



المدة: 04 سا ونصف

اختبار البكالوريا التجاري في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

### الموضوع الأول

#### التمرين الأول:

- ا. نعتبر الأعداد المركبة  $z_1$  ،  $z_2$  و  $z_3$  بحيث:  $z_1 = 2 - 2i$  و  $z_2 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$  و  $z_3 = \frac{z_2}{z_1}$
- (1) أ) اكتب كل من  $z_1$  ،  $z_2$  على شكل أسي.
- ب) استنتج شكل أسي للعدد  $z_3$ .
- (2) أ) اكتب  $z_3$  على الشكل الجبري، ثم على شكل مثلثي.
- ب) استنتاج القيمتين المضبوطتين لكل من  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$  و  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .
- ii. نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  النقط  $A$  ،  $B$  و  $M$  لواحقها  $z_1$  ،  $z_2$  و  $z$  على الترتيب.

ولنعتبر العدد المركب  $L$  المعرف من أجل كل عدد مركب  $z$  يختلف عن  $z_1$  كما يلي:

- (1) عين  $(E_1)$  مجموعة النقط  $M$  بحيث:  $|L| = 1$ .
- (2) عين  $(E_2)$  مجموعة النقط  $M$  بحيث:  $L \in \mathbb{R}^*$ .
- (3) عين  $(E_3)$  مجموعة النقط  $M$  بحيث:  $L$  تخيلي صرف.

#### التمرين الثاني:

نعتبر المتاليتين العدديتين  $(U_n)$  و  $(V_n)$  المعرفتين على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي:

$$\begin{cases} V_1 = 12 \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} \end{cases}$$

1) نضع: من أجل كل عدد طبيعي غير معروف  $n$  :

أ) بين أن المتالية  $(W_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{12}$ .

ب) اكتب عبارة الحد العام للمتالية  $(W_n)$ .

ج) احسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$

2) ادرس اتجاه تغير كل من المتاليتين  $(U_n)$  و  $(V_n)$ .

ب) استنتاج أن المتاليتين  $(U_n)$  و  $(V_n)$  متقاربتان نحو نفس النهاية.

3) نعتبر المتالية  $(t_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي:

$t_n = 3U_n + 8V_n$

الصفحة 1 من 5

أ) بين أن المتالية  $(t_n)$  ثابتة على  $\mathbb{N}^*$ .

ب) استنتج النهاية المشتركة للمتاليتين  $(U_n)$  و  $(V_n)$ .

4) نعتبر المجموع  $S_n$  المعرف على  $\mathbb{N}^*$  بـ:  $S_n = \sum_{k=1}^n C_n^k (V_k - U_k)$ . عبر بدالة  $n$  عن المجموع.

### التمرين الثالث:

1) حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة  $(E)$  ذات المجهول  $(x; y)$  التالية:  $3x - 2y = 1$ .  $n$  عدد طبيعي.

2) أ) بين أن الثنائية  $(14n+3; 21n+4)$  حل للمعادلة  $(E)$ .

ب) استنتج أن العددين  $14n+3$  و  $21n+4$  أوليان فيما بينهما.

3) نعتبر العددين  $a$  و  $b$  حيث  $a = 2n+1$  و  $b = 21n+4$ .

أ. عين جميع القيم الممكنة لـ  $PGCD(a; b)$ .

ب. بين أنه إذا كان  $n \equiv 6 \pmod{13}$  فإن:  $PGCD(a; b) = 13$ .

$n$  عدد طبيعي أكبر تماماً من 1.

4) نعتبر العددين الطبيعيين  $A$  و  $B$  بحيث:  $A = 2n^2 - n - 1$  و  $B = 21n^2 - 7n - 4$ .

أ. بين أن:  $n-1$  يقسم كلاً من  $A$  و  $B$ .

ب. عين تبعاً لقيمة  $n$  وبدالة  $n$  :

### التمرين الرابع:

I. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = (x^2 + 2x)e^{x-1} - 1$ .

1) ادرس تغيرات الدالة  $g$  ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ) بين أن: المعادلة:  $g(x) = 0$  تقبل حلان وحيدان  $\alpha$  بحيث:  $0,58 < \alpha < 0,59$ .

ب) ادرس إشارة  $(x)$   $g$  تبعاً لقيمة العدد الحقيقي  $x$ .

II. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = x^2 e^{x-1} - x$ .

(C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (وحدة الطول هي:  $2\text{cm}$ ).

أ) احسب كلاً من:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

ب) بين أن: المستقيم  $(D)$  ذو المعادلة المختصرة  $y = -x$  مقارب مائل لـ  $(C)$  بجوار  $-\infty$ .

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(D)$ .

2) أ) بين أن: من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$ :  $f'(x) = g(x)$ .

ب) استنتاج أن:  $f$  متاقصة تماماً على المجال  $[\alpha; -\infty)$  ومتزايدة تماماً على المجال  $[\alpha; +\infty)$  ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) اثبت أن  $(C)$  يقبل مماسين متوازيتين أحدهما ينطبق على  $(D)$  ، ثم اكتب معادلة ديكارتية للمماس الثاني.

د) بين أن  $(C)$  يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعين فاصلتي كل منها.

3) انشئ كلاً من المماسين السابقين، احسب  $f'(0)$  و  $f'(1)$  ، ثم مثل  $(C)$  . (نأخذ:  $\alpha \approx -0,36$ ).

4) ليكن  $m$  وسيطاً حقيقياً، نقش بيانيا تبعاً لقيمة  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة:

5) نعتبر التكامل  $I$  بحيث:  $I = \int_{-1}^0 x^2 e^{x-1} dx$ .

أ) باستخدام المكاملة بالتجزئة مرتين احسب قيمة  $I$  .

## انتهى الموضوع الأول

ب) فسر هندسيا النتيجة المحصل عليها.

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول:

يحتوي صندوق غير شفاف على أربع كريات بيضاء ، ثلاثة كريات سوداء وكريتين حمراوين (الكريات كلها متماثلة لا نميز بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا في آن واحد ثلاثة كريات من هذا الصندوق.

1) احسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية:

$$A : \text{"سحب ثلاثة كريات مختلفة اللون"} \quad B : \text{"سحب ثلاثة كريات سوداء وكريتين حمراوين"} \quad C : \text{"سحب كرية حمراء على الأقل"}$$

2) نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان التي تحملها الكريات الثلاث المسحوبة.

أ) ببر أن: قيم المتغير العشوائي  $X$  هي:  $\{1; 2; 3\}$

ب) بين أن:  $P(X=2) = \frac{55}{84}$  .

ج) احسب  $E(X)$  الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$  .

### التمرين الثاني:

ا. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[1; +\infty)$  بـ:  $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد المتتجانس  $(\vec{O}; \vec{i}, \vec{j})$  . كما هو موضح في الشكل المرفق.

1) اثبت أن: الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[1; +\infty)$  .

2) بين أن: إذا كان:  $x \in [1; 2]$  فإن:  $f(x) \in [1; 2]$  .

ii. نعتبر المتالية  $(U_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

1) أ. مثل على حامل محور الفوائل الحدود الثلاثة الأولى للمتالية  $(U_n)$  مبرزا خطوط الانشاء.

ب. أعط تخمينا حول رتبة وتقريب المتالية  $(U_n)$  .

2) أ. برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 < U_n \leq 2$  .

ب. اثبت أن المتالية  $(U_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{N}$  .

ج. ببر تقارب المتالية  $(U_n)$  .

iii. نعتبر المتاليتين العدديتين  $(V_n)$  و  $(W_n)$  المعرفتين على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n}$  و  $W_n = \ln V_n$

1) أ) بين أن المتالية  $(W_n)$  هندسية أساسها 2 .

ب) اكتب عبارة الحد العام للمتالية  $(W_n)$  ، ثم استنتج عبارة الحد العام للمتالية  $(V_n)$  .

2) أ) استنتاج أن: من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$U_n = \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{2^n} \right]^{-1}$$

ب) احسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3) نعتبر الجداء  $P_n$  المعرف على  $\mathbb{N}$  بـ  $P_n = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n$ .

غير بدلالة  $n$  عن الجداء  $P_n$ .

### التمرين الثالث:

1) عين ثنائية  $(\alpha; \beta)$  من الأعداد الصحيحة تتحقق:  $23\alpha + 7\beta = 1$ .

2) نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة  $(E)$  ذات المجهول  $(u; v)$  التالية:  $23u - 7v = -6$ .

أ) بالاعتماد على النتيجة المحصل عليها في جواب السؤال الأول استنتاج حلًا خاصًا للمعادلة  $(E)$ .

ب) حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة  $(E)$ .

3) نعتبر الجملة  $(S)$  ذات المجهول الصحيح  $x$  التالية:

$$\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$$

أ) اثبت صحة التكافؤ التالي:  $x$  حل للجملة  $(S)$  إذا وفقط إذا وجدت ثنائية  $(u; v)$  من الأعداد الصحيحة تتحقق:

$$\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 23u + 10 \end{cases}$$

ب) استنتاج مجموعة حلول الجملة  $(S)$ .

ج) عين أصغر عدد طبيعي  $x_0$  حل للجملة  $(S)$  يكون قابلاً للقسمة على 16.

### التمرين الرابع:

I. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty)$  بـ  $g(x) = x^2 - 2\ln(x)$ .

1) ادرس تغيرات الدالة  $g$  ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) استنتاج أن: من أجل كل  $x \in [0; +\infty)$   $g(x) > 0$ .

II. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty)$  بـ  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln(x)}{x}$ .

(C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ، (وحدة الطول هي:  $2\text{cm}$ ).

1) أ) احسب كلا من:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

ب) بين أن: المستقيم  $(D)$  ذا المعادلة المختصرة  $y = \frac{x}{2}$  مقارب مائل لـ  $(C)$ .

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(D)$ .

2) أ) بين أن: من أجل كل  $x \in [0; +\infty)$   $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ .

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) اثبت أن  $(C)$  يقبل مماساً وحيداً  $(T)$  يوازي المستقيم  $(D)$  في النقطة  $A$  ذات الفاصلة 1 ، ثم اكتب معادلة له.

3) أ) بين أن: من أجل كل  $x \in [0; +\infty)$   $f''(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x^3}$ .

ب) ادرس إشارة  $f''(x)$  ، ثم استنتاج أن:  $(C)$  يقبل نقطة انعطاف وحيدة  $B$  يطلب تعين احداثيتها.

ج) اكتب معادلة ديكارتية لـ  $(T')$  مماس  $(C)$  في النقطة  $B$ .

4) أ) بين أن:  $(C)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  بحيث:  $0,34 < \alpha < 0,35$ .  
ب) انشئ كلا من  $(T')$  ،  $(T)$  و  $(D)$  ، ثم مثل  $(C)$ .

5) ليكن  $m$  وسيطاً حقيقياً، ناقش بيانياً تبعاً لقيم  $m$  عدد حلول المعادلة:

6) احسب بـ  $cm^2$  مساحة الحيز تحت المنحنى  $(C)$  بين العددين 1 و  $e$ .

انتهى الموضوع الثاني



المدة: 03 سا ونصف

اختبار البكالوريا التجاري في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

### الموضوع الأول

#### التمرين الأول:

صندوقان غير شفافين  $U$  و  $V$ ، يحتوي الصندوق  $U$  على أربع كريات حمراء وأربع كريات بيضاء، وتحتوي الصندوق  $V$  على كريتين حمراوين وأربع كريات بيضاء (الكريات كلها متماثلة لا تميز بينها عند اللمس) نعتبر التجربة العشوائية التالية: نسحب كريتين في آن من الصندوق  $U$  إذا كانتا من نفس اللون نسحب كريتين في آن واحد من الصندوق  $V$ ، وإذا كانتا من لونين مختلفين نضعهما في الصندوق  $V$  ونسحب منه كريتين في آن واحد.

نعتبر الأحداث التالية:

"  $A$  : "الكريتان المسحوبتان من الصندوق  $U$  من نفس اللون" ،  $B$  : "الكريتان المسحوبتان من الصندوق  $V$  بيضاوان"

"  $C$  : "الكريتان المسحوبتان من الصندوق  $V$  حمراوان" ،  $D$  : "الكريتان المسحوبتان من الصندوق  $V$  مختلفتي اللون"

(1) احسب  $P(A)$ .

(2) بين أن:  $P(B) = \frac{3}{28}$  و  $P_A(B) = \frac{1}{15}$  ، ثم استنتج

(3) علما أن الكريتين المسحوبتين من الصندوق  $V$  بيضاوان، ما احتمال أن تكون الكريتان المسحوبتان من الصندوق  $U$  من نفس اللون؟

(4) أكمل شجرة الاحتمالات الموضحة في الوثيقة المرفقة.

(5) نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة من الصندوق  $V$ .

أ) عين قيم المتغير العشوائي  $X$ .

ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$ .

#### التمرين الثالث:

نعتبر المتتاليتين العدديتين  $(U_n)$  و  $(V_n)$  المعرفتين على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي:

$$\begin{cases} V_1 = 12 \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} \end{cases}$$

(1) نضع: من أجل كل عدد طبيعي غير معروف  $n$  :

أ) بين أن المتتالية  $(W_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{12}$ .

ب) اكتب عبارة الحد العام للمتتالية  $(W_n)$ .

ج) احسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$

(2) ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين  $(U_n)$  و  $(V_n)$ .

ب) استنتج أن المتتاليتين  $(U_n)$  و  $(V_n)$  متقاربتان نحو نفس النهاية.

(3) نعتبر المتتالية  $(t_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي:  $t_n = 3U_n + 8V_n$ .  
أ) بين أن المتتالية  $(t_n)$  ثابتة على  $\mathbb{N}^*$ .

ب) استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين  $(U_n)$  و  $(V_n)$ .

(4) نعتبر المجموع  $S_n$  المعرف على  $\mathbb{N}^*$  بـ:  $S_n = \sum_{k=1}^n C_n^k (V_k - U_k)$ . عبر بدلالة  $n$  عن المجموع.

### التمرين الثالث:

ا. نعتبر الأعداد المركبة  $z_1$ ،  $z_2$  و  $z_3$  بحيث:  $z_3 = \frac{z_2}{z_1} = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$  ،  $z_1 = 2 - 2i$  و  $z_2 = 2 - 2i$ .

(1) أ) اكتب كل من  $z_1$ ،  $z_2$  على شكل أسي.

ب) استنتج شكل أسي للعدد  $z_3$ .

(2) أ) اكتب  $z_3$  على الشكل الجبري، ثم على شكل مثلثي.

ب) استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$  و  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

II. نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  النقاط  $A$  و  $B$  و  $M$ .  
لواحقها  $z_1$ ،  $z_2$  و  $z_3$  على الترتيب.

ولنعتبر العدد المركب  $L$  المعرف من أجل كل عدد مركب  $z$  يختلف عن  $z_1$  كما يلي:  $L = \frac{z - z_2}{z - z_1}$ .

(1) عين  $(E_1)$  مجموعة النقط  $M$  بحيث:  $|L| = 1$ .

(2) عين  $(E_2)$  مجموعة النقط  $M$  بحيث:  $L \in \mathbb{R}^*$ .

(3) عين  $(E_3)$  مجموعة النقط  $M$  بحيث:  $L$  تخيلي صرف.

### التمرين الرابع:

ا. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = (x^2 + 2x)e^{x-1} - 1$ .

1) ادرس تغيرات الدالة  $g$  ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أ) بين أن: المعادلة:  $g(x) = 0$  تقبل حلًا وحيدًا  $\alpha$  بحيث:  $0,58 < \alpha < 0,59$ .

ب) ادرس إشارة  $(x)$   $g$  تبعاً لقيمة العدد الحقيقي  $x$ .

II. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = x^2 e^{x-1} - x$ .

(C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (وحدة الطول هي:  $2\text{cm}$ ).

(1) احسب كلا من:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

ب) بين أن: المستقيم  $(D)$  ذو المعادلة المختصرة  $y = -x$  مقارب مائل لـ  $(C)$  بجوار  $-\infty$ .

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(D)$ .

(2) أ) بين أن: من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$ :  $f'(x) = g(x)$ .

ب) استنتج أن:  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[\alpha; +\infty)$  ومتناقصة على المجال  $(-\infty; \alpha]$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) اثبت أن  $(C)$  يقبل مماسين متوازيتين أحدهما ينطبق على  $(D)$  ، ثم اكتب معادلة ديكارتية للمماس الثاني.

د) بين أن  $(C)$  يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين فاصلتي كل منها.

3) انشئ كلا من المماسين السابقين، احسب  $f(0)$  و  $f(1)$  ، ثم مثل  $(C)$  . نأخذ:  $f(\alpha) \approx -0,36$

4) ليكن  $m$  وسيطاً حقيقياً، ناقش بيانياً تبعاً لقيمة  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة:  $f(x) = -x + m$

$$5) \text{ نعتبر التكامل } I \text{ بحيث: } I = \int_{-1}^0 x^2 e^{x-1} dx$$

أ) باستخدام المتكاملة بالتجزئة مرتين احسب قيمة  $I$  .

## انتهى الموضوع الأول

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول:

ا. نعتبر كثير الحدود  $P(z)$  للمتغير المركب  $z$  المعرف كما يلي:  $16 - z^2 + 2z^3$

1) احسب  $P(2)$  ، ثم استنتج كثير الحدود  $Q(z)$  من الدرجة الثانية بحيث يكون:

$$P(z) = (z-2) \cdot Q(z)$$

2) أ) حل في مجموعة المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  :  $P(z) = 0$

ب) اكتب كل حل من حلول المعادلة السابقة على شكل مثلي، ثم على شكل أسي.

ii. نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  النقط  $A, B, C$  و  $D$

لواحقها  $z_A, z_B, z_C$  و  $z_D$  على الترتيب بحيث:  $z_A = 2 - 2i$  ،  $z_B = 2$  ،  $z_C = \bar{z}_A$  و  $z_D = \bar{z}_B$

1) علم النقط  $A, B$  و  $D$  .

2) احسب  $z$  بحيث يكون الرباعي  $ABCD$  متوازي أضلاع.

$$3) \text{ نعتبر العدد المركب } L \text{ المعرف بخ: } L = \frac{z_A}{z_D}$$

أ) اكتب العدد  $L$  على شكل أسي.

ب) أعط تفاصيراً هندسياً لكل من  $|L|$  و  $\arg(L)$  .

ج) استنتاج طبيعة المثلث  $AOD$  .

### التمرين الثاني:

ا. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[1; +\infty)$  بـ:  $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى

المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  . كما هو موضح في الشكل المرفق.

1) اثبت أن: الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[1; +\infty)$  .

2) بين أن: إذا كان:  $x \in [1; 2]$  فإن:  $f(x) \in [1; 2]$  .

ii. نعتبر المتالية  $(U_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

1) أ. مثل على حامل محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى للمتالية  $(U_n)$  مبرزاً خطوط الإنشاء.

ب. أعط تخميناً حول رتبة وتقريب المتالية  $(U_n)$  .

2) أ. برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 < U_n \leq 2$

ب. اثبت أن المتالية  $(U_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{N}$ .

ج. برهن تقارب المتالية  $(U_n)$ .

III. نعتبر المتاليتين العدديتين  $(V_n)$  و  $(W_n)$  المعرفتين على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n}$  و  $W_n = \ln V_n$

(1) أ) بين أن المتالية  $(W_n)$  هندسية أساسها 2.

ب) اكتب عبارة الحد العام للمتالية  $(W_n)$  ، ثم استنتج عبارة الحد العام للمتالية  $(V_n)$ .

$$(2) \text{ أ) استنتاج أن: من أجل كل عدد طبيعي } n : U_n = \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{2^n} \right]^{-1}$$

ب) احسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(3) نعتبر الجداء  $P_n$  المعرف على  $\mathbb{N}$  بـ:  $P_n = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n$

عبر بدلالة  $n$  عن الجداء  $P_n$ .

### التمرين الثالث:

يحتوي صندوق غير شفاف على أربع كريات بيضاء ، ثلاثة كريات سوداء وكريتين حمراوين (الكريات كلها متماثلة لا نميز بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا في آن واحد ثلاثة كريات من هذا الصندوق.

(1) احسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية:

"A : "سحب كريتين سوداويين وكريمة حمراء" ، "B : "سحب ثلاثة كريات مختلفة اللون"

"C : "سحب كريمة حمراء على الأقل"

(2) نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان التي تحملها الكريات الثلاث المسحوبة.

أ) برهن أن: قيم المتغير العشوائي  $X$  هي:  $\{1; 2; 3\}$

ب) بين أن:  $P(X = 2) = \frac{55}{84}$  ، ثم عرف قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  ، ثم احسب أمله الرياضي  $E(X)$ .

### التمرين الرابع:

I. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty)$  بـ:  $g(x) = x^2 - 2\ln(x)$

(1) ادرس تغيرات الدالة  $g$  ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) استنتاج أن: من أجل كل  $x \in [0; +\infty)$  :  $g(x) > 0$ .

II. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty)$  بـ:  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln(x)}{x}$

(C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ، (وحدة الطول هي:  $2\text{cm}$ )

(1) احسب كلا من:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

ب) بين أن: المستقيم  $(D)$  ذو المعادلة المختصرة  $y = \frac{x}{2}$  مقارب مائل لـ  $(C)$ .

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(D)$ .

$$(2) \text{ أ) بين أن: من أجل كل } x \in [0; +\infty[ \text{ : } f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) اثبت أن  $(C)$  يقبل مماساً وحيداً  $(T)$  يوازي المستقيم  $(D)$  في النقطة  $A$  ذات الفاصلة 1 ، ثم اكتب معادلة له.

$$(3) \text{ أ) بين أن: من أجل كل } x \in [0; +\infty[ \text{ : } f''(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x^3}$$

ب) ادرس إشارة  $f''(x)$  ، ثم استنتج أن:  $(C)$  يقبل نقطة انعطاف وحيدة  $B$  يطلب تعين احداثياتها.

ج) اكتب معادلة ديكارتية لـ  $(T')$  مماس  $(C)$  في النقطة  $B$ .

(4) أ) بين أن:  $(C)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  بحيث:  $0,34 < \alpha < 0,35$ .

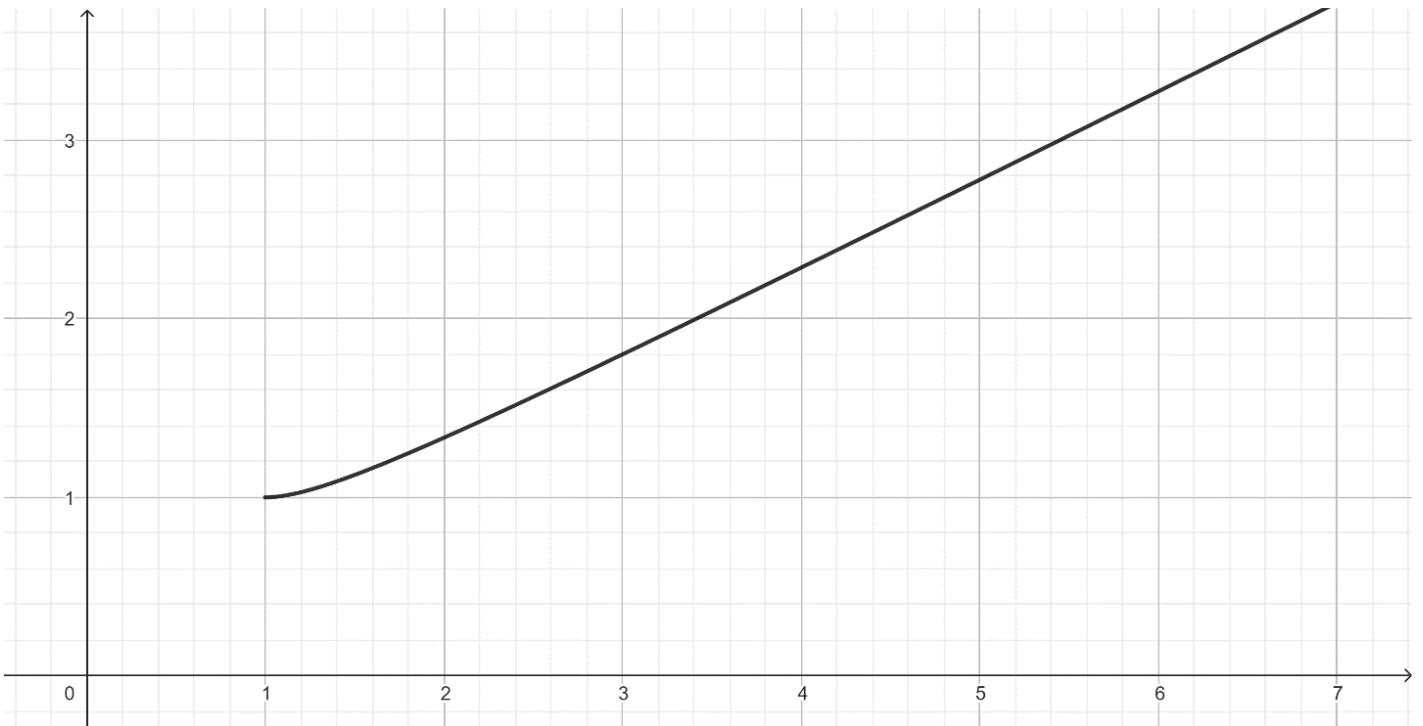
ب) انشئ كلا من  $(D)$  ،  $(T)$  و  $(T')$  ، ثم مثل  $(C)$ .

$$(5) \text{ لیکن } m \text{ وسیطاً حقيقیاً، ناقش بیانیا تبعاً لقیم } m \text{ عدد حلول المعادلة: } f(x) = \frac{1}{2}x + m$$

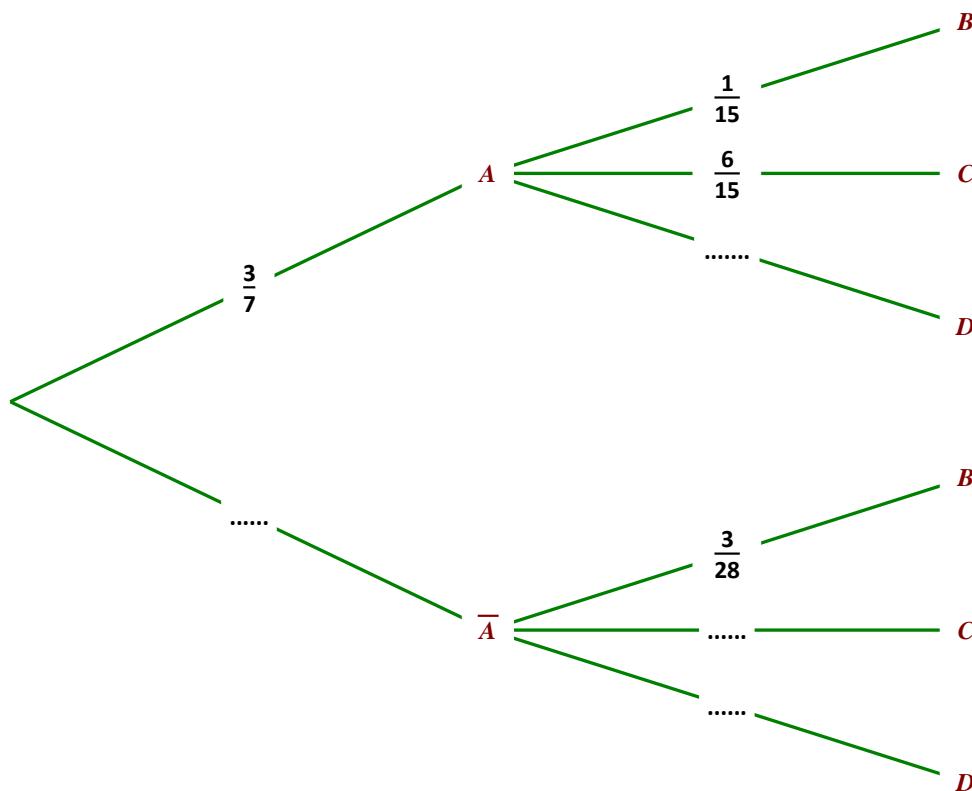
(6) احسب بـ  $cm^2$  مساحة الحیز تحت المنحنی  $(C)$  بين العددين 1 و  $e$ .

انتهى الموضوع الثاني

الشكل الخاص بتمثيل حدود المتتالية:



شجرة الاحتمالات



الوثيقة المرافقية