + e^{1440} + ... + e^{2018}$، أي : $T = v_{1439} + v_{1440} + ... + v_{2018}$ وهو مجموع $(2018 - 1439 + 1)$ حد لمتتالية حسابية اذن : $T = \frac{580}{2}(v_{1439} + v_{2018})$ أي : $T = 290(2879 + 4037)$ ، و منه : $T = 2005640$.

التمرين باك تقني رياضي 2018 الموضوع الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة والمتزايدة تماما على $[0, +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2x}{e.x+1}$ (e اساس اللوغاريتم النيبري)

و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{5}{4e}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) (أ) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \succ \frac{1}{e}$

(ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{e.u_n\left(\dfrac{1}{e}-u_n\right)}{e.u_n+1}$

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)وبرر انها متقاربة .

(2) لتكن المتتالية (v_n)المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\dfrac{e.u_n}{e.u_n-1}$

اثبت ان المتتالية (v_n)متتالية هندسية اساسها 2يطلب تعيين حدها الأول v_0و عبارة v_n بدلالة n .

3)(أ) تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n=1+\dfrac{1}{e.u_n-1}$ و استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

(ب) احسب بدلالة n المجموع S_nحيث : $S_n=v_0+v_1+....+v_n$

(4) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^nعلى 7

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها S_nيقبل القسمة على 7 .

حل التمرين باك تقني رياضي 2018 الموضوع الأول

f معرفة على $]0;+\infty[$ ب : $f(x)=\dfrac{2x}{ex+1}$ ؛ (u_n) معرفة ب : $u_0=\dfrac{5}{4e}$

(1) إثبات أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\succ\dfrac{1}{e}$: نسمي: $p(n)$.....$u_n\succ\dfrac{1}{e}$

من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\dfrac{5}{4e}\succ\dfrac{1}{e}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض أن الخاصية صحيحة من اجل nونبرهن أنها صحيحة من اجل $n+1$

أي نفرض أن $u_n\succ\dfrac{1}{e}$ ونبرهن أن $u_{n+1}\succ\dfrac{1}{e}$

لدينا $u_n\succ\dfrac{1}{e}$ وبما أن f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن : $f(u_n)\succ f\left(\dfrac{1}{e}\right)$ أي $f(u_n)\succ\dfrac{2\frac{1}{e}}{e\frac{1}{e}+1}$ ومنه

$u_{n+1}\succ\dfrac{1}{e}$ومنه $p(n+1)$ صحيحة

ومنه نستنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن : $p(n)$ صحيحة .

ب – إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{eu_n\left(\dfrac{1}{e}-u_n\right)}{eu_n+1}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{eu_n+1}-u_n=\frac{2u_n-eu_n{}^2-u_n}{eu_n+1}=\frac{u_n-eu_n{}^2}{eu_n+1}=\frac{eu_n\left(\frac{1}{e}-u_n\right)}{eu_n+1}$$

– استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتبرير تقاربها :

لدينا $u_{n+1}-u_n=\dfrac{eu_n\left(\dfrac{1}{e}-u_n\right)}{eu_n+1}$ ومنه إشارة $u_{n+1}-u_n$ من إشارة $\dfrac{1}{e}-u_n$

وبما أن $u_n \succ \dfrac{1}{e}$ فإنه ينتج $\dfrac{1}{e}-u_n \prec 0$ ومنه $u_{n+1}-u_n \prec 0$ومنه المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة تماما .

- تبرير تقارب $\left(u_n\right)$: بما أن $\left(u_n\right)$ محدودة من الأسفل اي $u_n \succ \dfrac{1}{e}$ ومتناقصة فهي متقاربة .

(2) $\left(v_n\right)$ معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\dfrac{eu_n}{eu_n-1}$

- إثبات أن $\left(v_n\right)$ هندسية أساسها 2 ؛ وتعيين حدها الأول وكتابة عبارة v_n :

$$v_{n+1}=\frac{eu_{n+1}}{eu_{n+1}-1}=\frac{\dfrac{2eu_n}{eu_n+1}}{\dfrac{2eu_n}{eu_n+1}-1}=\frac{2eu_n}{eu_n+1}\times\frac{eu_n+1}{2eu_n-eu_n-1}=\frac{2eu_n}{eu_n-1}=2v_n$$

ومنه $\left(v_n\right)$ هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0=\dfrac{eu_0}{eu_0-1}=\dfrac{e\left(\dfrac{5}{4e}\right)}{e\left(\dfrac{5}{4e}\right)-1}=\dfrac{5}{4}\times 4=5$

- عبارة v_n بدلالة n :

$v_n=v_0\times q^n$ ومنه $v_n=5\times 2^n$

3) (أ) – التحقق أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن : $v_n=1+\dfrac{1}{eu_n-1}$

لدينا : $1+\dfrac{1}{eu_n-1}=\dfrac{eu_n-1+1}{eu_n-1}=\dfrac{eu_n}{eu_n-1}$ ومنه $v_n=1+\dfrac{1}{eu_n-1}$

- استنتاج عبارة u_n بدلالة n وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$v_n=1+\dfrac{1}{eu_n-1}$ ومنه $v_n-1=\dfrac{1}{eu_n-1}$ومنه $\dfrac{1}{v_n-1}=eu_n-1$ومنه $u_n=\dfrac{1}{e\left(v_n-1\right)}+\dfrac{1}{e}$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e\left(v_n-1\right)}+\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$$

(ب) – حساب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$

$S_n=v_0\times\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ومنه $S_n=5\times\dfrac{1-2^{n+1}}{1-2}$ومنه $S_n=5\left(2^{n+1}-1\right)$

(4) (أ)– دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة للعدد 2^n على 7 :

$2^0\equiv 1[7]$ ؛ $2^1\equiv 2[7]$ ؛ $2^2\equiv 4[7]$ ؛ $2^3\equiv 1[7]$

من أجل كل عدد طبيعي k نجد : $2^{3k}\equiv 1[7]$ ؛ $2^{3k+1}\equiv 2[7]$ ؛ $2^{3k+2}\equiv 4[7]$

(ب) – تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون S_n قابلا للقسمة على 7 :

S_n قابل للقسمة على 7 معناه $S_n\equiv 0[7]$تكافيء $5\left(2^{n+1}-1\right)\equiv 0[7]$ ومنه $2^{n+1}-1\equiv 0[7]$ومنه $2^{n+1}\equiv 1[7]$

ومنه $n+1=3k$ ومنه $n=3k-1$ حيث $k\in\mathbb{N}$

التمرين باك 2018 تقني رياضي الموضوع الثاني

لتكن (u_n)متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$بحدها العام كما يلي $u_n=2(3)^n$.

و (v_n)متتالية عددية معرفة بحدها الأول $v_0=4$و من اجل كل nمن $\mathbb{N}$: $v_{n+1}=5v_n+u_n$.

(1) نضع من اجل كل nمن $\mathbb{N}$: $w_n=\dfrac{v_n}{u_n}+\dfrac{1}{2}$

– اثبت ان (w_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{5}{3}$، يطلب تعيين حدها الأول .

2) اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم استنتج انه من اجل كل nمن $\mathbb{N}$: $v_n=5^{n+1}-3^n$.

3) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعددين 3^nو 5^nعلى 8 .

4) عين حسب قيم العد الطبيعي nبواقي القسمة الاقليدية للعدد v_n على 8 .

حل التمرين باك 2018 تقني رياضي الموضوع الثاني

$u_n=2(3)^n$ ؛ $n\in\mathbb{N}$ ؛ $v_0=4$ و $v_{n+1}=5v_n+u_n$ ؛

(1) $w_n=\dfrac{v_n}{u_n}+\dfrac{1}{2}$ ؛ اثبات أن (w_n) هندسية أساسها $\dfrac{5}{3}$:

$$w_{n+1}=\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}+\frac{1}{2}=\frac{5v_n+u_n}{2(3)^{n+1}}+\frac{1}{2}=\frac{5v_n+u_n}{2(3)^n\times 3}+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{5v_n+u_n}{3u_n}+\frac{1}{2}=\frac{5v_n}{3u_n}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{3}\times\frac{v_n}{u_n}+\frac{5}{6}=\frac{5}{3}\left(\frac{v_n}{u_n}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{3}w_n$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية حدها الأول $w_0=\dfrac{v_0}{u_0}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$ وأساسها $q=\dfrac{5}{3}$

(2) كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (w_n) ثم استنتاج أن $v_n=5^{n+1}-3^n$:

$$w_n=w_0\times q^n=\frac{5}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n=\frac{(5)^{n+1}}{2\times 3^n}$$

- استنتاج عبارة v_n

$w_n=\dfrac{v_n}{u_n}+\dfrac{1}{2}$ و $w_n=\dfrac{(5)^{n+1}}{2(3)^n}$ ومنه $\dfrac{v_n}{u_n}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{(5)^{n+1}}{2(3)^n}$ تكافيء $\dfrac{v_n}{2(3)^n}=\dfrac{(5)^{n+1}}{2(3)^n}-\dfrac{1}{2}$ ومنه

$v_n=(5)^{n+1}-\dfrac{2(3)^n}{2}$ ومنه $v_n=5^{n+1}-3^n$

(3) دراسة بواقي القسمة لكل من العددين 3^n و 5^n على 8 :

* $3^0\equiv 1[8]$ ؛ $3^1\equiv 3[8]$ ؛ $3^2\equiv 1[8]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا

$3^{2k}\equiv 1[8]$ ؛ $3^{2k+1}\equiv 3[8]$

$5^2 \equiv 1[8]$ ؛ $5^1 \equiv 5[8]$ ؛ $5^0 \equiv 1[8]$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي k : $5^{2k} \equiv 1[8]$ ؛ $5^{2k+1} \equiv 5[8]$

$n=$	$2k$	$2k+1$	
$3^n \equiv$	1	3	[8]
$5^n \equiv$	1	5	[8]

(4) تعيين قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة لـ v_n على 8 :

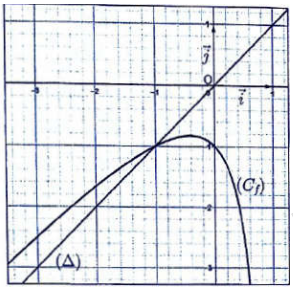
لدينا $5^{n+1} - 3^n = 5^{2k+1} - 3^{2k} \equiv 4[8]$

من أجل $n = 2k$: $5^{n+1} - 3^n = 5^{2k+1} - 3^{2k} \equiv 4[8]$ اذن $v_{2k} \equiv 4[8]$

من أجل $n = 2k+1$: $5^{n+1} - 3^n = 5^{2(k+1)} - 3^{2k+1} \equiv -2[8]$

ومنه $v_{2k+1} \equiv 6[8]$

التمرين باك 2018 رياضي الموضوع الأول



f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = -3$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},)$ و (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$

(1) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثمّ مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل ،

أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

(2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3 \le u_n \le -1$.

(3) (أ)- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} + 1 \ge \dfrac{3}{4}(u_n + 1)$.

(ب)- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n + 1 \ge -2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ ثمّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

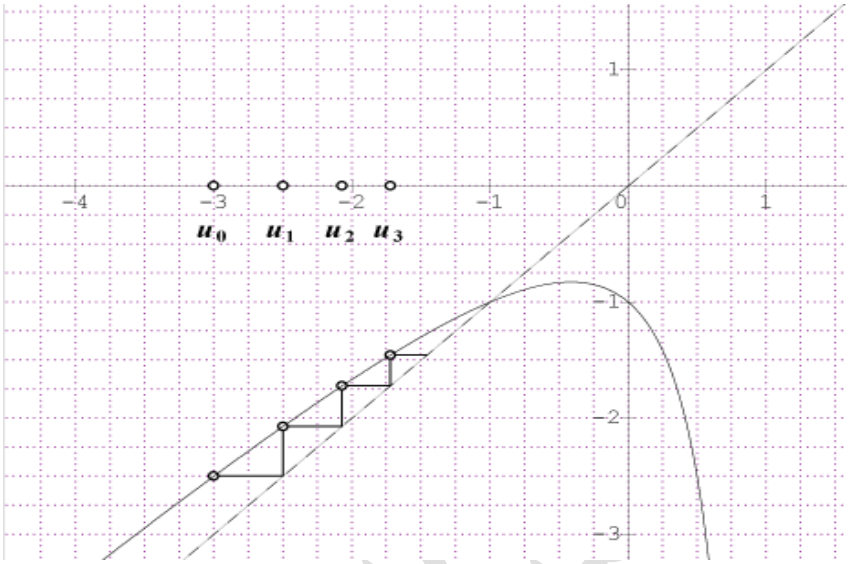
(4) نضع $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $8\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right] \le (u_0+1) + (u_1+1) + \ldots + (u_n+1) \prec 0$

استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

حل التمرين باك 2018 رياضي الموضوع الأول

(1) إعادة رسم الشكل وتمثيل الحدود u_0، u_1 ، u_2 و u_3



التخمين: نخمن أنالمتتالية (u_n)متزايدة تماما ومتقاربة نحو -1 (فاصلة نقطة تقاطع (C_f)مع (Δ))

(2) البرهان بالتراجع أن : $-3 \le u_n \prec -1$ حيث $u_0 = -3$

– من أجل $n = 0$: نجد $-3 \le u_0 = -3 \prec -1$ إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$

– نفرض أن الخاصية محققة من أجل كل عدد طبيعي n أي $-3 \le u_n \prec -1$ ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$أي نبرهن أن $-3 \le u_{n+1} \prec -1$:

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ ومنه من اجل x_1 و x_2 من المجال $]-\infty;-1[$ فإن $x_1 \le x \prec x_2$ يكافيء $f(x_1) \le f(x) \prec f(x_2)$

حسب الشكل $f(-1) = -1$ و $f(-3) = -2,5$و $u_{n+1} = f(u_n)$

و حسب فرضية التراجع $-3 \le u_n \prec -1$نجد $f(-3) \le f(u_n) \prec f(-1)$ أي $-2,5 \le u_{n+1} \prec -1$أي $-3 \le -2,5 \le u_{n+1} \prec -1$ ومنه فإن الخاصية محققة من أجل $n+1$

نستنتج أنه مهما كان العدد الطبيعي n فإن : $-3 \le u_n \prec -1$.

(3) (أ) تبيان أن: $u_{n+1} + 1 \ge \frac{3}{4}(u_n + 1)$: اي نبرهن ان $(u_{n+1} + 1) - \frac{3}{4}(u_n + 1) \ge 0$

لدينا $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 1} = \frac{u_n^2 - 1 + 2}{u_n - 1} = \frac{(u_n - 1)(u_n + 1) + 2}{u_n - 1} = u_n + 1 + \frac{2}{u_n - 1}$

$$u_{n+1} + 1 - \frac{3}{4}(u_n + 1) = u_n + 1 + \frac{2}{u_n - 1} + 1 - \frac{3}{4}(u_n + 1) = \frac{1}{4}(u_n + 1) + 1 + \frac{2}{u_n - 1}$$

و

$$= \frac{(u_n^2 - 1) + 4(u_n - 1) + 8}{4(u_n - 1)} = \frac{u_n^2 + 4u_n + 3}{4(u_n - 1)} = \frac{(u_n + 3)(u_n + 1)}{4(u_n - 1)} \ge 0$$

لأن $-3 \le u_n \prec -1$ إذن $u_n + 3 \ge 0$و $u_n + 1 \le 0$ وأيضا $u_n - 1 \le 0$

إذن $u_{n+1}+1-\frac{3}{4}(u_n+1)\geq 0$ ومنه $\boxed{u_{n+1}+1\geq\frac{3}{4}(u_n+1)}$.

(ب) استنتاج من أجل كل عدد طبيعي : $u_n+1\geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$:

من السؤال السابق لدينا من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}+1\geq\frac{3}{4}(u_n+1)$

وهذا يعني $u_1+1\geq\frac{3}{4}(u_0+1)$ وبضرب الطرفين بالعدد : $\frac{3}{4}$نجد : $\frac{3}{4}(u_1+1)\geq\left(\frac{3}{4}\right)^2(u_0+1)$ و

$u_2+1\geq\left(\frac{3}{4}\right)^2(u_0+1)$ ومنه $u_2+1\geq\frac{3}{4}(u_1+1)$

و $u_3+1\geq\frac{3}{4}(u_2+1)$ .... و $u_{n-1}+1\geq\frac{3}{4}(u_{n-2}+1)$

و $u_n+1\geq\frac{3}{4}(u_{n-1}+1)$ وحسب الخاصية $a\geq\frac{3}{4}b$ و $b\geq\frac{3}{4}c$ اذن $a\geq\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}c$

نجد $u_n+1\geq\underbrace{\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{3}{4}}_{n\ fois}(u_0+1)$ أي $\boxed{u_n+1\geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n}$ وهو المطلوب.

- حساب النهاية : لدينا $u_n+1\geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ووجدنا سابقا أن $-3\leq u_n\prec -1$ أي $-2\leq u_n+1\prec 0$

أي $-2\left(\frac{3}{4}\right)^n\leq u_n+1\prec 0$ وحسب مبرهنة النهاية بالمقارنة نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-2\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]\leq\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+1)\prec 0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+1)\prec 0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+1)=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-1$ وهو المطلوب.

(4) نضع: $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$:

* تبيان من أجل كل عدد طبيعي : $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leq(u_0+1)+(u_1+1)+\ldots+(u_n+1)\prec 0$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي : $u_n\prec -1$ أي $u_n+1\prec 0$ ومنه $u_0+1\prec 0$ و $u_1+1\prec 0$و ...و $u_n+1\prec 0$و مجموع أعداد سالبة هوعدد سالب إذا $(u_0+1)+(u_1+1)+\ldots+(u_n+1)\prec 0$ ....(أ)

ووجدنا سابقا أن $u_n+1\geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

أي $u_0+1\geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^0$و $u_1+1\geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^1$و ....و $u_n+1\geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ بالجميع طرف إلى طرف نجد :

$$(u_0+1)+(u_1+1)+\ldots+(u_n+1)\geq -2\left[\left(\frac{3}{4}\right)^0+\left(\frac{3}{4}\right)^1+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$$

و $\left(\frac{3}{4}\right)^0+\left(\frac{3}{4}\right)^1+...+\left(\frac{3}{4}\right)^n$ هو مجموع $(n+1)$حد لمتتالية هندسة حدها الأول 1 وأساسها $\frac{3}{4}$ فنجد

$$\left(\frac{3}{4}\right)^0+\left(\frac{3}{4}\right)^1+...+\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)}=4\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$$ بالتعويض نجد

$$(u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\geq -8\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$$ أي

$$(u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\geq 8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ب)$$

من (أ) و (ب) نستنتج أن $0\prec(u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\leq 8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]$ وهو المطلوب.

- استنتاج النهاية :

لدينا $0\prec(u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\leq 8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]$ ومنه

$$0\prec u_0+u_1+u_2+...+u_n+\underbrace{1+1+...+1}_{n+1\ fois}\leq 8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]$$ أي

$$0\prec S_n+n+1\leq 8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]$$

ومنه $S_n\succ -n-1$وبإستعمال النهاية نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n\succ\lim\limits_{n\to+\infty}(-n-1)$ وهكذا نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\infty$.

التمرين باك 2019 الشعبة علوم تجريبية م 1

المتتاليةالعددية (u_n) معرفة بـ : $u_0=13$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$

(1) (أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\succ 1$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)و استنتج انها متقاربة .

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln(u_n-1)$

أثبت أن المتتالية (v_n)حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

(3) أكتب v_n بدلالة n ثم بين أنه : من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=1+\frac{12}{5^n}$و احسب عندئذ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

(4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0-1)(u_1-1)\times...\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$

حل التمرين باك 2019 الشعبة علوم تجريبية م 1

(1) (أ) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n > 1$:

من اجل $n = 0$: $u_0 > 1$ لدينا $u_0 = 13 > 1$ فهي محققة.

نفرض انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n > 1$ محققة ونبرهن ان $u_{n+1} > 1$ أيضا محققة:

لدينا $\frac{u_n - 1}{5} = \frac{u_n + 4 - 5}{5} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1 = u_{n+1} - 1$ وبما ان $u_n > 1$ فان $\frac{u_n - 1}{5} > 0$ ومنه نستنتج ان $u_{n+1} - 1 > 0$ ومنه نجد $u_{n+1} > 1$ فهي اذن محققة. نستنتج مما سبق انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n > 1$.

(ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج انها متقاربة:

لنا $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n = \frac{u_n + 4 - 5u_n}{5} = \frac{-4u_n + 4}{5} = -\frac{4}{5}(u_n - 1)$ وبما ان $u_n > 1$ أي $u_n - 1 > 0$ ومنه $-\frac{4}{5}(u_n - 1) < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$ دوما ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

<u>استنتاج:</u> بما انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n > 1$ أي المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 1 وهي متناقصة تماما فهي اذن متقاربة.

(2) اثبات ان المتتالية (v_n) حسابية وتعيين أساسها وحدها الأول:

$$v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1} - 1) - \ln(u_n - 1) = \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1}\right) = \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{u_n - 1}{5}}{u_n - 1}\right) = \ln\left(\frac{u_n - 1}{5} \times \frac{1}{u_n - 1}\right) = \ln\frac{1}{5} = -\ln 5$$

ومنه نستنتج ان المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = -\ln 5$ وحدها الأول $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln(13 - 1) = \boxed{\ln 12}$

(3) كتابة v_n بدلالة n : لنا $v_n = v_0 + nr$ ومنه بالتعويض نجد: $\boxed{v_n = \ln 12 - n\ln 5}$

لنا $v_n = \ln(u_n - 1)$ ومنه $u_n - 1 = e^{v_n} = e^{\ln 12 - n\ln 5} = e^{\ln 12 - \ln 5^n} = e^{\ln\frac{12}{5^n}} = \frac{12}{5^n}$ ومنه نجد $\boxed{u_n = 1 + \frac{12}{5^n}}$ وهو المطلوب. نجد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{12}{5^n}\right) = 1 + 0 = \boxed{1}$.

(4) تبيان انه من اجل كل عدد طبيعي n فان: $(u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \ldots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$:

حسب خواص اللوغاريتم وبما انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n - 1 > 0$ فان

$$\ln\left[(u_0-1)(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)\right] = \ln(u_0-1)+\ln(u_2-1)+\ldots+\ln(u_n-1)$$

$$= v_0+v_1+\ldots+v_n = \frac{n+1}{2}(v_0+v_n) = \frac{n+1}{2}(\ln 12+\ln 12-n\ln 5) = \frac{n+1}{2}(2\ln 12-n\ln 5)$$

$$= (n+1)\ln 12-\frac{n(n+1)}{2}\ln 5 = \ln 12^{n+1}-\ln 5^{\frac{n(n+1)}{2}} = \ln\left(\frac{12^{n+1}}{5^{\frac{n(n+1)}{2}}}\right)$$

ومنه نجد $(u_0-1)(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1) = \frac{12^{n+1}}{5^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \left(\frac{12^{n+1}}{\left(5^{\frac{n}{2}}\right)^{n+1}}\right) = \left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$ وهو المطلوب.

التمرين باك 2019 علوم تجريبية الموضوع 2

f الدالة المعرفة على المجال $[4;7[$ ب : $f(x) = \sqrt{x+2}+4$

(1) (أ) بين ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$

(ب) استنتج انه : من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن : $f(x) \in [4;7[$

(2) برهن انه : من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x)-x = \frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$

ثم استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x)-x \succ 0$

(3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) برهن بالتراجع أنه : من اجل كل عدد طبيعي n : $4 \le u_n \prec 7$

(ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين انها متقاربة

(4) (أ) بين أنه : من اجل كل عدد طبيعي n : $7-u_{n+1} \prec \frac{1}{4}(7-u_n)$

(ب) استنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \prec 7-u_n \prec 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n)

حل التمرين باك 2019 علوم تجريبية م2

$$f(x) = \sqrt{x+2}+4\ 2$$

(1)(أ) الدالة f تقبل الاشتقاق على $[4;7[$ ومنه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$ اذن الدالة f متزايدة تماما على $[4;7[$.

(ب) لينا $x \in [4;7[$ ومنه $4 \le x < 7$ ومنه $6 \le x+2 < 9$ ومنه $\sqrt{6} \le \sqrt{x+2} < 3$ ومنه

$\sqrt{6}+4 \le \sqrt{x+2}+4 < 7$ ومنه $4 \le \sqrt{6}+4 \le f(x) < 7$ أي $\boxed{f(x) \in [4;7[}$.

$$f(x)-x=\sqrt{x+2}+4-x=\frac{\left(\sqrt{x+2}-(x-4)\right)\left(\sqrt{x+2}+(x-4)\right)}{\sqrt{x+2}+(x-4)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-(x-4)^2}{\sqrt{x+2}+x+4}=\frac{x+2-\left(x^2-8x+16\right)}{\sqrt{x+2}+x+4}=\frac{x+2-x^2+8x-16}{\sqrt{x+2}+x+4} \quad (2)$$

$$=\boxed{\frac{-x^2+9x-14}{x+4+\sqrt{x+2}}}=\frac{(2-x)(x-7)}{x+4+\sqrt{x+2}}$$

بما ان $x\in[4;7[$ فان $x+4+\sqrt{x+2}>0$ وبالتالي إشارة $f(x)-x$ من نفس إشارة $-x^2+9x-14$.

إشارة $-x^2+9x-14$: $\Delta=28$ ومنه له جذران هما $x_1=2$. $x_2=7$. وبما ان $x\in[4;7[$

اذن $f(x)-x\succ 0$ لان $2-x\prec 0$ و $x-7\prec 0$

(3) (أ) البرهان بالتراجع : من اجل $n=0$ نجد $4\le u_0=4<7$ اذن الخاصية الابتدائية محققة.

* نفرض ان $4\le u_n<7$ محققة من اجل كل عدد طبيعي n ونبرهن ان $4\le u_{n+1}<7$ محققة كذلك

حسب فرضية التراجع $4\le u_n<7$ وبما ان الدالة f متزايدة تماما فهي تحفظ الترتيب ومنه $f(4)\le f(u_n)<f(7)$

و $f(7)=7$ و $f(4)=\sqrt{6}+4$

ومنه نجد $4\le\sqrt{6}+4\le u_{n+1}<7$ اذن $4\le u_{n+1}<7$ محققة اذن من اجل كل عدد طبيعي : $4\le u_n<7$.

(ب) وجدنا سابقا انه مهما كان x من $[4;7[$ فان $f(x)-x>0$.و بما ان $4\le u_n<7$ من اجل كل عدد طبيعي n فان $f(u_n)-u_n>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

بما ان $4\le u_n<7$ فهي محودة من الأعلى بـ 7 وبما انها متزايدة تماما اذن فهي متقاربة.

(4) (أ)
$$7-u_{n+1}=7-\sqrt{u_n+2}-4=3-\sqrt{u_n+2}=\frac{\left(3-\sqrt{u_n+2}\right)\left(3+\sqrt{u_n+2}\right)}{\left(3+\sqrt{u_n+2}\right)}=$$

$$=\frac{7-u_n}{3+\sqrt{u_n+2}}$$

لدينا $4\le u_n<7$ ومنه $3\le\sqrt{u_n+2}<\sqrt{6}$ اذن : $3+\sqrt{6}\le 3+\sqrt{u_n+2}<6$ أي $4\le 3+\sqrt{u_n+2}<6$

وبالتالي : $\frac{1}{3+\sqrt{u_n+2}}\prec\frac{1}{4}$ وبالضرب بالعدد الموجب : $7-u_n$ نجد : $\frac{7-u_n}{3+\sqrt{u_n+2}}\prec\frac{1}{4}(7-u_n)$ وهو م

(ب) لدينا من اجل كل عدد طبيعي $7-u_{n+1}<\frac{1}{4}(7-u_n)$ أي

$$\rightarrow 7-u_1<\frac{1}{4}(7-u_0)$$
$$\rightarrow 7-u_2<\frac{1}{4}(7-u_1)$$
.
.
$$.\rightarrow 7-u_{n-1}<\frac{1}{4}(7-u_{n-2})$$
$$\rightarrow 7-u_n<\frac{1}{4}(7-u_{n-1})$$

وبضرب الأطراف بعضها في بعض نجد :

$(7-u_1)(7-u_2)...(7-u_{n-1})(7-u_n)<\frac{1}{4}(7-u_0)\frac{1}{4}(7-u_1)...\frac{1}{4}(7-u_{n-1})$ وبالاختزال نجد :

$7-u_n<\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times...\times\frac{1}{4}(7-u_0)=\left(\frac{1}{4}\right)^n(7-4)=3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ أي $\boxed{7-u_n<3\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

ووجدنا سابقا $u_n-7<0$ أي $\boxed{7-u_n>0}$ ومنه $\boxed{0<7-u_n<3\left(\frac{1}{4}\right)^n}$ وهو المطلوب.

لدينا $0<7-u_n<3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ومنه بإدخال النهاية نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}0<\lim\limits_{n\to+\infty}(7-u_n)<\lim\limits_{n\to+\infty}3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ أي

$\lim\limits_{n\to+\infty}(7-u_n)=0$ ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=7}$.

التمرين باك 2020 علوم تجريبية الموضوع الاول

متتالية عددية معرفة بـ : $u_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n-1$

(1) نفرض ان $\alpha=-4$

برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=-4$

(2)نفرض ان $\alpha\neq-4$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية بـ : $v_n=u_n+4$

(أ)أثبت أن المتتالية (v_n)هندسية أساسها $\frac{3}{4}$

(ب) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n و α ثم بين ان المتتالية (u_n)متقاربة

(ج) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0+u_1+....+u_n$.

أحسب S_n بدلالة n و α ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

حل التمرين باك 2020 علوم تجريبية الموضوع الاول

$$u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n-1 \text{ و } u_0=\alpha$$

(1) البرهان بالتراجع ان : $u_n=-4$ حيث $\alpha=-4$

من اجل $n=0$: $u_0=-4$ محققة لان $u_0=\alpha=-4$

نفرض الخاصية صحيحة من اجل كل n ونبرهن انها صحيحة من اجل $n+1$ أي نفرض ان $u_n=-4$ ونبرهن ان $u_{n+1}=-4$

من الفرض نكتب $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n-1=\frac{3}{4}(-4)-1=-4$ ومنه الخاصية صحيحة وبالتالي من اجل كل n فان $u_n=-4$

(2) (v_n) متتالية حيث $v_n=u_n+4$ و $\alpha\neq-4$

(أ) إثبات أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$:

$$v_{n+1}=u_{n+1}+4=u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n-1+4=\frac{3}{4}u_n+3=\frac{3}{4}(v_n-4)+3=\frac{3}{4}v_n$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدها الأول $v_0=u_0+4=\alpha+4$

عبارة الحد العام هي : $v_n=v_0\times q^n=(\alpha+4).\left(\frac{3}{4}\right)^n$

(ب) عبارة الحد العام u_n بدلالة n و α : $u_n=v_n-4=(\alpha+4).\left(\frac{3}{4}\right)^n-4$

بما ان $\frac{3}{4}\prec 1$ فان $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha+4).\left(\frac{3}{4}\right)^n-4=-4$ اذن (u_n) متقاربة

(ج) حساب المجموع $S_n=u_0+u_1+....+u_n$ هو مجوع $n+1$ حد

و من $u_n=v_n-4$ فان

$$S_n=(v_0-4)+(v_1-4)+....+(v_n-4)=(v_0+v_1+...+v_n)+(-4-4-....-4)$$

$$S_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+(n+1)(-4)=(\alpha+4)\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}+(n+1)(-4)=4(\alpha+4)\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)-4(n+1)$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$:

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}4(n+1)=+\infty\end{cases}$$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}4(\alpha+4)\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)-4(n+1)=-\infty$

التمرين باك 2020 علوم تجريبية الموضوع الثاني

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي : $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n-2n+3$

(1) احسب u_1 و u_2 ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية بـ : $v_n = u_n - n + 1$

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب حساب حدها الأول

(ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n

(ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

(أ) بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} + n^2 - n - 3\right)$

(ب) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

حل التمرين باك 2020 علوم تجريبية الموضوع الثاني

(u_n) معرفة كما يلي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

(1) حساب u_1 و u_2 : $u_1 = 3u_0 - 2(0) + 3 = 3$ و $u_2 = 3u_1 - 2(1) + 3 = 10$

يبدو ان المتتالية (u_n) متزايدة

(2) (v_n) معرفة بـ : $v_n = u_n - n + 1$

(أ) تبيان أن (v_n) هندسية أساسها 3 : لدينا $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1 = 3u_n - 3n + 3 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n$$

ومنه $v_{n+1} = 3v_n$ هندسية أساسها 3 وحدها الأول $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$

(ب) كتابة v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 q^n = 1 \times 3^n = 3^n$$

استنتاج عبارة الحد العام u_n بدلالة n : $v_n = u_n - n + 1$ ومنه $u_n = v_n + n - 1 = 3^n + n - 1$

(ج) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :ندرس إشارة الفرق $u_{n+n} - u_n$

$$u_{n+n} - u_n = 3^{n+1} + (n+1) - 1 - (3^n + n - 1) = 3^{n+1} - 3^n + 1 = 3^n(3-1) + 1 = 2 \times 3^n + 1$$

واضح أن $u_{n+n} - u_n \succ 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة

(3) (أ) تبيان أن : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ حيث $S_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} + n^2 - n - 3\right)$

لدينا $u_n = v_n + n - 1$ أي $u_n = v_n + (-1) + n(1)$ وهذا يعني ان u_n هو مجموع حدي عام لمتتاليتين احداهما (v_n) هندسية أساسها 3 والاخرى (w_n) حسابية أساسها 1 وحدها الاول (-1)

اذن S_n مجموع $(n+1)$ حد للمتتالية (v_n) و مجموع $(n+1)$ حد للمتتالية (w_n)

أي $S_n = (v_0 + v_1 + ... + v_n) + (w_0 + w_1 + ... + w_n) = v_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + \frac{n+1}{2}(w_0 + w_n)$

ومنه $S_n = 1 \times \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} + \frac{n+1}{2}(-1 + n - 1) = \frac{3^{n+1} - 1}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}$ اذن

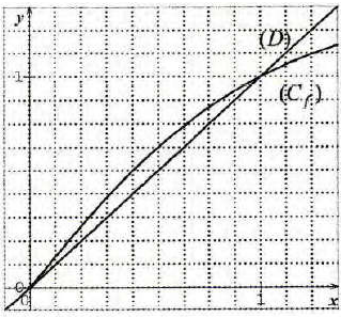
$$S_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 1 + (n+1)(n-2)\right)$$

(ب) حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1+(n+1)(n-2)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(3^{n+1}-1\right)+\lim_{n\to+\infty}(n+1)(n-2) = +\infty$$

التمرين باك 2020 الشعبة تقني رياضي الموضوع الاول

الدالة العددية f معرفة ومتزايدة تماما على $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+5}}$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي م . م $(o,\vec{i},\vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y=x$



المتتالية (u_n) معرفة بحدها الاول $u_0=\dfrac{1}{2}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=f(u_n)$

(1)(أ) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط الإنشاء

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

(2) (أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي : $\dfrac{1}{2}\le u_n \le 1$

(ب) بين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج انها متقاربة

(3) المتتالية (v_n) معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\dfrac{u_n^2}{1-u_n^2}$. برهن أنها متتالية هندسية اساسها $\dfrac{9}{5}$ يطلب تعيين حدها الاول v_0

(4) (أ) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

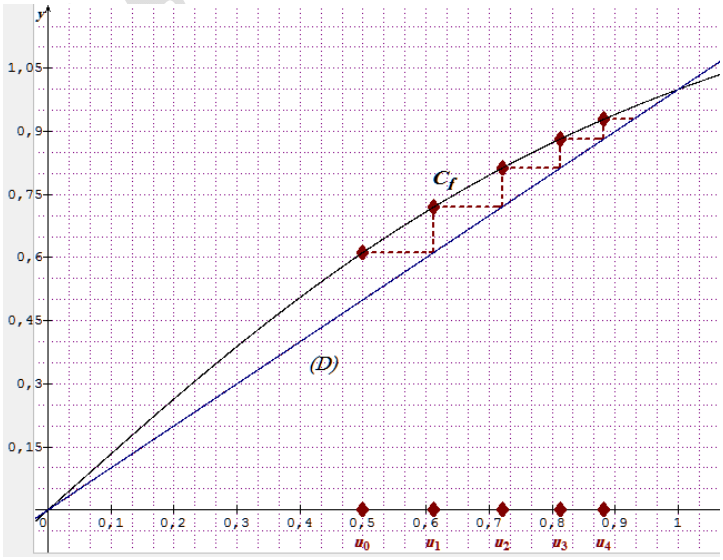
(ب) أحسب نهاية المتتالية (u_n)

حل التمرين باك 2020 الشعبة تقني رياضي الموضوع 1

f معرفة على $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+5}}$ و (D) المستقيم : $y=x$

$u_0=\dfrac{1}{2}$ و : $u_{n+1}=f(u_n)$

(1)(أ) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 :



(ب) من تمثيل الحدود يبدو أن المتتالية (u_n)متزايدة تماما ومتقاربة

(2) (أ) البرهان أن : $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$

من اجل $n=0$: $\frac{1}{2} \le u_0 \le 1$ محققة لان $u_0 = \frac{1}{2}$.

نفرض صحة الخاصية من اجل n ونبرهن انها صحيحة من اجل $n+1$ أي نفرض $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$ ونبرهن ان $\frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$

لدينا $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$ وبما أن الدالة fمتزايدة فان $f\left(\frac{1}{2}\right) \le f(u_n) \le f(1)$ و $f(1) = \frac{3}{\sqrt{4(1)^2+5}} = \frac{3}{3} = 1$و

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} \approx 0,612 \succ \frac{1}{2}$ أي $\frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$أي ان الخاصية صحيحة من اجل $n+1$

وبالتالي من اجل كل nطبيعي $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$

(ب) تبيان ان المتتالية (u_n)متزايدة تماما : ندرس اشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{\sqrt{4u_n^2+5}} - u_n = u_n \times \frac{3-\sqrt{4u_n^2+5}}{\sqrt{4u_n^2+5}} = u_n \times \frac{\left(3-\sqrt{4u_n^2+5}\right)\left(3+\sqrt{4u_n^2+5}\right)}{\sqrt{4u_n^2+5}\left(3+\sqrt{4u_n^2+5}\right)} =$$

$$= u_n \cdot \frac{9-(4u_n^2+5)}{\sqrt{4u_n^2+5}\left(3+\sqrt{4u_n^2+5}\right)} = u_n \frac{4(1-u_n^2)}{\sqrt{4u_n^2+5}\left(3+\sqrt{4u_n^2+5}\right)} = u_n \frac{4(1-u_n)(1+u_n)}{\sqrt{4u_n^2+5}\left(3+\sqrt{4u_n^2+5}\right)}$$

بما أن $u_n \le 1$ فان $(1-u_n) \ge 0$ و يكون المقدار $u_n \frac{4(1+u_n)}{\sqrt{4u_n^2+5}\left(3+\sqrt{4u_n^2+5}\right)} \succ 0$ موجبا تماما لان

$u_n \succ 0$

وبالتالي $u_{n+1} - u_n \succ 0$ ومنه المتتالية (u_n)متزايدة تماما

بما أن (u_n) متزايدة ومحدودة من الاعلى($u_n \le 1$) نستنتج انها متقاربة .

(3) (v_n)معرفة بـ : $v_n = \frac{u_n^2}{1-u_n^2}$. نبرهن أنها متتالية هندسية اساسها $\frac{9}{5}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{1-u_{n+1}^2} = \frac{\frac{9u_n^2}{4u_n^2+5}}{1-\frac{9u_n^2}{4u_n^2+5}} = \frac{9u_n^2}{4u_n^2+5-9u_n^2} = \frac{9u_n^2}{5-5u_n^2} = \frac{9u_n^2}{5(1-u_n^2)} = \frac{9}{5} \times \frac{u_n^2}{(1-u_n^2)} = \frac{9}{5} v_n$$

اذن (v_n)متتالية هندسية اساسها $\frac{9}{5}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0^2}{1-u_0^2} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

(4) (أ) عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^n$

و من العلاقة $v_n=\frac{u_n^2}{1-u_n^2}$ نجد $v_n\left(1-u_n^2\right)=u_n^2$ أي $v_n=u_n^2+v_nu_n^2$ ومنه $u_n^2=\frac{v_n}{1+v_n}$ وبالتالي

$u_n=\sqrt{\frac{v_n}{1+v_n}}$ لان $\left(u_n\succ 0\right)$ اذن $u_n=\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^n}}$

(ب) حساب نهاية المتتالية (u_n): لدينا (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{9}{5}\succ 1$ فهي متباعدة و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{v_n}{1+v_n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{v_n}{v_n(1+\frac{1}{v_n})}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{(1+\frac{1}{v_n})}}=\sqrt{\frac{1}{1+0}}=1$

التمرين باك 2020 الشعبة تقني رياضي الموضوع الثاني

المتتالية (u_n)معرفة بحدها الاول $u_0=\frac{1}{2}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3-\frac{4}{u_n+2}$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1\prec u_n\prec 2$

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=\frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$

(ب) حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة

(3) المتتالية (v_n)معرفة من اجل كل عدد طبيعي nب : $v_n=\frac{u_n+\alpha}{u_n+1}$ حيث αعدد حقيقي .

(أ) أوجد αحتى تكون (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{4}$ ثم احسب حدها الاول v_0

(ب) بين عندئذ أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{2\times 4^n-1}{4^n+1}$

حل التمرين باك 2020 الشعبة تقني رياضي الموضوع الثاني

$u_0=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=3-\frac{4}{u_n+2}$

(1) البرهان بالتراجع أن : $-1\prec u_n\prec 2$:

من اجل $n=0$: $-1\prec u_0\prec 2$ محققة لان $u_0=0,5$

نفرض الخاصية صحيحة من أجل nأي : $-1\prec u_n\prec 2$ ونبرهن ان $-1\prec u_{n+1}\prec 2$

لدينا $-1\prec u_n\prec 2$ ومنه $1\prec u_n+2\prec 4$ وبالتالي $\frac{1}{4}\prec\frac{1}{u_n+2}\prec 1$ ومنه $1\prec\frac{4}{u_n+2}\prec 4$

ومنه تصبح $-4\prec-\frac{4}{u_n+2}\prec-1$ ومنه أيضا $-4+3\prec 3-\frac{4}{u_n+2}\prec-1+3$

إذن $-1\prec u_{n+1}\prec 2$ وبالتالي الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.اذن صحيحة من أجل كل طبيعي n

(2) تبيان أن : $u_{n+1}-u_n=\frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$

$$u_{n+1}-u_n=3-\frac{4}{u_n+2}-u_n=\frac{3(u_n+2)-4-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^2+u_n+2}{u_n+2}=$$

$$=\frac{-(u_n-2)(u_n+1)}{u_n+2}=\frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$$

(ب) اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

نعلم ان $-1\prec u_n$ أي $(u_n+1)\succ 0$ ومنه $u_n+2\succ 0$ ونعلم $u_n\prec 2$ ومنه $(2-u_n)\succ 0$

اذن $u_{n+1}-u_n\succ 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

وبما $u_n\prec 2$ أي أن المتتالية (u_n)محدودة من الاعلى ومنه نستنتج انها متقاربة

(3) (أ) إيجاد αحتى تكون (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{4}$: حيث $v_n=\frac{u_n+\alpha}{u_n+1}$

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+\alpha}{u_{n+1}+1}=\frac{3-\frac{4}{u_n+2}+\alpha}{3-\frac{4}{u_n+2}+1}=\frac{\frac{3(u_n+2)-4+\alpha(u_n+2)}{u_n+2}}{\frac{3(u_n+2)-4+(u_n+2)}{u_n+2}}=$$

$$=\frac{(3+\alpha)(u_n+2)-4}{4(u_n+2)-4}=\frac{(3+\alpha)(u_n+2)-4}{4(u_n+2-1)}=\frac{1}{4}\times\frac{(3+\alpha)u_n+2\alpha+2}{u_n+1}$$

اذن (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{4}$ تعني $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$ أي $v_n=\frac{(3+\alpha)u_n+2\alpha+2}{u_n+1}$أي يجب أن يكون

$3+\alpha=1$ و $2\alpha+2=\alpha$ ومنه $\alpha=-2$وهي القيمة المطلوبة .

حساب الحد الاول v_0 : $v_0=\frac{u_0+\alpha}{u_0+1}=\frac{\frac{1}{2}-2}{\frac{1}{2}+1}=-1$

(ب) تبيان أن : $u_n=\frac{2\times 4^n-1}{4^n+1}$

عبارة الحد العام v_n : $v_n=v_0q^n=-\left(\frac{1}{4}\right)^n=-\frac{1}{4^n}$

و $v_n=\frac{u_n-2}{u_n+1}$ ومنه $v_n(u_n+1)=u_n-2$ أي $v_n+2=u_n-v_nu_n$ ومنه $u_n=\frac{v_n+2}{1-v_n}$

وبالتالي $u_n=\frac{-\frac{1}{4^n}+2}{1+\frac{1}{4^n}}=\frac{\frac{-1+2\times 4^n}{4^n}}{\frac{4^n+1}{4^n}}=\frac{2\times 4^n-1}{4^n+1}$

حساب النهاية :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\times 4^n-1}{4^n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\times\left(2-\frac{1}{4^n}\right)}{4^n\left(1+\frac{1}{4^n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{4^n}}{1+\frac{1}{4^n}}=\frac{2-0}{1+0}=2$$

التمرين باك 2020 الشعبة رياضي الموضوع الاول

الدالة العددية f معرفة على المجال $[1;4]$ بـ : $f(x)=\dfrac{4x+4}{9-x}$

(1)(أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1;4]$

(ب) اثبت أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $[1;4]$ فان : $f(x)\in[1;4]$

(2)المتتالية (u_n) معرفة بحدها الاول $u_0=2$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 مبرزا خطوط الإنشاء

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي : $1\prec u_n\prec 4$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج انها متقاربة

(3) المتتالية (v_n) معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n-4}$.

(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول v_0

(ب) عبرعن الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

(4) المجموع S_n معرف بـ : $S_n=v_0+8v_1+8^2v_2+\ldots+8^nv_n$. احسب S_n بدلالة n

حل التمرين باك 2020 شعبة رياضيات الموضوع 1

(1)(أ) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1;4]$: $f(x)=\dfrac{4x+4}{9-x}$

$f'(x)=\dfrac{4(9-x)+(4x+4)}{9-x}=\dfrac{40}{(9-x)^2}\succ 0$ ومنه f متزايدة على المجال $[1;4]$

(ب) اثبات أن $f(x)\in[1;4]$

من اجل كل x من $[1;4]$ فان $1\le x\le 4$ وبما ان الدالة f متزايدة فان $f(1)\le f(x)\le f(4)$

و منه $1\le f(x)\le 4$ اذن $f(x)\in[1;4]$

(2) $u_0=2$ و $u_{n+1}=\dfrac{4u_n+4}{9-u_n}$

(أ) البرهان بالتراجع أن : $1\prec u_n\prec 4$

من اجل $n=0$: $1\prec u_0\prec 4$ محققة لان $u_0=2$.

نفرض الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن انها صحيحة من اجل $n+1$ أي نبرهن ان $1\prec u_{n+1}\prec 4$

لدينا اذن فرضا $1\prec u_n\prec 4$ وبما ان الدالة f متزايدة فان $f(1)\prec f(u_n)\prec f(4)$ أي $1\prec u_{n+1}\prec 4$

ومنه الخاصية صحيحة من اجل كل n طبيعي .

(ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n+4}{9-u_n}-u_n=\frac{u_n^2-5u_n+4}{9-u_n}=\frac{(u_n-4)(u_n-1)}{9-u_n}$$

وبما ان $1\prec u_n\prec 4$ أي $(u_n-4)\prec 0$ و $(u_n-1)\succ 0$

ومن $1\prec u_n\prec 4$ يكون $-4\prec -u_n\prec -1$ ومنه $5\prec 9-u_n\prec 8$ وبالتالي $u_{n+1}-u_n\prec 0$

اذن المتتالية (u_n) متناقصة

وبما ان (u_n) متناقصة ومحدودة من الاسفل $4 \prec u_n \prec 1$فانها متقاربة

(3) (أ) برهان أن (v_n)هندسية : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 4}$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-4} = \frac{\dfrac{4u_n+4}{9-u_n}-1}{\dfrac{4u_n+4}{9-u_n}-4} = \frac{4u_n+4-9+u_n}{4u_n+4-36+4u_n} = \frac{5u_n-5}{8u_n-32} = \frac{5(u_n-1)}{8(u_n-4)}$$

اذن $v_{n+1} = \dfrac{5(u_n-1)}{8(u_n-4)} = \dfrac{5}{8}.\dfrac{u_n-1}{u_n-4} = \dfrac{5}{8}v_n$ ومنه (v_n)هندسية اساسها $\dfrac{5}{8}$وحدها الاول $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0-4} = -\dfrac{1}{2}$

(ب) عبارة الحد العام v_n: $v_n = v_0 \times q^n = -\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{5}{8}\right)^n$

من العبارة $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n-4}$ نجد $v_n(u_n-4) = u_n - 1$ ومنه $u_n(v_n-1) = 4v_n - 1$ اذن

$$u_n = \frac{4v_n-1}{v_n-1} = \frac{4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right).\left(\dfrac{5}{8}\right)^n - 1}{-\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{5}{8}\right)^n - 1} = \frac{2\left(\dfrac{5}{8}\right)^n + 1}{\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{5}{8}\right)^n + 1} = \frac{4\left(\dfrac{5}{8}\right)^n + 2}{\left(\dfrac{5}{8}\right)^n + 2}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: بما أن $\dfrac{5}{8} \prec 1$فان $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{8}\right)^n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4\left(\dfrac{5}{8}\right)^n + 2}{\left(\dfrac{5}{8}\right)^n + 2} = \dfrac{0+2}{0+2} = 1$

(4) حساب المجموع S_n: حيث $S_n = v_0 + 8v_1 + 8^2 v_2 + \ldots + 8^n v_n$

لدينا $v_n = -\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{5}{8}\right)^n = -\dfrac{5^n}{2\times 8^n}$ ومنه $8^n v_n = 8^n \times \left(-\dfrac{5^n}{2\times 8^n}\right) = -\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8^n\times 5^n}{8^n} = -\dfrac{1}{2}\times 5^n$

نضع $w_n = -\dfrac{1}{2}\times 5^n$ هو حد عام لمتتالية هندسية حدها الاول $w_0 = -\dfrac{1}{2}$ واساسها 5 .

ومنه S_n هو مجموع $(n+1)$حدللمتتالية الهندسية (w_n).

اذن $S_n = -\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5^{n+1}-1}{5-1} = -\dfrac{1}{8}(5^{n+1}-1)$

التمرين باك 2020 شعبة رياضي الموضوع 2

المتتاليتان (u_n)و (v_n)معرفتان على مجموعة الاعداد الطبيعية حيث

α عدد حقيقي و $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3\alpha u_n + (1-3\alpha)v_n \end{cases}$ $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 3\alpha v_n + (1-3\alpha)u_n \end{cases}$

المتتالية (w_n)معرفة على N بـ : $w_n = v_n - u_n$

(1)(أ) احسب w_0 ثم w_1 بدلالة α

(ب)بين ان (w_n) متتالية هندسية أساسها $(1-6\alpha)$

(ج) اكتب عبارة w_nبدلالة nو α ثم عين قيم αحتى تكون $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

نفرض في كل ما يلي : $\frac{1}{6} \prec \alpha \prec \frac{1}{3}$

(2) أ) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما وان (v_n)متناقصة تماما

(ب) استنتج أن (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ

(3) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n + v_n = 2$ واستنتج قيمة ℓ

(4) احسب بدلالة α المجموع $S = u_0 + u_1 + ... + u_{2020}$

حل التمرين باك 2020 رياضي م 2

$w_n = v_n - u_n$ و $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 3\alpha v_n + (1-3\alpha)u_n \end{cases}$ و $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3\alpha u_n + (1-3\alpha)v_n \end{cases}$

(1)(أ) الحساب : $w_0 = v_0 - u_0 = 3 - (-1) = 4$ و

$$w_1 = v_1 - u_1 = 3\alpha v_0 + u_0 - 3\alpha u_0 - 3\alpha u_0 - v_0 + 3\alpha v_0 =$$
$$= 6\alpha v_0 - 6\alpha u_0 + u_0 - v_0 = 18\alpha + 6\alpha - 1 - 3 = 24\alpha - 4$$

اذن $w_1 = 24\alpha - 4 = 4(6\alpha - 1)$

(ب)تبيان ان (w_n) متتالية هندسية أساسها $(6\alpha - 1)$: $w_n = v_n - u_n$

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = v_{n+1} = 3\alpha v_n + (1-3\alpha)u_n - 3\alpha u_n - (1-3\alpha)v_n =$$
$$= 6\alpha v_n - 6\alpha u_n + u_n - v_n = 6\alpha(v_n - u_n) - (v_n - u_n) = (v_n - u_n)(6\alpha - 1)$$

اذن $w_{n+1} = (v_n - u_n)(6\alpha - 1) = (6\alpha - 1)w_n$ ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $(6\alpha - 1)$

(ج) كتابة عبارة w_nبدلالة nو α :

$$w_n = w_0 \times q^n = 4(6\alpha - 1)^n$$

تعيين قيم α حتى تكون $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$:

$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$ معناه $\lim\limits_{n \to +\infty} 4(6\alpha - 1)^n = 0$ وهذا يتحقق اذا كان $-1 \prec 6\alpha - 1 \prec 1$ أي $0 \prec 6\alpha \prec 2$

ومنه $0 \prec \alpha \prec \frac{1}{3}$

(2) أ) إثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما : حيث $\frac{1}{6} \prec \alpha \prec \frac{1}{3}$

$$u_{n+1} - u_n = 3\alpha u_n + (1-3\alpha)v_n - u_n = (3\alpha - 1)u_n - (3\alpha - 1)v_n =$$
$$= (3\alpha - 1)(u_n - v_n) = -(3\alpha - 1)w_n$$

وبما ان $\frac{1}{6} \prec \alpha \prec \frac{1}{3}$فان $3\alpha \prec 1$ ومنه $3\alpha - 1 \prec 0$ وكذلك $6\alpha \prec 1$ أي $6\alpha - 1 \succ 0$

وبالتالي $(6\alpha - 1)^n \succ 0$ ومنه ينتج $-(3\alpha - 1)w_n \succ 0$. اذن (u_n) متزايدة تماما

اثبات أن (v_n)متناقصة تماما :

$$v_{n+1} - v_n = 3\alpha v_n + (1-3\alpha)u_n - v_n = (3\alpha - 1)v_n - (3\alpha - 1)u_n =$$
$$= (3\alpha - 1)(v_n - u_n) = (3\alpha - 1)w_n$$

وبما أن $3\alpha - 1 \prec 0$ و $(6\alpha - 1)^n \succ 0$ فان $(3\alpha - 1)w_n \prec 0$. اذن (v_n)متناقصة تماما .

(ب) استنتاج أن (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ :

لدينا (u_n) متزايدة تماما و (v_n)متناقصة تماما

وبما ان $\frac{1}{6} \prec \alpha \prec \frac{1}{3}$ فان $1 \prec 6\alpha \prec 2$ ومنه $0 \prec 6\alpha - 1 \prec 1$ أي أن اساس المتتالية (w_n) اقل من 1 وموجب.

منه $\lim_{n\to+\infty}(6\alpha-1)^n = 0$ اذن $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$

وهذا يعني المتتاليتان (u_n) و (v_n)متجاورتان وبالتالي متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ .

(3) تبيان انه من اجل كل n : $u_n + v_n = 2$. نبرهن ذلك بالتراجع

من اجل $n = 0$: $u_0 + v_0 = -1 + 3 = 2$ محققة

نفرض صحة الخاصية من اجل nونبرهن انها صحيحة من اجل $n+1$ أي : $u_{n+1} + v_{n+1} = 2$

$$u_{n+1} + v_{n+1} = 3\alpha u_n + (1-3\alpha)v_n + 3\alpha v_n + (1-3\alpha)u_n =$$

$$= 3\alpha(u_n + v_n) + (1-3\alpha)(v_n + u_n) = (u_n + v_n)(3\alpha + 1 - 3\alpha) = (u_n + v_n) = 2$$

اذن من اجل كل n : $u_n + v_n = 2$

– استنتاج قيمة ℓ : لدينا $u_n + v_n = 2$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$

ومنه $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell + \ell = 2$ اذن $\ell = 1$

(4) حساب المجموع $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{2020}$:

لدينا $\begin{cases} u_n + v_n = 2 \\ v_n - u_n = w_n \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} v_n = 2 - u_n \\ v_n - u_n = w_n \end{cases}$ اذن $w_n = v_n - u_n = 2 - u_n - u_n = 2 - 2u_n$

ومنه $u_n = -\frac{1}{2}w_n + 1$

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{2020} = \left(-\frac{1}{2}w_0 + 1\right) + \left(-\frac{1}{2}w_1 + 1\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{2}w_{2020} + 1\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}(w_0 + w_1 + \ldots + w_{2020}) + (1 + 1 + \ldots + 1) = -\frac{1}{2}w_0 \times \frac{1 - q^{2021}}{1 - q} + 2021$$

$$= -\frac{1}{2}.4 \times \frac{1 - (6\alpha - 1)^{2021}}{1 - (6\alpha - 1)} + 2021 = \frac{1 - (6\alpha - 1)^{2021}}{3\alpha - 1} + 2021$$

اذن $S = \frac{1 - (6\alpha - 1)^{2021}}{3\alpha - 1} + 2021$

التمرين باك 2021 علوم تجريبية الموضوع الاول

المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = -4n + 3$

(1) بين ان متتالية (u_n)حسابية يطلب تعيين أساسها rوحدها الأول u_0

(2) من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

(أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = -2n^2 + n + 3$

(ب) عين قيمة العدد الطبيعي nحيث $S_n = -30132$

(3) المتتالية العددية (v_n) حدودها موجبة تماما ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \ln(v_n)$

(أ) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n

(ب) بين المتتالية (v_n)هندسية أساسها e^{-4}

(4) من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $S'_n = \ln\left[v_0\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]+\ln\left[v_1\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]+...+\ln\left[v_n\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right]$

أحسب S'_n بدلالة n

حل التمرين باك 2021 علوم تجريبية الموضوع الاول

(u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = -4n+3$

(1) المتتالية (u_n) حسابية معناه $u_{n+1}-u_n = -4(n+1)+3+4n-3 = -4$ ومنه أساسها $r=-4$ وحدها الأول $u_0 = 3$

(2) $S_n = u_0+u_1+...+u_n$

(أ) تبيان ان : $S_n = -2n^2+n+3$

$$S_n = u_0+u_1+...+u_n = \frac{n+1}{2}(u_0+u_n) = \frac{n+1}{2}(3-4n+3) = (n+1)(3-2n) = -2n^2+n+3$$

(ب) تعيين قيمة n : $S_n = -30132$ معناه $-2n^2+n+3 = -30132$ اي $-2n^2+n+30135 = 0$

المميز $\Delta = 241081$ ومنه $n = 123$ وقيمة $n = -\frac{245}{2}$ مرفوضة

(3) المتتالية (v_n) حدودها موجبة تماما و : $u_n = \ln(v_n)$

(أ) كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n : $u_n = \ln(v_n)$ ومنه $v_n = e^{u_n} = e^{-4n+3}$

(ب) تبيان ان (v_n) هندسية أساسها e^{-4} : $v_{n+1} = e^{-4(n+1)+3} = e^{-4n-4+3} = e^{-4n+3}.e^{-4} = e^{-4}\times v_n$

ومنه (v_n) هندسية أساسها e^{-4} وحدها الاول $v_0 = e^3$

(4) $S'_n = \ln\left[v_0\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]+\ln\left[v_1\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]+...+\ln\left[v_n\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right]$

حساب S'_n بدلالة n :

$$S'_n = \ln v_0+\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ln v_1+\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)+...+\ln v_n+\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \left[\ln v_0+\ln v_1+....+\ln v_n\right]+\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)+....\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= S_n+\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+....+\ln\frac{n}{n+1}+\ln\frac{n+1}{n+2} = S_n+\ln\left(\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{3}\times...\times\frac{n}{\cancel{n+1}}\times\frac{\cancel{n+1}}{n+2}\right)$$

$$= S_n+\ln\frac{1}{n+2}$$

التمرين باك 2021 علوم تجريبية الموضوع الثاني

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{8}(u_n + 5)$

(1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \prec 3$

(2) بين ان (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج انها متقاربة

(3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 3(3-u_n)$

(أ) احسب v_0 ثم بين ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{8}$

(ب) أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3 - 3\left(\frac{3}{8}\right)^n$

(ج) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

(4) من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $P_n = (3-u_0) \times (3-u_1) \times .... \times (3-u_n)$

أحسب P_n بدلالة n

حل التمرين باك 2021 علوم تجريبية الموضوع الثاني

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{8}(u_n + 5)$

(1) البرهان بالتراجع ان $u_n \prec 3$:

من اجل $n = 0$ فان $u_0 \prec 3$ محققة لان $u_0 = 0$

نفرض انه من اجل كل n طبيعي : $u_n \prec 3$ ونبرهن ان $u_{n+1} \prec 3$

من $u_n \prec 3$ نجد $u_n + 5 \prec 8$ ومنه بالضرب بالعدد $\frac{3}{8}$ نجد $\frac{3}{8}(u_n + 5) \prec \frac{3}{8} \times 8$ اي $u_{n+1} \prec 3$ ومنه الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

(2) تبيان ان (u_n) متزايدة تماما :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{8}(u_n + 5) - u_n = \frac{3}{8}u_n - u_n + 5 \times \frac{3}{8} = -\frac{5}{8}u_n + 3 \times \frac{5}{8} = \frac{5}{8}(3-u_n)$$

وبما ان $u_n \prec 3$ فان $\frac{5}{8}(3-u_n) \succ 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما

وبما ان (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بالعدد 3 فانها متقاربة نحو العدد 3

(4) (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 3(3-u_n)$

(أ) حساب v_0 : $v_0 = 3(3-u_0) = 9$

تبيان ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{8}$:

$$v_{n+1} = 3(3-u_{n+1}) = 3\left(3 - \frac{3}{8}(u_n + 5)\right) = 3\left(\frac{9}{8} - \frac{3}{8}u_n\right) = 3 \times \frac{3}{8}(3-u_n) = \frac{3}{8}.v_n$$

(ب) كتابة عبارة الحد العام v_n : $v_n = v_0 \times q^n = 9.\left(\frac{3}{8}\right)^n$

لدينا $v_n = 3(3-u_n)$ ومنه $3u_n = 9 - v_n$ اذن $u_n = 3 - \frac{1}{3}v_n$ وبالتالي $u_n = 3 - \frac{1}{3}\times 9.\left(\frac{3}{8}\right)^n = 3 - 3\left(\frac{3}{8}\right)^n$

(ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3 - 3\left(\frac{3}{8}\right)^n = 3$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n = 0$

(4) حساب P_n بدلالة n حيث : $P_n = (3-u_0)\times(3-u_1)\times....\times(3-u_n)$

لدينا $v_n = 3(3-u_n)$ ومنه $(3-u_n) = \frac{1}{3}v_n$ وبالتعويض في عبارة P_n نجد :

$$P_n = (3-u_0)\times(3-u_1)\times....\times(3-u_n) = \frac{1}{3}v_0 \times \frac{1}{3}v_1 \times .... \times \frac{1}{3}v_n =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \times \left(v_0 \times v_1 \times .... \times v_n\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \times \left(v_0 \times v_0.q \times .... \times v_0.q^n\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \times {v_0}^{n+1}\left(.q \times .q^2 \times ... \times .q^n\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \times 9^{n+1} \times q^{1+2+...+n}$$

$$= \left(\frac{9}{3}\right)^{n+1} \times \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = 3^{n+1} \times \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

التمرين باك شعبة الرياضيات 2021 الموضوع الأول

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ $u_0 = -\frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{11u_n + 4}{-4u_n + 1}$

(1)(أ)- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = -\frac{11}{4} + \frac{27}{4(-4u_n + 1)}$

(ب)- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < -1$

(ج)- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

(2) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

(أ)- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 ثم احسب حدها الأول

(ب)-أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2 + 4\times 3^n} - 2$

(ج)- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

(3))(أ)- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3}{u_n + 2} - 2 = -v_n$

(ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \ln(\frac{3}{u_0 + 2} - 2) + \ln(\frac{3}{u_1 + 2} - 2) + ... + \ln(\frac{3}{u_n + 2} - 2)$

أحسب S_n بدلالة n

حل التمرين باك 2021 شعبة رياضيات م 1 :

المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{11u_n+4}{-4u_n+1}$ و $u_0=-\dfrac{3}{2}$

(1)(أ)- التحقق أن: $u_{n+1}=-\dfrac{11}{4}+\dfrac{27}{4(-4u_n+1)}$ بتوحيد المقامات نجد

$$-\frac{11}{4}+\frac{27}{4(-4u_n+1)}=\frac{44u_n-11+27}{4(-4u_n+1)}=\frac{44u_n+16}{4(-4u_n+1)}=\frac{4(11u_n+4)}{4(-4u_n+1)}$$ و منه

$-\dfrac{11}{4}+\dfrac{27}{4(-4u_n+1)}=\dfrac{11u_n+4}{-4u_n+1}$ إذن $-\dfrac{11}{4}+\dfrac{27}{4(-4u_n+1)}=u_{n+1}$ و هو المطلوب .

(ب)- البرهان بالتراجع : من اجل $n=0$: $-2<u_0<-1$ محققة لأن $-2<-\dfrac{3}{2}<-1$

نفرض أن $-2<u_n<-1$ صحيحة و لنبرهن صحة $-2<u_{n+1}<-1$

$-2<u_n<-1$ بالضرب في -4 نجد $4<-4u_n<8$ بإضافة 1 نجد $5<-4u_n+1<9$ بالقلب نجد

$$\frac{1}{9}<\frac{1}{-4u_n+1}<\frac{1}{5}$$

بالضرب في $\dfrac{27}{4}$ نجد $\dfrac{27}{36}<\dfrac{27}{4(-4u_n+1)}<\dfrac{27}{20}$ أي أن $\dfrac{3}{4}<\dfrac{27}{4(-4u_n+1)}<\dfrac{27}{20}$ بإضافة $-\dfrac{11}{4}$ نجد

$\dfrac{3}{4}-\dfrac{11}{4}<-\dfrac{11}{4}+\dfrac{27}{4(-4u_n+1)}<\dfrac{27}{20}-\dfrac{11}{4}$ أي ان $-2<u_{n+1}<-\dfrac{7}{5}$ و $-\dfrac{7}{5}\le -1$ إذن $-2<u_{n+1}<-1$

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2<u_n<-1$.

(ج) -إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{11u_n+4}{-4u_n+1}-u_n=\dfrac{4u_n^2+10u_n+4}{-4u_n+1}$ إشارة الفرق من إشارة البسط

مميز $4u_n^2+10u_n+4$ هو $\Delta=36$ و منه له جذران هما -2 و $-\dfrac{1}{2}$ ومنه

$$u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n^2+10u_n+4}{-4u_n+1}=\frac{4(u_n+\frac{1}{2})(u_n+2)}{-4u_n+1}$$

بما أن $-2<u_n<-1$ فإن (u_n+2) موجب و $(u_n+\dfrac{1}{2})$ سالب و $-4u_n+1$ موجب وبالتالي $u_{n+1}-u_n$ عدد حقيقي سالب إذن المتتالية (u_n) متناقصة.

(2)(أ) إثبات أن المتتالية (v_n) هندسية : $v_n=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$

$v_{n+1}=\dfrac{2u_{n+1}+1}{u_{n+1}+2}=\dfrac{2\dfrac{11u_n+4}{-4u_n+1}+1}{\dfrac{11u_n+4}{-4u_n+1}+2}$ أي أن $v_{n+1}=\dfrac{22u_{n+1}+8-4u_n+1}{11u_n+4-8u_n+2}=\dfrac{18u_n+9}{3u_n+6}$ و

منه $v_{n+1}=3.\left(\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}\right)$ إذن $v_{n+1}=3v_n$ و منه (v_n) هندسية أساسها 3 و حدها الأول

$v_0=\dfrac{2\left(-\dfrac{3}{2}\right)+1}{\left(-\dfrac{3}{2}\right)+2}=-4$ (ب) كتابة عبارة الحد العام : $v_n=v_0.q^n$ أي أن $v_n=-4\times3^n$

بما أن $v_n=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$ أي أن $v_nu_n+2v_n=2u_n+1$ و منه $u_n(v_n-2)=-2v_n+1$ إذن

$u_n=\dfrac{-2v_n+1}{v_n-2}$ بالتعويض $v_n=-4\times3^n$ نجد $u_n=\dfrac{8\times3^n+1}{-4\times3^n-2}$ أي أن $u_n=\dfrac{-8\times3^n-1}{2+4\times3^n}$

$\dfrac{3}{2+4\times3^n}-2=\dfrac{3-4-8\times3^n}{2+4\times3^n}=\dfrac{-8\times3^n-1}{2+4\times3^n}=u_n$ و محققة .

(ج)- حساب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{3}{2+4\times3^n}-2\right]=-2$

(3)(أ)- التحقق أن: $\dfrac{3}{u_n+2}-2=-v_n$:

بتوحيد المقامات نجد $\dfrac{3}{u_n+2}-2=\dfrac{3-2u_n-4}{u_n+2}=\dfrac{-2u_n-1}{u_n+2}=-\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}=-v_n$

(ب)- نضع $S_n=\ln\left(\dfrac{3}{u_0+2}-2\right)+\ln\left(\dfrac{3}{u_1+2}-2\right)+...+\ln\left(\dfrac{3}{u_n+2}-2\right)$ بما

$\dfrac{3}{u_n+2}-2=-v_n$ نجد $S_n=\ln(-v_0)+\ln(-v_1)+\ln(-v_n)$ لدينا $-v_n=4\times3^n$ و منه

$\ln(-v_n)=\ln4+n\ln(3)$

نضع : $t_n=\ln(-v_n)$ أي $t_n=\ln4+n\ln(3)$ ومنه (t_n) متتالية حسابية أساسها $\ln(3)$ و حدها الأول $\ln(-v_0)=\ln4$

و منه $S_n=t_0+t_1+....+t_n=\dfrac{n+1}{2}(t_0+t_n)$

اذن $S_n=\dfrac{n+1}{2}[\ln(-v_0)+\ln(-v_n)]$ إذن $S_n=\dfrac{n+1}{2}[2\ln(4)+n.\ln(3)]$

التمرين باك شعبة الرياضيات 2021 الموضوع الثاني

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{2+\dfrac{1}{2}u_n^2}$

(1)(أ)- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<2$

(ب)- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

(2) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n^2 - 4$

(أ)- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول

(ب)-أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \sqrt{4-3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

(ج)- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0^2 + u_1^2 + ... + u_n^2$

(أ) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{n\times 2^{n+2}+3}{2^n} - 2$

(ب) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $PGCD(2^n;3+n\times 2^{n+2}) = PGCD(2^n;3)$

(ج) استنتج ان $PGCD(2^n;3+n\times 2^{n+2}) = 1$

(د) جد قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $S_n = \frac{83}{8}$

حل التمرين باك شعبة الرياضيات 2021 الموضوع الثاني

(1)(أ) المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_{n+1} = \sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}$ و $u_0 = 1$

البرهان بالتراجع أن : $0 < u_n < 2$. لدينا $0 < u_0 < 2$ محققة لأن $0 < 1 < 2$

نفرض أن $0 < u_n < 2$ صحيحة و نبرهن أن $0 < u_{n+1} < 2$ صحيحة

$0 < u_n < 2$ بالتربيع نجد $0 < u_n^2 < 4$ بالضرب في $\frac{1}{2}$ نجد $0 < \frac{1}{2}u_n^2 < 2$ ومنه نجد

$0 < 2 + \frac{1}{2}u_n^2 < 4$ وبالتالي نجد $2 < 2 + \frac{1}{2}u_n^2 < 4$ و $0 < \sqrt{2}$ و $\sqrt{2} < \sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2} < 2$ و منه $0 < \sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2} < 2$

إذن $0 < u_{n+1} < 2$

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$.

(ب)- اتجاه التغير : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2} - u_n = \frac{2+\frac{1}{2}u_n^2 - u_n^2}{\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}+u_n} = \frac{2-\frac{1}{2}u_n^2}{\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}+u_n}$

أي أن $u_{n+1} - u_n = \frac{\frac{1}{2}\left(4-u_n^2\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}+u_n}$ وبما ان $0 < u_n < 2$ فان $u_n^2 < 4$ اذن $u_{n+1} - u_n$ عدد حقيقي موجب

وبالتالي (u_n) متتالية متزايدة.

وبما ان (u_n) متتالية متزايدة و محدودة فهي متتالية متقاربة

(2)المتتالية (v_n) معرفة بـ : $v_n = u_n^2 - 4$ و $u_{n+1} = \sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}$

(أ)إثبات أن (v_n) هندسية :

$v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ أي أن $v_{n+1}=u_{n+1}^2-4=2+\frac{1}{2}u_n^2-4=\frac{1}{2}u_n^2-2=\frac{1}{2}\left(u_n^2-4\right)$

و منه (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=u_0^2-4=-3$.

(ب) كتابة عبارة الحد العام : $v_n=v_0.q^n$ أي أن $v_n=-3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ولدينا $v_n=u_n^2-4$ أي $u_n^2=v_n+4$ و $0<u_n<2$ و منه $u_n=\sqrt{v_n+4}$ إذن

$u_n=\sqrt{-3\left(\frac{1}{2}\right)^n+4}$.

(ج)- حساب النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{-3\left(\frac{1}{2}\right)^n+4}=2$.

(3) (أ) حساب المجموع : $S_n=u_0^2+u_1^2+u_2^2+...+u_n^2$.

لدينا $u_n^2=v_n+4$ يعني أن $S_n=\left(4+v_0\right)+\left(4+v_1\right)+\left(4+v_2\right)+...+\left(4+v_n\right)$ و منه

$S_n=\left(4+4+...+4\right)+\left(v_0+v_1+v_2+...+v_n\right)$ أي أن $S_n=4(n+1)+v_0.\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ إذن

$S_n=4(n+1)-3.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}$ و منه $S_n=4(n+1)+6\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]$. أي أن

$S_n=4(n+1)+\left[\frac{6}{2^{n+1}}-6\right]$.

يعني أن $S_n=4n+\left[\frac{3}{2^n}-2\right]$. أي أن : $S_n=\frac{n\times2^{n+2}+3}{2^n}-2$ و هو المطلوب .

(ب)إثبات أن $pgcd\left(2^n;3+n\times2^{n+2}\right)=pgcd\left(2^n;3\right)$:

نضع $d=pgcd\left(2^n;3+n\times2^{n+2}\right)$ و $d'=pgcd\left(2^n;3\right)$

لدينا من جهة : $d=pgcd\left(2^n;3+n\times2^{n+2}\right)$ يعني أن d قاسم للعددين 2^n و $3+n\times2^{n+2}$ و منه فإن d قاسم للعددين $3+n\times2^{n+2}$ و $n\times2^{n+2}$ إذن d قاسم لفرقهما ومنه d قاسم للعدد 3 ($3+n\times2^{n+2}-n\times2^{n+2}=3$)

أي أن d قاسم للعددين 3 و 2^n إذن d قاسم لـ d' .....(1)

ومن جهة أخرى : $d'=pgcd\left(2^n;3\right)$ يعني أن d' قاسم للعددين 2^n و 3 و منه فإن d' قاسم للعدد $3+n\times2^{n+2}$ إذن d' قاسم للعددين $3+n\times2^{n+2}$ و 2^n إذن d' قاسم لـ d .....(2)

من (1) و (2) نستنتج أن $pgcd\left(2^n;3+n\times2^{n+2}\right)=pgcd\left(2^n;3\right)$.

(ج)- بما أن $pgcd(2;3)=1$ فإن $pgcd\left(2^n;3\right)=1$ و

$pgcd\left(2^n;3+n\times2^{n+2}\right)=pgcd\left(2^n;3\right)$

إذن $pgcd\left(2^n;3+n\times2^{n+2}\right)=1$.

(د)–لدينا $S_n = \frac{n\times 2^{n+2}+3}{2^n} - 2$ يكون $S_n = \frac{83}{8}$. معناه $\frac{n\times 2^{n+2}+3}{2^n} - 2 = \frac{83}{8}$.

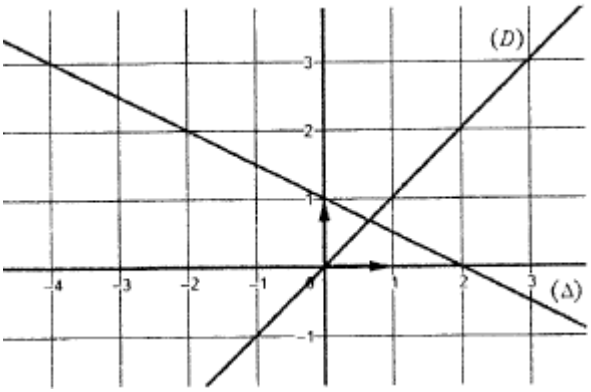
أي أن $\frac{n\times 2^{n+2}+3}{2^n} = \frac{99}{8}$. بما أن $pgcd\left(2^n ; 3+n\times 2^{n+2}\right)=1$ بالمطابقة نجد $2^n = 8$

و $3+n\times 2^{n+2} = 99$ من $2^n = 8$ نجد $n = 3$ وهي تحقق $3+n\times 2^{n+2} = 3+3\times 2^5 = 99$

التمرين باك 2022 شعبة علوم تجريبية الموضوع الاول

المستوي منسوب الى المعلم . م . م $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ، (D) و (Δ) مستقيمان معرفان بمعادلتيهما كما يلي :

$y = x$ و $y = -\frac{1}{2}x+1$



المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = -4$ و

$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$

(1) أنقل الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود : $u_3 ; u_2 ; u_1 ; u_0$ مبرزا خطوط التمثيل .

(2)(أ) هل المتتالية (u_n) رتيبة ؟ علل إجابتك

(ب) ضع تخمينا حول تقارب المتتالية (u_n)

(3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$v_n = \left(u_n - \frac{2}{3}\right)^2$

(أ) بين ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ثم احسب v_0

(ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ واستنتج أن (u_n) متقاربة

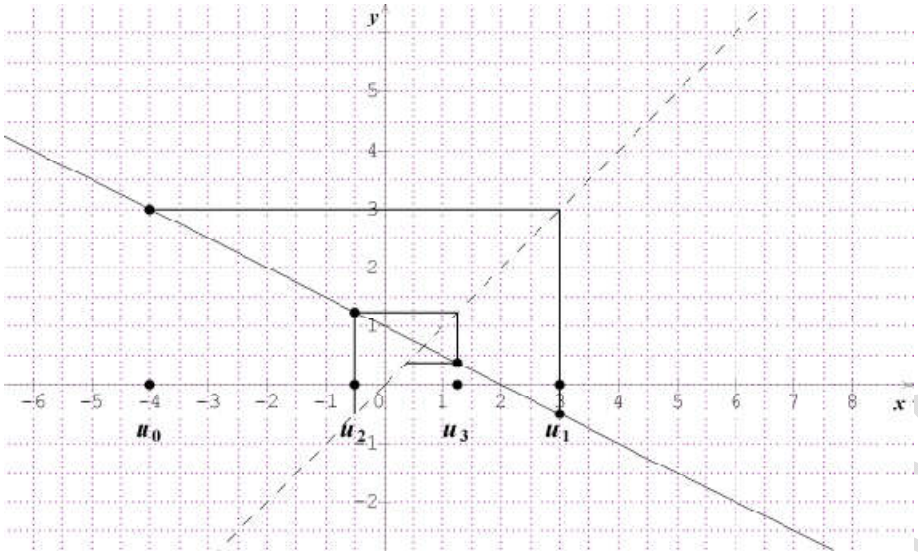
(4) بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $v_0 \times v_1 \times .... \times v_{n-1} = \left(\frac{14}{3}\right)^{2n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-n}$

حل التمرين باك 2022 شعبة علوم تجريبية الموضوع الاول

(D) و (Δ) مستقيمان معرفان بمعادلتيهما $y = x$ و $y = -\frac{1}{2}x+1$

(u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = -4$ و $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$

(1) تمثيل على محور الفواصل الحدود : $u_3 ; u_2 ; u_1 ; u_0$



(2)(أ) المتتالية (u_n) ليست رتيبة . لان $u_1 \succ u_0$ و $u_1 \succ u_2$; لا هي متناقصة ولا هي متزايدة

(ب) من خلال تمثيل الحدود يبدو أن المتتالية (u_n) متقاربة

(3) (أ) تبيان ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ حيث : $v_n = \left(u_n - \frac{2}{3}\right)^2$

$$v_{n+1} = \left(u_{n+1} - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}u_n + 1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{2}{3}\right)^2$$

ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

وحدها الاول $v_0 = \left(u_0 - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(-4 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{196}{9}$

(ب) عبارة الحد العام v_n بدلالة n : $v_n = v_0.q^n = \frac{196}{9} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{196}{9} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ لأن $\frac{1}{4} \prec 1$

وبما أن $v_n = \left(u_n - \frac{2}{3}\right)^2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ فان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$ ومنه نستنتج أن (u_n) متقاربة .

الأستاذ مزيان مصطفى

(4) تبيان أن: $v_0 \times v_1 \times .... \times v_{n-1} = \left(\frac{14}{3}\right)^{2n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-n}$

من العبارة $v_n = \frac{196}{9} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ نكتب :

$$v_0 \times v_1 \times .... \times v_{n-1} = \frac{196}{9} \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \frac{196}{9} \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times ... \times \frac{196}{9} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} =$$

$$= \left(\frac{196}{9}\right)^n \times \left(\frac{1}{4}\right)^{0+1+2+...+(n-1)} = \left(\frac{196}{9}\right)^n \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(\frac{196}{9}\right)^n \times \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$= \left(\frac{196}{9}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n(n-1)} = \left(\left(\frac{14}{3}\right)^2\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n(n-1)} = \left(\frac{14}{3}\right)^{2n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-n}$$

التمرين باك 2022 شعبة علوم تجريبية الموضوع الثاني

$\begin{cases} u_0 \times u_2 = e^2 \\ \ln u_1 + \ln u_7 = -4 \end{cases}$ (u_n) المتتالية الهندسية المعرفة على $\mathbb{N}$ وحدودها موجبة تماما حيث:

(1) (أ) عين u_1 والأساس q للمتتالية (u_n)

(ب) تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = e^{2-n}$

(2) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

(3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_0 = e^3$: و $v_{n+1} = v_n + u_n$

(أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{e^{3-n} - e^4}{1-e}$

(ب) بين أن المتتالية (v_n) متقاربة

(4) (أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{e} v_n = \frac{1}{1-e}\left(u_n - e^3\right)$

(ب) نعتبر المجموع S'_n حيث $S'_n = \frac{1}{e} v_0 + \frac{1}{e} v_1 + ... + \frac{1}{e} v_n$

تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S'_n = \frac{1}{1-e}\left[S_n - (n+1)e^3\right]$

حل التمرين باك 2022 شعبة علوم تجريبية الموضوع الثاني

$\begin{cases} u_0 \times u_2 = e^2 \\ \ln u_1 + \ln u_7 = -4 \end{cases}$ (u_n) المتتالية الهندسية المعرفة على $\mathbb{N}$ وحدودها موجبة تماما حيث:

(1) (أ) تعيين u_1 : من خواص المتتالية الهندسية $u_0 \times u_2 = u_1^2 = e^2$

ومنه $u_1 = e$ لأن المتتالية حدودها موجبة تماما

تعيين الأساس q للمتتالية (u_n) : من العلاقة $\ln u_1 + \ln u_7 = -4$ نكتب : $\ln u_1 + \ln(u_1 \times q^6) = -4$

وبما أن الحدود موجبة فإن العبارة الاخيرة تكتب $\ln u_1 + \ln u_1 + \ln q^6 = -4$ أي $2\ln u_1 + 6\ln q = -4$

ومنه $6\ln q = -4 - 2$ ومنه $\ln q = -1$ اي $q = e^{-1} = \frac{1}{e}$

(ب) التحقق من عبارة الحد العام $u_n = e^{2-n}$:

حساب الحد الأول : $u_1 = u_0.q$ ومنه $u_0 = \frac{e}{\frac{1}{e}} = e^2$

$$u_n = u_0 \times q^n = e^2 \times \left(\frac{1}{e}\right)^n = e^2 \times \frac{1}{e^n} = e^2 \times e^{-n} = e^{2-n}$$

(2) حساب المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ هو مجموع $(n+1)$ حد لمتتالية هندسية

ومنه $S_n = u_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = e^2 \times \frac{e^{-(n+1)} - 1}{\frac{1}{e} - 1} = \frac{e^3}{1-e} \times \left(e^{-(n+1)} - 1\right)$

(3) (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_0 = e^3$ و : $v_{n+1} = v_n + u_n$

(أ) البرهان بالتراجع ان : $v_n = \frac{e^{3-n} - e^4}{1-e}$:

من أجل $n = 0$ فان $v_0 = \frac{e^3 - e^4}{1-e} = \frac{e^3(1-e)}{1-e} = e^3$ الخاصية صحيحة

نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل كل n طبيعي ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي

$$v_{n+1} = \frac{e^{3-(n+1)} - e^4}{1-e} = \frac{e^{2-n} - e^4}{1-e}$$

لدينا $v_{n+1} = v_n + u_n$ ومنه $v_{n+1} = v_n + u_n = \frac{e^{3-n} - e^4}{1-e} + e^{2-n} = \frac{e^{3-n} - e^4 + (1-e)e^{2-n}}{1-e} =$

$$= \frac{e^{3-n} - e^4 + e^{2-n} - e^{3-n}}{1-e} = \frac{e^{2-n} - e^4}{1-e}$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أي $v_n = \frac{e^{3-n} - e^4}{1-e}$

(ب) المتتالية (v_n) متقاربة لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^{3-n} - e^4}{1-e} = \frac{0 - e^4}{1-e} = \frac{e^4}{e-1}$

(4) (أ)تبيان انه من اجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{e}v_n = \frac{1}{1-e}\left(u_n - e^3\right)$:

لدينا $v_n = \frac{e^{3-n} - e^4}{1-e}$ ومنه $\frac{1}{e} \times v_n = \frac{1}{e} \times \frac{e^{3-n} - e^4}{1-e}$ أي $\frac{1}{e} \times v_n = \frac{1}{1-e} \times \frac{e^{3-n} - e^4}{e}$

وتكتب $\frac{1}{e} \times v_n = \frac{1}{1-e} \times \left(e^{2-n} - e^3\right)$ ومنه $\frac{1}{e} \times v_n = \frac{1}{1-e} \times \left(u_n - e^3\right)$

(ب) التحقق من المجموع : $S'_n = \frac{1}{e}v_0 + \frac{1}{e}v_1 + ... + \frac{1}{e}v_n = \frac{1}{1-e}\left[S_n - (n+1)e^3\right]$

$$S'_n = \frac{1}{1-e}\left[S_n - (n+1)e^3\right]$$

لدينا $\frac{1}{e}v_n = \frac{1}{1-e}\left(u_n - e^3\right)$ ومنه

$$S'_n = \frac{1}{e}v_0 + \frac{1}{e}v_1 + ... + \frac{1}{e}v_n = \frac{1}{1-e}\left(u_0 - e^3\right) + \frac{1}{1-e}\left(u_1 - e^3\right) ... + \frac{1}{1-e}\left(u_n - e^3\right) =$$
$$= \frac{1}{1-e}\left[\left(u_0 + u_1 + ... + u_n\right) - e^3 - e^3 + ... - e^3\right] = \frac{1}{1-e}\left(S_n - (n+1)e^3\right)$$

التمرين باك 2022 تقني رياضي الموضوع الاول

(u_n)و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_1 = 2$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{n}{2n+2}u_n - \frac{1}{n+1}$

و $v_n = n.u_n + 2$

(1) احسب u_2 و u_3

(2) (أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

(ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $w_n = \frac{4n}{v_n - nu_n}$

احسب بدلالة n المجموع S'_n حيث : $S'_n = w_1 + w_2 + ... + w_n$

حل التمرين باك 2022 تقني رياضي الموضوع الاول

$u_1 = 2$ و : $u_{n+1} = \frac{n}{2n+2}u_n - \frac{1}{n+1}$ و $v_n = n.u_n + 2$

(1) حساب u_2 و u_3 :

$$u_2 = \frac{1}{2+2}(2) - \frac{1}{1+1} = 0 \quad \text{و} \quad u_3 = \frac{2}{2(2)+2}u_2 - \frac{1}{2+1} = -\frac{1}{3}$$

(2) (أ) برهان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

$$v_{n+1} = (n+1).u_{n+1} + 2 = (n+1)\left(\frac{n}{2n+2}u_n - \frac{1}{n+1}\right) + 2$$
$$= \frac{n}{2}u_n + 1 = \frac{1}{2}\left(n\,u_n + 2\right) = \frac{1}{2}v_n$$

(ب) كاتبة عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_1.q^{n-1} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n : $v_n = n.u_n + 2$ ومنه $u_n = \frac{v_n - 2}{n}$

بالتالي $u_n = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2}{n} = \frac{2}{n}\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right]$

(3) حساب S_n : $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n = v_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 4\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 8\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

(4) $w_n = \frac{4n}{v_n - nu_n}$. حساب المجموع S'_n حيث : $S'_n = w_1 + w_2 + ... + w_n$

لدينا $v_n = n.u_n + 2$ ومنه $v_n - n.u_n = 2$ وبالتالي $w_n = \frac{4n}{v_n - nu_n} = \frac{4n}{2} = 2n$

ومنه $S'_n = w_1 + w_2 + ... + w_n = 2(1) + 2(2) + ... + 2\,\mathrm{n} = 2(1+2+....+\mathrm{n}) = 2\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$

التمرين باك 2022 تقني رياضي الموضوع الثاني

المتتالية (u_n) معرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 2)$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ -2$

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج ان متقاربة

(3) المتتالية (v_n) معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{1}{u_{n+1} - u_n}$

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 ثم أكتب v_n بدلالة n

(ب) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + ... + \frac{1}{v_n}$

(4) (أ) بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)$ ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

(ب) أحسب بدلالة n المجموع : $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

حل التمرين باك 2022 تقني رياضي الموضوع الثاني

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 2) : \text{و } u_0 = 0$$

(1) البرهان بالتراجع أن : $u_n \succ -2$ من أجل $n = 0$ محققة لأن $u_0 = 0 \succ -2$

نفرض الخاصية صحيحة من أجل n ونبرهن أنها محققة من أجل $n+1$

$u_n \succ -2$ ومنه $u_n - 2 \succ -4$ وتعني $\frac{1}{2}(u_n - 2) \succ \frac{1}{2}(-4)$ أي $\frac{1}{2}(u_n - 2) \succ -2$ ومنه $u_{n+1} \succ -2$

وبالتالي الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي أي $u_n \succ -2$

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - 2) - u_n = -\frac{1}{2}u_n - 1 = -\frac{1}{2}(u_n + 2)$

وبما أن $u_n \succ -2$ فإن $u_n + 2 \succ 0$ ومنه $-\frac{1}{2}(u_n + 2) \prec 0$ أي $u_{n+1} - u_n \prec 0$ إذن (u_n) متناقصة

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل نستنتج انها متقاربة

(3) (أ) تبيان أن (v_n) هندسية أساسها 2 : من العبارة $v_n = \frac{1}{u_{n+1} - u_n}$ نكتب $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+2} - u_{n+1}}$

ومن $u_{n+1}=\frac{u_n-2}{2}$ نكتب $u_{n+2}=\frac{u_{n+1}-2}{2}$ ومنه نجد

$$u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2}{2}-\frac{u_n-2}{2}=\frac{u_{n+1}-u_n}{2}$$

إذن $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+2}-u_{n+1}}=\frac{1}{\frac{u_{n+1}-u_n}{2}}=2\frac{1}{u_{n+1}-u_n}=2.v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها 2

كتابة v_n بدلالة n : $v_0=\frac{1}{-1-0}=-1$ ومنه $v_n=v_0\times q^n=-1\times 2^n=-2^n$

(ب) حساب المجموع : $S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+...+\frac{1}{v_n}$ من العبارة $v_n=-2^n$ نجد $\frac{1}{v_n}=-\frac{1}{2^n}$

$$S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+...+\frac{1}{v_n}=-\frac{1}{2^0}-\frac{1}{2^1}-\frac{1}{2^2}....-\frac{1}{2^n}$$

ومنه

$$=-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+....+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}=2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]$$

(4) (أ) تبيان أن: $u_n=2\left(\frac{1}{2^n}-1\right)$ .. لدينا $S_n=2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]=\frac{1}{2^n}-2$

و من جهة أخرى $S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+...+\frac{1}{v_n}$ و $v_n=\frac{1}{u_{n+1}-u_n}$ أي $\frac{1}{v_n}=u_{n+1}-u_n$

إذن $S_n=(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+...+(u_n-u_{n-1})+(u_{n+1}-u_n)=-u_0+u_{n+1}=u_{n+1}=\frac{u_n-2}{2}$

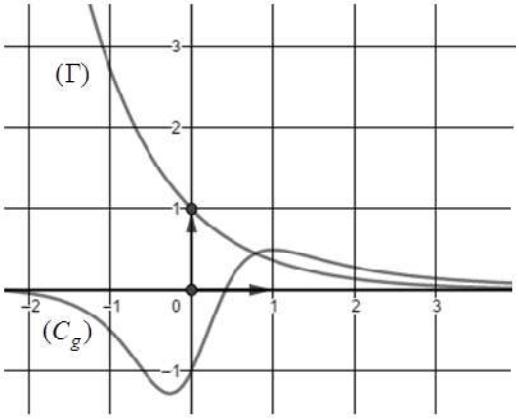
إذن : $S_n=\frac{u_n-2}{2}$ ومنه $u_n=2S_n+2$ وبالتالي $u_n=2\left(\frac{1}{2^n}-2\right)+2=2\left(\frac{1}{2^n}-1\right)$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(\frac{1}{2^n}-1\right)=2(0-1)=-2$

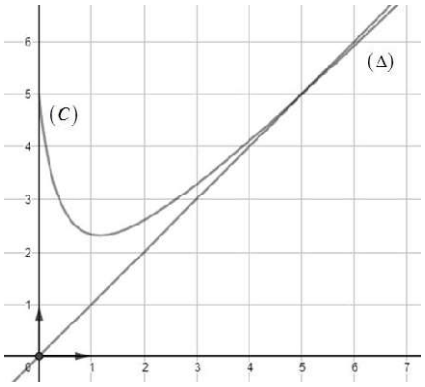
(ب) حساب المجموع : $S'_n=u_0+u_1+....+u_n$. من $u_n=2\left(\frac{1}{2^n}-1\right)$ نكتب :

$$S'_n=2\left(\frac{1}{2^0}-1\right)+2\left(\frac{1}{2^1}-1\right)+....+2\left(\frac{1}{2^n}-1\right)=2\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+...+\frac{1}{2^n}\right)+2(n+1)(-1)$$

$$=4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]-2n-2=-\frac{1}{2^{n-1}}-2n+2$$



التمرين باك 2022 متتاليات شعبة رياضي الموضوع 1



f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^2+5}{2x+1}$ و

(C_f) تمثيلها البياني كما في الشكل المرفق. (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$

كما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

(1)(أ) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$

(ب) أنقل الشكل ومثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 و u_1 و u_2

وضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n)

(2)(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2\leq u_n \prec 5$

(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $5-u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{2u_n+1}(5-u_n)$

(4) (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{2u_n}{2u_n+1}\leq\dfrac{10}{11}$

(ب) استنتج أن $0\prec 5-u_n\leq 3\left(\dfrac{10}{11}\right)^n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

حل التمرين باك 2022 شعبة رياضيات الموضوع 1

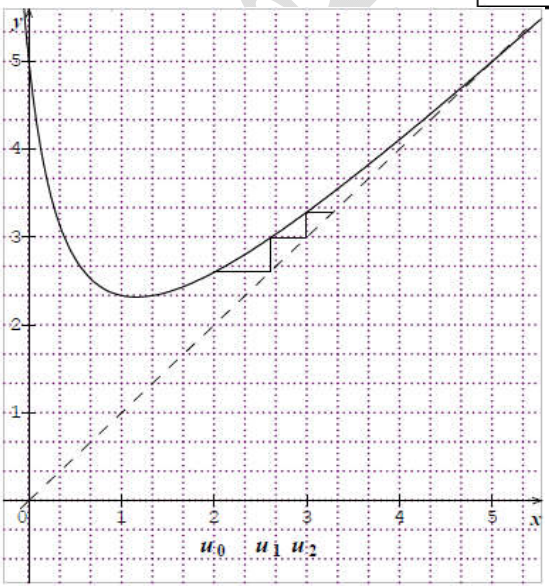
$f(x)=\dfrac{2x^2+5}{2x+1}$ و $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

(1)(أ) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة ل (Δ) : $y=x$

ندرس اشارة الفرق : $f(x)-x=\dfrac{2x^2+5}{2x+1}-x=\dfrac{5-x}{2x+1}$

x	0	5	$+\infty$
الوضعية	(C) أعلى (Δ)		(C) أسفل (Δ)

(ب) تمثيل الحدود u_0 و u_1 و u_2



تخمين اتجاه تغير (u_n) : نلاحظ أن المتتالية متزايدة تماما

(2)(أ) البرهان بالتراجع أن : $2\leq u_n \prec 5$

لدينا $u_0=2$ أي $2\leq u_0 \prec 5$ الخاصية محققة من أجل

$n=0$

نفرض $2 \le u_n \prec 5$ وبما أن الدالة f متزايدة على $[2;+\infty[$ فإن $f(2) \le f(u_n) \prec f(5)$

أي $\frac{13}{5} \le u_{n+1} \prec 5$ ومنه $2 \le \frac{13}{5} \le u_{n+1} \prec 5$ إذن $2 \le u_{n+1} \prec 5$ ومنه الخاصية صحيحة

(ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^{\,2}+5}{2u_n+1} - u_n = \frac{5-u_n}{2u_n+1}$ وبما أن $2 \le u_n \prec 5$ فإن $5-u_n \succ 0$ و $2u_n+1 \succ 0$ ومنه

$\frac{5-u_n}{2u_n+1} \succ 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة

بما أن (u_n)متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة

(3) إثبات أن: $5-u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+1}(5-u_n)$

$$5-u_{n+1} = 5-\frac{2u_n^2+5}{2u_n+1} = \frac{10u_n-2u_n^2}{2u_n+1} = \frac{2u_n(5-u_n)}{2u_n+1}$$

(4) (أ) تبيان أن: $\frac{2u_n}{2u_n+1} \le \frac{10}{11}$ أي يكفي أن نبين أن : $\frac{2u_n}{2u_n+1} - \frac{10}{11} \le 0$

$$\frac{2u_n}{2u_n+1} - \frac{10}{11} = \frac{22u_n-20u_n-10}{11(2u_n+1)} = \frac{2u_n-10}{11(2u_n+1)} = \frac{2}{11} \times \frac{u_n-5}{(2u_n+1)}$$

وبما أن $2 \le u_n \prec 5$ فإن $\frac{u_n-5}{(2u_n+1)} \prec 0$ وبالتالي $\frac{2u_n}{2u_n+1} \le \frac{10}{11}$

ومن المساواة $5-u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+1}(5-u_n)$ نستنتج أن $5-u_{n+1} \le \frac{10}{11}(5-u_n)$

(ب) استنتاج أن : $3\left(\frac{10}{11}\right)^n \le 5-u_n \prec 0$. من المتباينة $5-u_{n+1} \le \frac{10}{11}(5-u_n)$ نكتب :

من أجل $n=0$ نجد $5-u_1 \le \frac{10}{11}(5-u_0)$

من أجل $n=1$ نجد $5-u_2 \le \frac{10}{11}(5-u_1)$

من أجل $n=2$ نجد $5-u_3 \le \frac{10}{11}(5-u_2)$

.....

ومن أجل $n-1$ نجد $5-u_n \le \frac{10}{11}(5-u_{n-1})$

وبضرب المتباينات طرفا لطرف نجد بعد الاختصارات : $5-u_n \le \left(\frac{10}{11}\right)^n (5-u_0)$

و $u_0=2$ ومنه $0\prec 5-u_n\le 3\left(\frac{10}{11}\right)^n$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: بما أن $\frac{10}{11}\prec 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{10}{11}\right)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(5-u_n)=0$ اذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=5$

التمرين باك 2022 شعبة رياضيات الموضوع 2

(u_n) و (v_n) المتتاليتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=0$ و $u_{n+1}=-\frac{1}{3}u_n^2+\frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3}$ و $v_n=u_n-1$

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=-\frac{1}{3}(v_n)^2$

(2)- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3\le v_n\prec 0$

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) ثم استنتج أنها متقاربة

(4) المتتالية (w_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=\ln\left(-\frac{3}{v_n}\right)$

(أ) بين أن (w_n) هندسية أساسها 2 ثم احسب حدها الأول

(ب)-أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n و u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

(5)- أحسب بدلالة n الجداء : $P_n=\frac{1}{v_0}\times\frac{1}{v_1}\times\ldots\times\frac{1}{v_n}$

حل التمرين باك 2022 شعبة رياضيات الموضوع 2

$u_0=0$ و $u_{n+1}=-\frac{1}{3}u_n^2+\frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3}$ و $v_n=u_n-1$

(1) تبيان أن : $v_{n+1}=-\frac{1}{3}(v_n)^2$

$$v_{n+1}=u_{n+1}-1=-\frac{1}{3}u_n^2+\frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}u_n^2+\frac{2}{3}u_n-\frac{1}{3}=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(u_n^2-2u_n+1\right)=-\frac{1}{3}(u_n-1)^2=-\frac{1}{3}(v_n)^2$$

(2)- البرهان بالتراجع أن: $-3\le v_n\prec 0$ حيث $v_{n+1}=-\frac{1}{3}(v_n)^2$

من أجل $n=0$: $-3\le v_0\prec 0$ محققة لأن $v_0=-1$

نفرض الخاصية صحيحة من أجل n ونبرهن صحتها من أجل $n+1$

أي نفرض $-3\le v_n\prec 0$ ومنه نجد بالتربيع $0\prec v_n^2\le 9$ أي $0\prec v_n^2\le 9$ ومنه

$-\frac{1}{3}\times 0\succ -\frac{1}{3}\times v_n^2\ge -\frac{1}{3}\times 9$ أي $-3\le -\frac{1}{3}\times v_n^2\prec 0$ وهذا يعني $-3\le v_{n+1}\prec 0$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $-3\le v_n\prec 0$

(3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n) :

$$v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{3}(v_n)^2-v_n=-\frac{1}{3}v_n(v_n+3)$$

بما أن $-3 \le v_n \prec 0$ فإن $(v_n+3) \ge 0$ و $-\frac{1}{3}v_n \succ 0$ ومنه $v_{n+1}-v_n \ge 0$ إذن (v_n) متزايدة

** بما أن (v_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى نستنتج أنها متقاربة .

$$w_n = \ln\left(-\frac{3}{v_n}\right) \quad (4)$$

(أ) تبيان أن (w_n) هندسية أساسها 2 :

$$w_{n+1} = \ln\left(-\frac{3}{v_{n+1}}\right) = \ln\left(-\frac{3}{-\frac{1}{3}(v_n)^2}\right) = \ln\left(\frac{9}{(v_n)^2}\right) = \ln\left(\frac{(-3)^2}{(v_n)^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{-3}{v_n}\right)^2 = 2\ln\left(-\frac{3}{v_n}\right) = 2w_n$$

إذن (w_n) هندسية أساسها 2 وحدها الأول $w_0 = \ln\left(-\frac{3}{v_0}\right) = \ln\left(-\frac{3}{-1}\right) = \ln 3$

(ب)-كتابة عبارة w_n بدلالة n : $w_n = w_0 \times q^n = 2^n \times \ln 3$

**استنتاج v_n و u_n :

من $w_n = \ln\left(-\frac{3}{v_n}\right)$ نجد $e^{w_n} = -\frac{3}{v_n}$ ومنه $v_n = -\frac{3}{e^{w_n}}$ إذن $v_n = -\frac{3}{e^{2^n \times \ln 3}}$

و $u_n = v_n + 1$ ومنه $u_n = -\frac{3}{e^{2^n \times \ln 3}} + 1$

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

بما أن $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{2^n \times \ln 3} = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{3}{e^{2^n \times \ln 3}} = 0$

إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{3}{e^{2^n \times \ln 3}} + 1 = 1$

(5)- حساب الجداء : $P_n = \frac{1}{v_0} \times \frac{1}{v_1} \times \ldots \times \frac{1}{v_n}$

من $v_n = -\frac{3}{e^{2^n \times \ln 3}}$ نكتب $\frac{1}{v_n} = \frac{e^{2^n \times \ln 3}}{-3}$ وبالتالي :

$$P_n = \frac{e^{2^0 \times \ln 3}}{-3} \times \frac{e^{2^1 \times \ln 3}}{-3} \times \ldots \frac{e^{2^n \times \ln 3}}{-3} = \frac{e^{2^0 \times \ln 3} \times e^{2^1 \times \ln 3} \times \ldots \times e^{2^n \times \ln 3}}{(-3)^{n+1}} =$$

$$= \frac{e^{2^0 \times \ln 3 + 2^1 \times \ln 3 + \ldots + 2^n \times \ln 3}}{(-3)^{n+1}} = \frac{e^{\ln 3 \times \left(2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n\right)}}{(-3)^{n+1}} = \frac{e^{\ln 3 \times \frac{2^{n+1}-1}{2-1}}}{(-3)^{n+1}} = \frac{e^{\ln 3 \times (2^{n+1}-1)}}{(-3)^{n+1}}$$