

التمرين الأول:

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط $A(2;5)$; $B(0;2)$.

لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

1- بين أن (Γ) دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

2- تحقق أن $A \in (\Gamma)$ و اكتب معادلة المستقيم (T) مماس الدائرة (Γ) في النقطة A

3- (Δ) مستقيم ذو المعادلة $x - y + 3 = 0$

• حدد الوضع النسبي لـ (Δ) و (Γ) ثم عين نقط تقاطع إن وجدت.

4- عين معادلة الدائرة (C) صورة الدائرة (Γ) بتحكي مركزه B و نسبته 3.

5- لتكن (Γ_α) مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + \alpha = 0$ عين مجموعة القيم α التي تكون من أجلها (Γ_α)

دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $u_0 = \alpha$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$.

i. عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

ii. نضع $u_0 = 6$

(1) أ) أحسب u_1, u_2, u_3 . ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) افرض أن من أجل كل عدد طبيعي n : u_n أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(2) نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية (v_n) حيث: $v_n = u_n - 3$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ $q = \frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

• احسب المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

• احسب المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

التمرين الثالث:

في الشكل المرفق (أنظر الوثيقة المرفقة) (C_f) هو تمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;5]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$

و (d) المستقيم معادلة له: $y = x$.

1. (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

• مثل على حامل محور الفواصل الحدود التالية : u_0, u_1, u_2, u_3 دون حسابها . ثم اعط تخمينا حول اتجاه التغير المتتالية (u_n)

• ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) علما أن $u_n > 1$

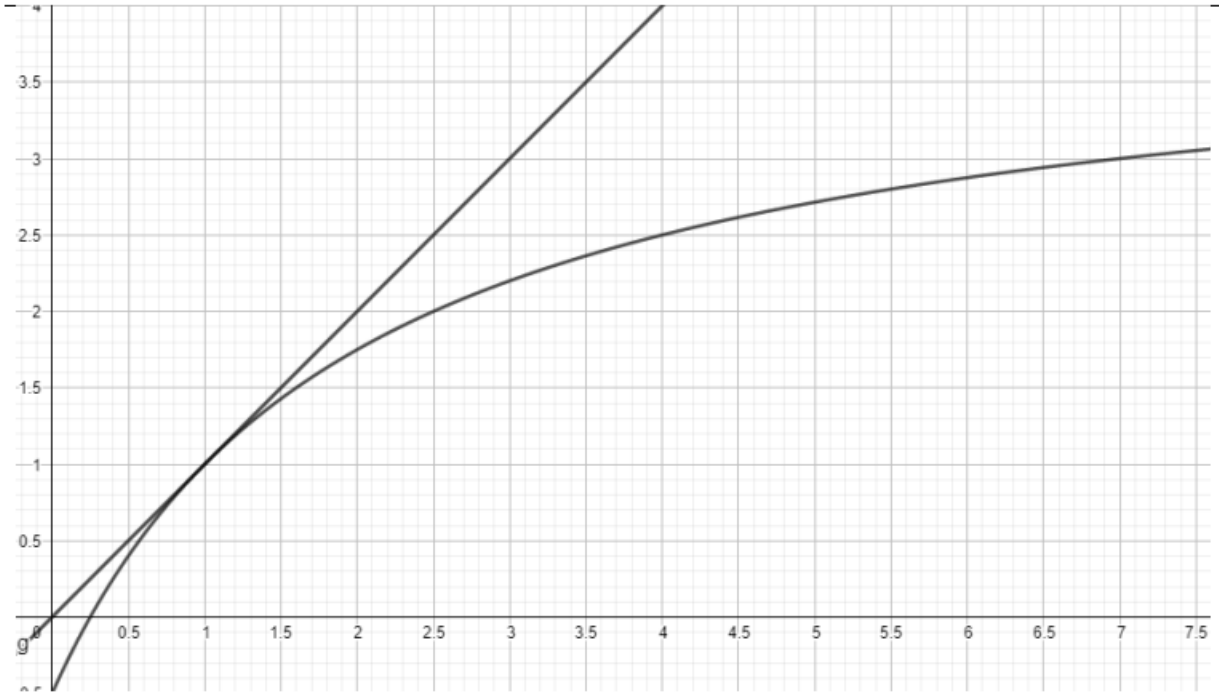
2. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

• أحسب v_0 ثم برهن أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{3}$

• أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

• احسب المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

الاسم : اللقب : القسم :



التمرين الأول:

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس نعتبر النقط $B(0;2)$; $A(2;5)$.

لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

-1 اثبات أن (Γ) دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

لدينا $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ ومنه $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$ إذن (E) دائرة مركزها $\Omega(1;3)$ و $r = \sqrt{5}$ نصف قطرها

-2 تحقق أن $A \in (\Gamma)$ لدينا $2^2 + 5^2 - 2 \times 2 - 6 \times 5 + 5 = 0$ ومنه $A \in (\Gamma)$

(T) مماس الدائرة (Γ) في النقطة A فإن $\overrightarrow{\Omega A}$ شعاع ناظمي للمماس .

نضع $M(x; y) \in (T)$ فإن $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0$

لدينا $\overrightarrow{\Omega A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-5 \end{pmatrix}$ ومنه $x + 2y - 12 = 0$ معادلة (T) مماس الدائرة (Γ) في النقطة A .

-3 (Δ) مستقيم ذو المعادلة $x - y + 3 = 0$

• تحديد الوضع النسبي لـ (Δ) و (Γ)

حساب $d(\Omega; \Delta)$ المسافة بين النقطة Ω و المستقيم (Δ) : $d(\Omega; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

بما أن $d(\Omega; \Delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} < r$ فإن (Δ) يقطع الدائرة (Γ) في نقطتين

تعيين نقط تقاطع (Δ) و (Γ)

لدينا $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$ ومنه نقطة التقاطع هو حل الجملة $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0 \\ y = x + 3 \end{cases}$ أي

$$\begin{cases} x^2 + (x+3)^2 - 2x - 6(x+3) + 5 = 0 \\ y = x + 3 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

نحل المعادلة (1) أي $x^2 + (x+3)^2 - 2x - 6(x+3) + 5 = 0$ أي $2x^2 - 2x - 4 = 0$

ومن المعادلة (1) تقبل حلين مختلفين هو $x = 2$; $x = -1$ نعوض $x = -1$ في المعادلة (2) نجد $y = 2$ و نعوض $x = 2$ في المعادلة

(2) نجد $y = 5$ ومنه نقطة تقاطع (Δ) و (E) هي $A(2;5)$, $(-1;2)$

-4 عين معادلة الدائرة (C) صورة الدائرة (Γ) بتحاي مركزه B و نسبته 3 .

(أ) نعين صورة المركز

$\Omega'(x; y)$ صورة $\Omega(1;3)$ بتحاي مركزه $B(0;2)$ و نسبته 3 معناه $\overrightarrow{B\Omega'} = 3\overrightarrow{B\Omega}$ أي $\begin{pmatrix} x \\ y-2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ومنه $\Omega'(3;5)$

ولدينا $r' = 3r = 3\sqrt{5}$ ومنه معادلة الدائرة (C) هي $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 45$ أي $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 11 = 0$

5- لتكن (Γ_α) مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث : $x^2 + y^2 - 2x - 6y + \alpha = 0$.
 تعيين مجموعة القيم α التي يكون من أجلها (Γ_α) دائرة.
 لدينا $x^2 + y^2 - 2x - 6y + \alpha = 0$ ومنه $(x-1)^2 + (y-3)^2 = -\alpha + 10$
 حتى تكون (Γ_α) دائرة فإن $-\alpha + 10 > 0$ أي $\alpha < 10$ ومنه $\alpha \in]-\infty; 10[$
 إذن من أجل $\alpha \in]-\infty; 10[$ فإن (Γ_α) دائرة مركزها $\Omega(1; 3)$ ونصف قطرها $\sqrt{-\alpha + 10}$
التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $u_0 = \alpha$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$.

i. تعيين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة فإن $u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$ ومنه $u_{n+1} = \frac{2}{3}\alpha + 1$ إذن $\alpha = 3$

ii. نضع $u_0 = 6$

(1) أ) حساب u_1, u_2, u_3 . ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$u_3 = \frac{2}{3}u_2 + 1 = \frac{35}{9} \quad u_2 = \frac{2}{3}u_1 + 1 = \frac{13}{3} \quad u_1 = \frac{2}{3}u_0 + 1 = 5$$

بما أن $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) بفرض أن من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 3$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 1 < 0 \quad \text{لأن } u_n > 3 \text{ ومنه المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة تماماً .}$$

(2) نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية (v_n) حيث : $v_n = u_n - 3$.

أ) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية

$$\text{لدينا } v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}u_n - 2 = \frac{2}{3}(v_n + 3) - 2 = \frac{2}{3}v_n + 1 - 2 = \frac{2}{3}v_n \text{ ومنه } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{2}{3}$$

$$\text{حدها الأول } v_0 = u_0 - 3 = 3$$

ب) كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

$$\text{لدينا } v_n = u_n - 3 \text{ ومنه } u_n = v_n + 3 \text{ إذن } u_n = 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n + 3$$

• حساب المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$= v_0 \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right) = 3 \left(\frac{\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1} \right) = -9 \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} - 1 \right)$$

• حساب المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= v_0 + 3 + v_1 + 3 + v_2 + 3 + \dots + v_n + 3$$

$$= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + 3 + \dots + 3$$

$$= -9 \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} - 1 \right) + 3n + 3$$

$$= -9 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} + 3n + 12$$

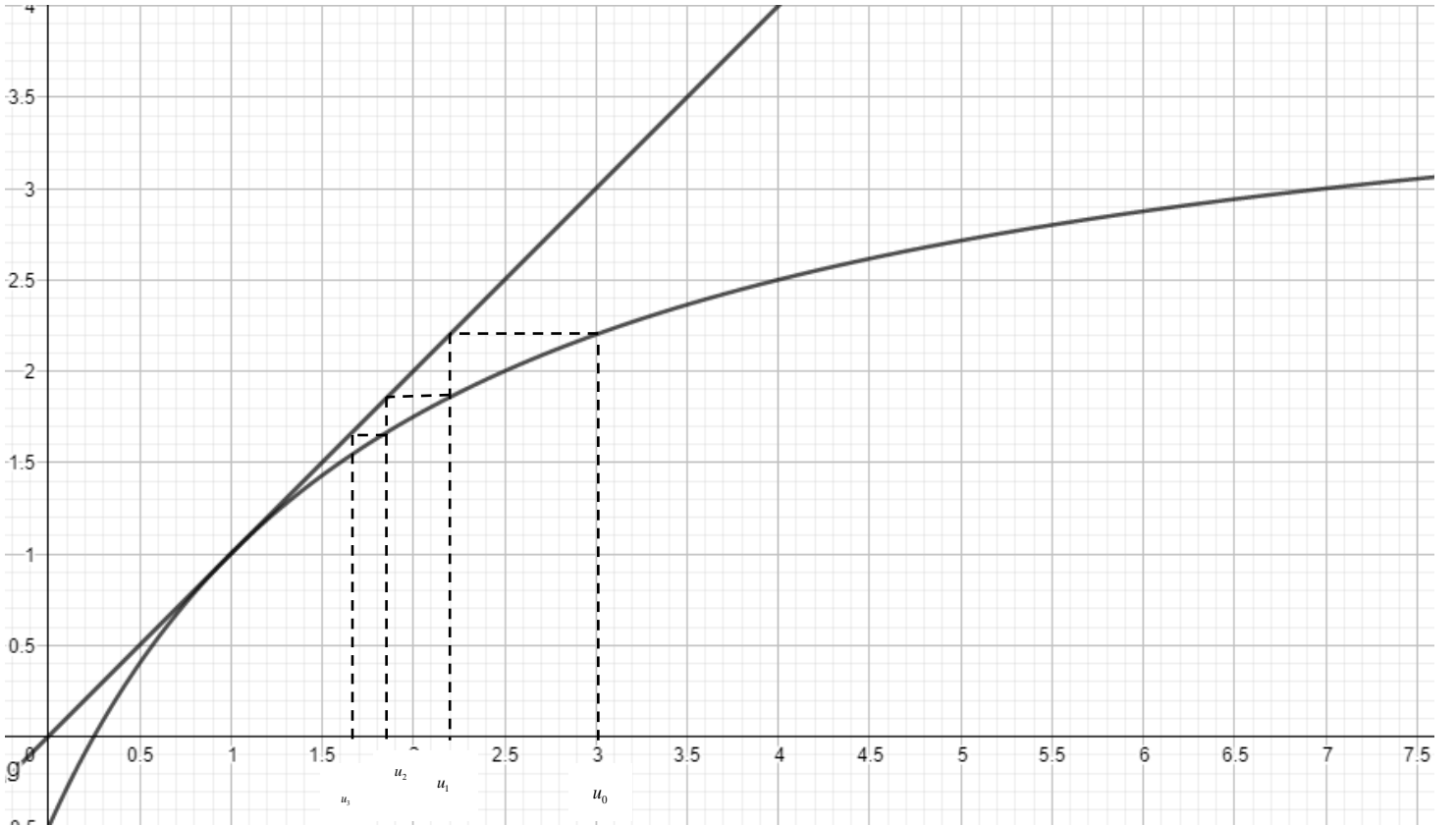
التمرين الثالث:

في الشكل المرفق (أنظر الوثيقة المرفقة) (C_f) هو تمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;5]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$

و (d) المستقيم معادلة له: $y = x$.

1. (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

• تمثيل على حامل محور الفواصل الحدود التالية: u_0, u_1, u_2, u_3 دون حسابها.



التخمين حول اتجاه التغير المتتالية (u_n) : بما أن $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

• دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) علما أن $u_n > 1$

$$u_n > 1 \text{ الفرق سالب لأن } u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 2} < 0$$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

2. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

• حساب v_0

$$v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{2}$$

اثبات أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{3}{3u_n - 3} = \frac{1}{3} \\ v_n &= \frac{1}{u_n - 1} \end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{3}$

• كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

$$v_n = nr + v_0 = \frac{1}{3}n + \frac{1}{2}$$

لدينا $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ ومنه $u_n = \frac{1}{v_n} + 1$ إذن $u_n = \frac{1}{\frac{1}{3}n + \frac{1}{2}} + 1 = \frac{6}{2n + 3} + 1 = \frac{2n + 9}{2n + 3}$

• احسب المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n \\ &= \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) \\ &= \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n + \frac{1}{2} \right) = \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{3}n + 1 \right) = \frac{n^2 + 4n + 3}{6} \end{aligned}$$