الأشعة و الانسحاب

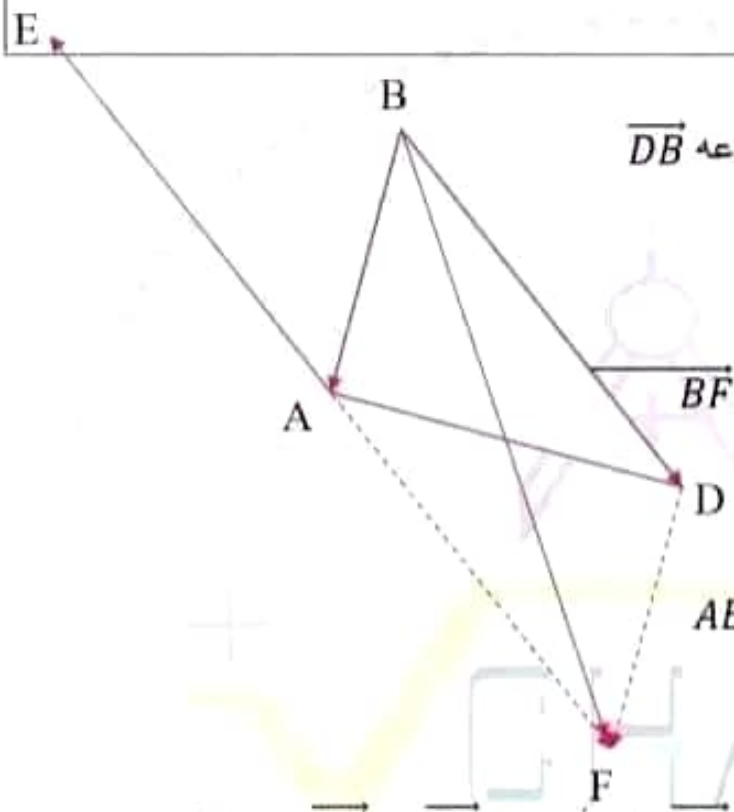
التمرين الأول :

ABD مثلث قائم في A

1) أنشئ النقطة E صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DB}$

2) أنشئ النقطة F حيث : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}$

3) بين أن النقطة A منتصف $[EF]$



الحل :

1) النقطة E صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DB}$

يعني أن : $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AE}$

2) تعيين النقطة F حيث :

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}$

لجمع شعاعين لهما نفس المبدأ

نطبق قاعدة متوازي الأضلاع، النقطة

F هي الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع $ABDF$

3) لنبين أن النقطة A منتصف $[EF]$:

النقطة E صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DB}$ يعني أن : $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AE}$ .....(1)

نعلم مما سبق أن الرباعي $ABDF$ متوازي الأضلاع و بالتالي : $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{FA}$ .....(2)

من العلاقتين (1) و (2) ينتج أن : $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AE}$

و بالتـــــــالي فإن النقطة A منتصف القطعة $[EF]$

التمرين الثاني :

BEM مثلث متقايس الأضلاع حيث : $BE = 4cm$

1) أنشئ النقطتين N و K حيث : $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{KM}$; $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{ME}$

2) أحسب :

$\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{KE}$; $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MN}$

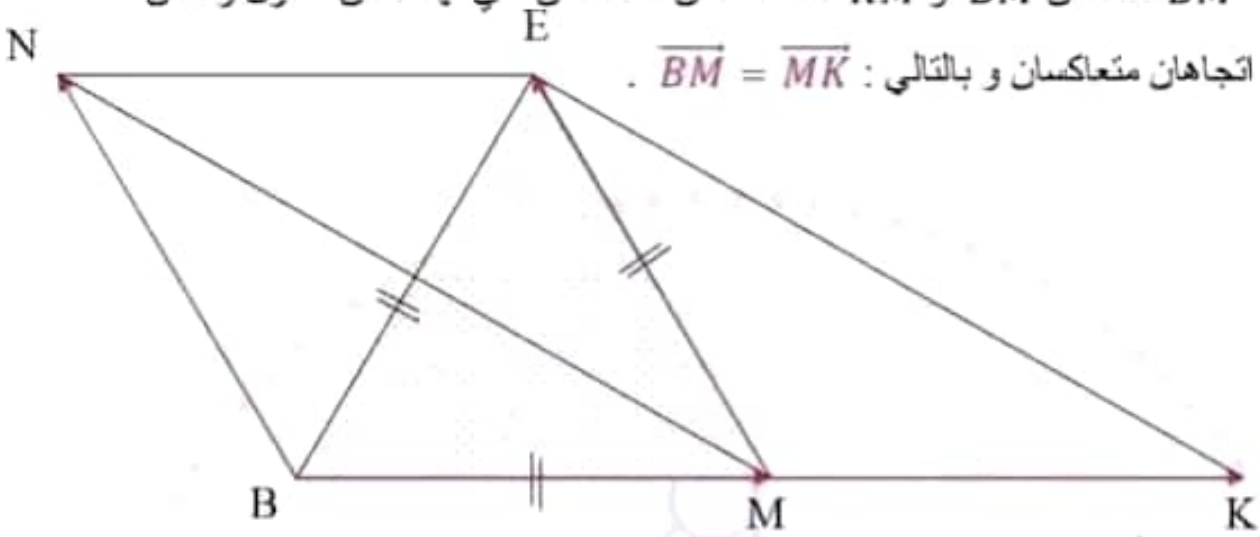
3) اشرح لماذا الرباعي $MNEK$ متوازي أضلاع؟

الحل :

1) $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{ME}$ معناه أن الشعاعان $\overrightarrow{BN}$ و $\overrightarrow{ME}$ لهما نفس المنحى، نفس الطول و نفس الاتجاه.

$\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{KM}$ معناه أن $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{KM}$ هما شعاعان متعاكسان، أي لهما نفس الطول و نفس المنحى، و اتجاهان متعاكسان و بالتالي : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MK}$.

الشكل :



2) حساب $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MN}$:

الشعاعان $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{MK}$ لهما نفس المبدأ، لجمع شعاعين لهما نفس المبدأ نطبق قاعدة متوازي الأضلاع، حسب الشكل نجـــــــد : $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ME}$

حساب $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{KE}$:

$$\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{KE} = \left(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE}\right) + \overrightarrow{KE}$$

حسب قاعدة متوازي الأضلاع فإن : $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE} = \overrightarrow{NM}$ ، يصبح المجموع :

$$\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{KE}$$

الشعاعان $\overrightarrow{KE}$ و $\overrightarrow{NM}$ هما شعاعان متعاكسان، و مجموعهما يساوي الشعاع المعدوم

أي : $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{KE} = \vec{0}$

و منـــــــه : $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{KE} = \vec{0}$

3) لنشرح لماذا الرباعي $MNEK$ متوازي أضلاع :

حسب الجواب الأول لدينا : $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{ME}$ ، يعني أن الرباعي $BMEN$ متوازي أضلاع و بالتالي :

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{NE}$.....**(1)**

و لدينا أيضا : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MK}$ .....**(2)**

من العلاقتين (1) و (2) ينتج أن : $\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{MK}$ و بالتالي الرباعي $MNEK$ متوازي أضلاع.

التمرين الثالث :

ABC مثلث.

1) أنشئ النقطة F حيث : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF}$

2) أنشئ النقطة E حيث : $\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{EB}$

3) بين أن : $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BE}$

4) بين صحة المساواة :

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$$

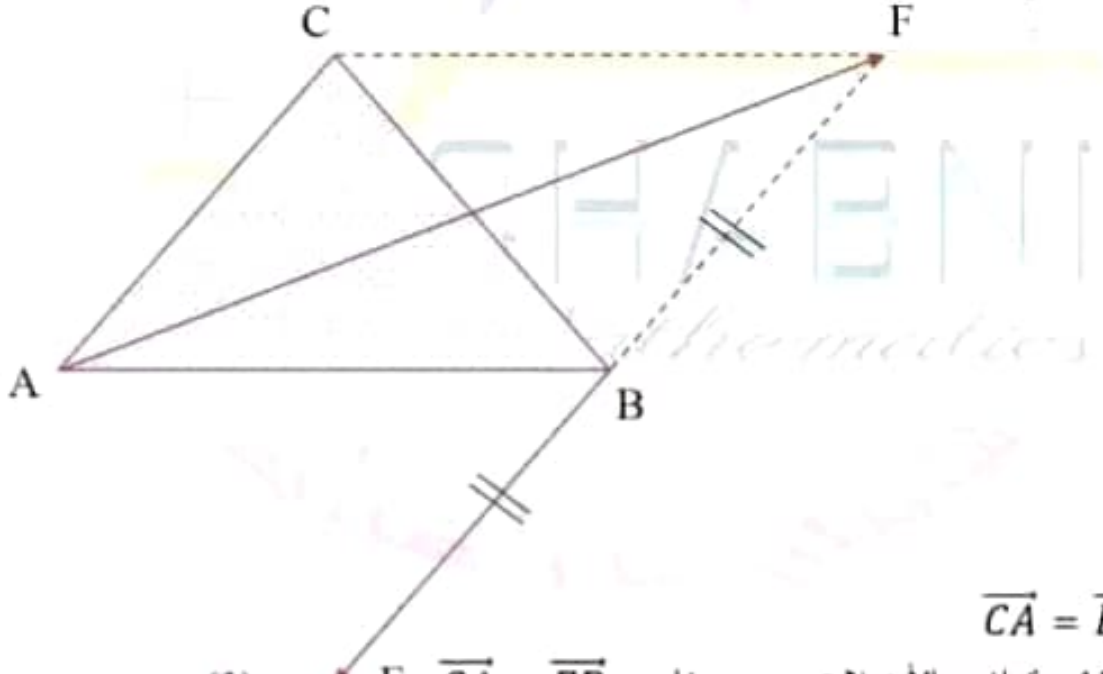
الحل :

1) إنشاء النقطة F : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF}$

لجمع شعاعين لهما نفس البداية، نطبق قاعدة متوازي الأضلاع. النقطة F هي الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع $ABFC$.

2) إنشاء النقطة E :

$\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{EB}$ معناه أن الشعاعان $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{FB}$ متعاكسان (لهما نفس المنحى، نفس الطول و اتجاهين متعاكسين) و بالتالي : $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BE}$



3) لنبين أن $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BE}$

الرباعي $ABFC$ متوازي الأضلاع، معناه : $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{FB}$ .....E.....(1)

مما سبق لدينا : $\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{EB}$ معناه : $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BE}$ .....(2)

من العلاقتين (1) و (2) ينتج أن : $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BE}$ و هو المطلوب !

4) لنبين صحة المساواة $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CF} = \underline{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FB}} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{EB}$$

حسب علاقة شال
$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AB}$

$$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{EB}$$

$-\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EA}$
$-\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BE}$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BE}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA}$$

$$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA}$$

شعاعان متعاكسان

$$= \vec{0}$$

التمرين الرابع :

$ABCD$ متوازي أضلاع.

1) أنشئ النقطة R حيث : $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{AC}$

2) أنشئ النقطة S حيث : $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

3) بين أن : $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{DS}$

الحل :

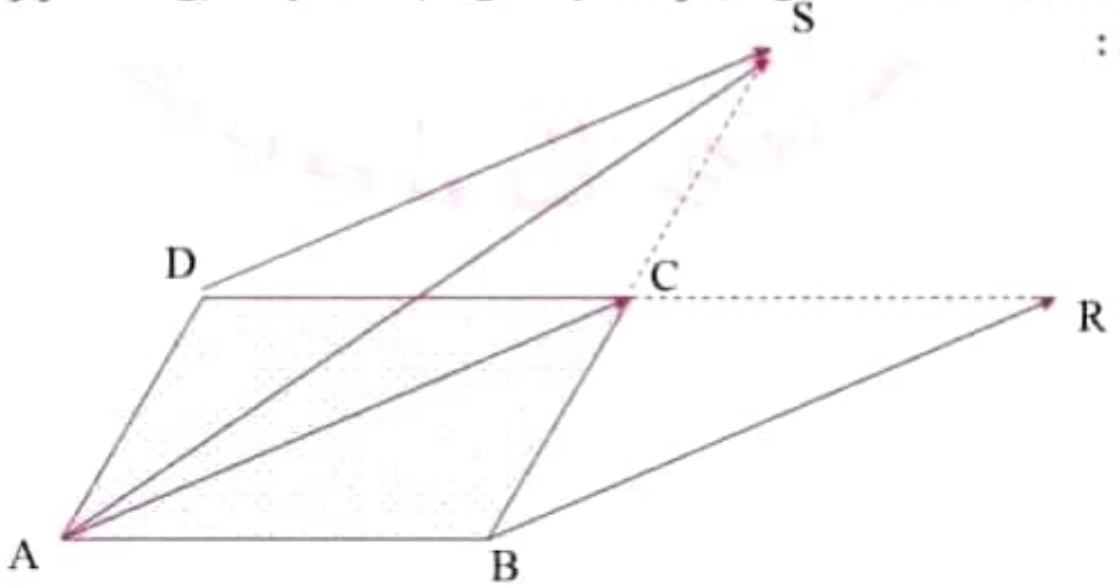
1) إنشاء النقطة R :

$\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{AC}$ معناه أن الشعاعان $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BR}$ لهما نفس المنحى و نفس الاتجاه و نفس الطول.

2) إنشاء النقطة S :

$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ الشعاعان $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما نفس المبدأ، لجمعهما نطبق قاعدة متوازي الأضلاع.

الشكل :



3) لنبين أن $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{DS}$

من الجواب الأول لدينا : $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{AC}$ .....(1)

من الجواب الثاني، نجد أن النقطة S هي الرأس الرابع للمتوازي الأضلاع $ACSD$، و منه :

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DS}$ .....(2)

من العلاقتين (1) و (2) ينتج أن : $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{DS}$

التمرين الخامس :

بسط ما يلي:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA}$$
$$2\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}$$

الحل :

التبسيط :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA}$$
$$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA}$$
$$= \vec{0}$$

مجموع شعاعين متعاكسين يساوي الشعاع المعدوم

$$2\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$
$$= 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$
$$= 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$
$$= 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$
$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$$
$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$$

شعاعين متعاكسين $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

التمرين السادس :

ABC مثلث متساوي الساقين في B

1) أنشئ النقطتين H و N حيث :

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{NH} = \overrightarrow{CA}$$

2) ما نوع الرباعي $ABCH$ ؟ علل

3) بين أن C منتصف $[BN]$

$\Leftarrow$ استنتج نوع المثلث BHN

الحل :

1) النقطتين :

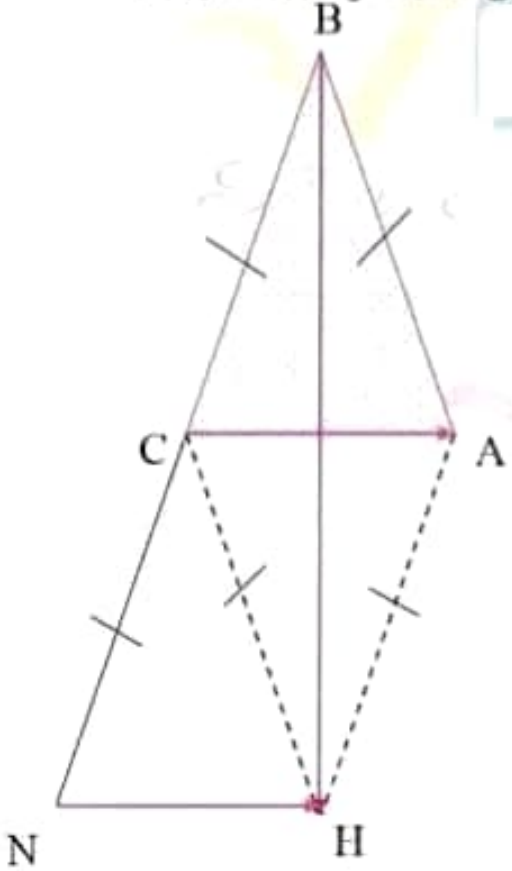
$\Leftarrow$ النقطة H :

الشعاعين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ لهما نفس المبدأ، لتمثيل مجموع هذين الشعاعين نطبق قاعدة متوازي الأضلاع، النقطة H هي الرأس الرابع للمتوازي الأضلاع $ABCH$

$\Leftarrow$ النقطة N :

$\overrightarrow{NH} = \overrightarrow{CA}$ معناه أن النقطة H هي صورة النقطة N بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CA}$، ينتج أن :

(CA) و (NH) لهما نفس المنحى، $[CA]$ و $[NH]$ لهما نفس الاتجاه، و $CA = NH$.



2) لنبين طبيعة الرباعي $ABCH$:

لدينا : $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ ما يعني أن الرباعي $ABCH$ متوازي الأضلاع، و بما أن المثلث ABC متساوي الساقين في B فإن : $AB = BC$

و منه لمتوازي الأضلاع $ABCH$ ضلعان متتاليان متقايسان إذن هو معين.

3) لنبين أن C منتصف $[BN]$:

الرباعي $ABCH$ معين يعني أن : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AH}$ .....(1)

و بما أن $\overrightarrow{NH} = \overrightarrow{CA}$ معناه أن الرباعي $ACNH$ متوازي أضلاع، و منه : $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AH}$ .....(2)

من العلاقتين (1) و (2) ينتج أن : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CN}$ أي : $BC = CN$

و عليه فإن النقطة C منتصف $[BN]$.

⇐ طبيعة المثلث BHN :

الرباعي $ABCH$ معين، معناه أن قطراه متعامدان، أي : $[BH] \perp [CA]$

و بما أن $\vec{N} = \overrightarrow{CA}$ معناه أن المستقيمين (NH) و (CA) لهما نفس المنحى،

أي $(CA) // (NH)$ و منه : $(NH) \perp (BH)$

إذن المثلث BHN قائم في النقطة H .

التمرين السابع :

$ABCD$ متوازي الأضلاع.

1) أنشئ النقطة E صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BD}$

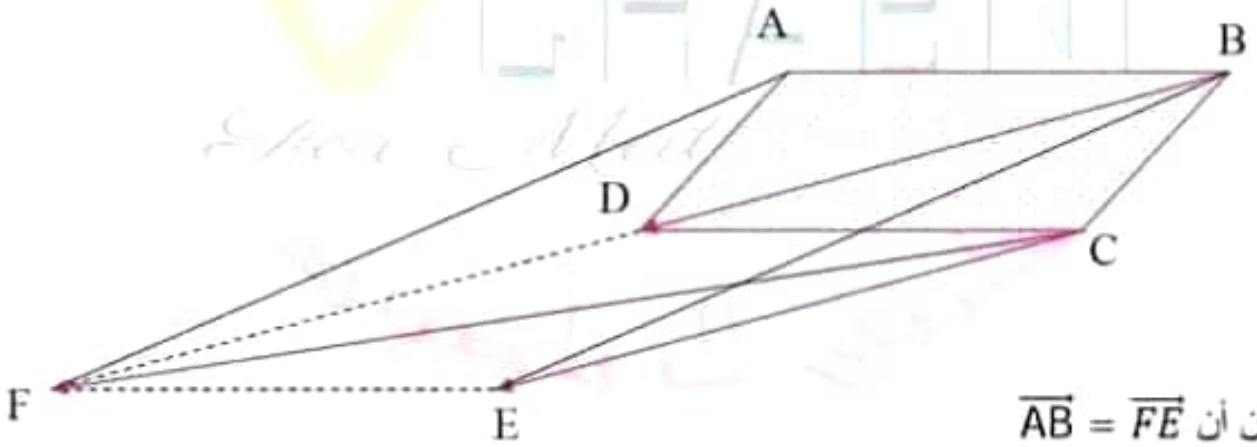
2) أنشئ النقطة F حيث : $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CD}$

3) بين أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABEF$.

4) أكمل ما يلي :

$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} = \cdots$; $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FE} = \cdots$; $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \cdots$

الحل :



1) لنبين أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$

الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع، معناه : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .....(1)

من جهة أخرى لدينا : $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CD}$ معناه أن النقطة F هي الرأس الرابع للمتوازي

الأضلاع $DCEF$ و بالتالي : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$ .....(2)

من العلاقتين (1) و (2) ينتج أن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$

بما أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$ فإن الرباعي $ABEF$ متوازي أضلاع

1) إكمال الفراغ :

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$ (الشعاعان $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس المبدأ لذا نطبق قاعدة متوازي الأضلاع)

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FE}$ معناه : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$ ، الشعاعان $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{AB}$ متعاكسان و منه :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$ أي : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FE} = \vec{0}$ (مجموع شعاعين متعاكسين يساوي الشعاع المعدوم).

بما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فإن : $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ و منه يصبح المجموع

$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}$ و حسب علاقة شال فإن : $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{EA}$

و منه : $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EA}$

التمرين الثامن :

BEM مثلث قائم و متساوي الساقين في M حيث : $EM = MB = 4cm$

1) أنشئ النقطتين D و C صورتي M و E بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{EM}$ و $\overrightarrow{BD}$ على الترتيب

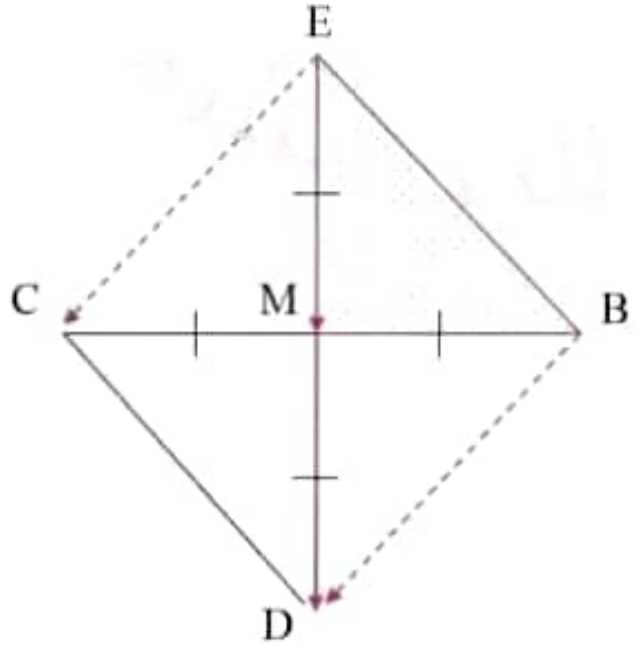
2) بين أن الرباعي $EBDC$ مربع

3) ليكن الشعاع $\vec{u}$ حيث : $\vec{u} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{MB}$

بين أن : $\vec{u} = \overrightarrow{ED}$

الحل :

1) الشكل :



2) لنبين أن الرباعي $EBDC$ مربع :

لدينا C صورة النقطة E بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BD}$ معناه أن : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{EC}$ و منه الرباعي $EBDC$ متوازي أضلاع، و بالتالي : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$ (M منتصف $[BC]$)

من جهة أخرى لدينا النقطة D صورة النقطة M بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{EM}$ معناه أن $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{MD}$ (M منتصف $[ED]$)

و بما أن المثلث BEM قائم و متساوي الساقين فإن القطران $[ED]$ و $[BC]$ متعامدان و متناصفان و متقايسان، و بالتالي فإن الرباعي $EBDC$ مربع.

3) لنبين أن $\vec{u} = \overrightarrow{ED}$

$$\vec{u} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{EC}$$
$$= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}$$

الشعاعان $\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{EB}$ لهما نفس المبدأ، لذا لتمثيل المجموع $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}$ نطبق قاعدة متوازي الأضلاع، نجد : $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED}$

و منه : $\vec{u} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{ED}$

التمرين التاسع :

ABC مثلث قائم في A حيث : $AB = 4cm$; $AC = 3cm$

1) أنشئ النقطتين M و D حيث :

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$

2) بين أن C منتصف $[MD]$

3) أحسب محيط الرباعي $ABDM$