بكالوريا تجريبي 2024 (I)

تمرين 1: (4 نقاط b)

(1)

(1) $P_1 = P(A_1) = \frac{1}{3}$; $P_2 = \frac{4}{9}$

(1) $P_{A_1}(A_2) = \frac{2}{3}$; $P_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{1}{3}$

(2) 1- خطأ ؛ الصواب هو:

(1) $P_{n+1} = \frac{1}{3} P_n + \frac{1}{3}$

ب- خطأ ؛ الصواب هو المتتالية

(1) $q_{n+1} = \frac{1}{3} q_n$

ج- صحيحة ؛ لأن (1) $\lim_{n \to +\infty} P_n = \frac{1}{2}$

تمرين 2: (4,5 نقاط)

I) الحلول هي: (1) $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ؛ $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ؛ $\frac{3+i\sqrt{3}}{4}$

II (1) $z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}$ (0,25)

(0,25) قيمة n هي: $n = 6k+3$

(0,25) 2- أ) $z_{A'} = 2 = z_A$

(0,25) ب- عبارة h: $z' - 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(z-2)$

(0,25) 3- أ) عبارة f: $M \xmapsto{h} M' \xmapsto{\varphi} M''$

(0,25) $z'' - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (z'-2) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}(z-2)$

(0,25) $= e^{i\frac{\pi}{6}}(z-2)$

(0,25) ب- φ دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{6}$.

(0,25) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ - ب) φ هو مركب الدوران r والتحاكي h

(0,5) 4- أ)

(0,5) $\frac{z'-z}{z'-2} = \frac{(-1+i\sqrt{3})(z-2)}{(3+i\sqrt{3})(z-2)} = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{2}}$

طبيعة المثلث قائم في M'

(0,5) ب- لدينا $\frac{z'-2}{z-2} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$

(0,25) إذن: $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

(0,25) وحسب 1) لدينا: $\frac{z'-z}{z-2} = \frac{1}{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(0,25) إذن: $2MM' = AM$

(0,5) ج- نرسم قطعة منتصف $[AM']$ حيث:

(0,25) $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{6}$

ثم نسقط M عموديا على هذا المستقيم فنجد M'.

تمرين 3: (5 نقاط)

(1) 1- أ) $V_0 = U_0 + \frac{3}{4}$ ؛ $q = 5$ متتالية هندسية

(0,5) ب- لدينا: $4U_n = 4V_n - 3 = 5^n(4U_0+3) - 3$

(0,5) أ-2

n	0	1	2	3	4	5
5^n	1	5	3	4	9	1

(0,25) الباقي 5 ، منه التخمين

(0,25) ب- $5^4 = 625$ ؛ إذن: $5^4 \equiv 13[17]$

(0,25) $13^2 = 169$ ؛ $13^2 \equiv 26[17]$

(0,25) أي: $13^2 \equiv -1[17]$ ؛ منه

(0,25) $5^{16} \equiv (-1)^2[17]$ ؛ $5^{16} \equiv 1[17]$

(0,5) ج- لدينا: $4U_{1445} = 5^{1445}(4U_0+3) - 3$

لكن: $5^{1445} \equiv 1[11]$ ؛ إذن:

$4U_{1445} \equiv 4U_0[11]$

(0,5) بما أن 4 أولي مع 11 فإن:

$U_{1445} = U_0[11]$

$5^{1445} \equiv 14[17]$: ولدينا

منه: $4U_{1445} \equiv 16 \times 4U_0 + 39[17]$

$\equiv 16 \times 4(U_0+1)[17]$

(0,25) منه: $U_{1445} = 16(U_0+1)[17]$

(3) 1- صيغة صريحة

(0,25) $U_0 = 33$

ب-1- لدينا: $4U_n = 5^n \times 135 - 3$

$16S_n = 4[4U_0 + 4U_1 + \dots + 4U_n]$

(0,5) $= 4\left[17 \times \frac{5^{n+1}-1}{5-1} - 3n - 3\right]$

$= 135 \times 5^{n+1} - 12n - 147$

ب- لدينا $n = 5k+4$ ؛ منه

(0,25) $k \equiv -1[11]$ يعني $16S_n \equiv 0[11]$

إذن: $n = 55k - 1$; $k \in \mathbb{N}^*$

تمرين 4: (6,5 نقاط)

(1) $\lim_{x \to 2} f(x) = 1 = f(2)$: متصلة

(2) 1- أ) من أجل $x < 2$ ، $x \neq 0$

$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{(x-1)^2 e^{x(2-x)} - 1}{x-2}$

(0,5) $= x e^{x(2-x)} - x \frac{e^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)}$

محققة.

ب) من الحساب نجد أن:

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 2 - 2 = 0$

Scanné avec CamScanner

ب) لدينا : $(\overrightarrow{M'B};\overrightarrow{M'A}) = k\pi$

ومنه : $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ (0,5)

إذن مجموعة النقط هي دائرة قطرها $[AB]$.

تمرين 4 : (5 نقاط)

I) 1-1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (0,5)

ب- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{1-x}}{\sqrt{x}} = +\infty$ (0,5)

f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0.

وجود نصف مماس معمودي.

1-2) f قابلة للاشتقاق ولدينا :

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{1-x} - \sqrt{x} e^{1-x}$

$= \frac{1-2x}{2\sqrt{x}} e^{1-x}$ (0,5)

ب- جدول التغيرات :

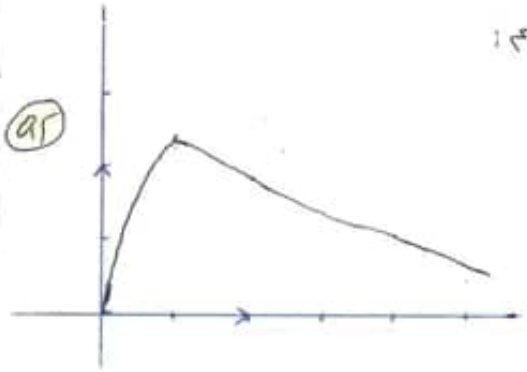
x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$f(\frac{1}{2})$	↘	0

(0,5)

$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{e}{2}} \simeq 1,2$

3) الرسم :

(0,5)



II) 1) العدد U_n هو مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=n$ و $x=n+1$. (0,5)

2) من أجل $n\in\mathbb{N}^*$ لدينا $n \le t \le n+1$

وبما أن f متناقصة على $[1;+\infty[$

فإن : $f(n+1) \le f(t) \le f(n)$ (0,5)

ومنه : $\sqrt{n+1}\,e^{-n} \le U_n \le \sqrt{n}\,e^{1-n}$

ومنه : $U_{n+1} < \sqrt{n+1}\,e^{-n} \le U_n$

إذن (U_n) متناقصة تماما.

III) 1-1) نفرض أن $1 < t+1 < 2\sqrt{t}$ (0,5)

ومنه : $(t+1)^2 < 4t$ أي : $(t-1)^2 < 0$

وهذا تناقض ؛ إذن : $t+1 \ge 2\sqrt{t}$

ب) لدينا : $\sqrt{t} \le \frac{1}{2}(t+1)$ (0,5)

ومنه : $\sqrt{t}\,e^{1-t} \le \frac{1}{2}(t+1)e^{1-t}$

إذن : $F(x) \le \frac{1}{2}\int_1^x (t+1)e^{1-t}\,dt$ (0,5)

3) بالتجزئة نجد :

$\int_1^x (t+1)e^{1-t}\,dt = \left[-(t+1)e^{1-t}\right]_1^x + \int_1^x e^{1-t}\,dt$

$= 3 - (x+2)e^{1-x}$ (0,5)

ومنه :

$0 \le F(x) \le \frac{3}{2} - \frac{(x+2)}{2}e^{1-x} \le \frac{3}{2}$

إذن : $0 \le F(x) \le \frac{3}{2}$ (0,5)

4) لدينا : $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

$S_n = F(n-1)$ (0,5)

لدينا $F'(x) = f(x)$ و $f(x) > 0$

إذن F متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

ومنه (S_n) كذلك.

5) بما أن (S_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ $\frac{3}{2}$ فهي متقاربة نحو ℓ حيث :

$0 \le \ell \le \frac{3}{2}$ (0,5)

Scanné avec CamScanner

بكالوريا تجريبي 2024 (II)

تمرين 1: (4 نقاط)

1- أ) لدينا: $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ، $\vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$

(1) إذن A ، B ، C ليست في استقامة.

ب) إذن النقط A ، B ، C تحدد مستويا

(1) معادلة (ABC): $x+y-z-2=0$ إذن

2- أ) $(D):\begin{cases}x=-k\\y=4+5k\\z=3+3k\end{cases}$

(1)

ب) لدينا $\begin{cases}x+2y-3z+1=0\\2x+y-z-1=0\end{cases}$

بوضع $x=-k$ نجد:

$\begin{cases}2y-3z=-1+k\\y-z=1+2k\end{cases}$

ومنه: $\begin{cases}y=4+5k\\z=3+3k\end{cases}$

(1) إذن: $(P)\cap(Q)=(D)$

(3) نقطة تقاطع (P) و (Q) مع (ABC) هي نقطة تقاطع (D) و (ABC)، ومنه:

$(-k)+(4+5k)-(3+3k)-2=0$

إذن: $k=1$

(0.5) ومنه نقطة التقاطع هي: $E(-1;9;6)$

تمرين 2: (5 نقاط)

1- أ) لدينا: $5y=8(2x-253)$

إذن $8\mid 5y$ ، و 8 أولي مع 5 إذن $8\mid y$

(0.5) أي: $y\equiv 0[8]$.

- لدينا: $16x=2024+5y$

(1) أي $x\equiv -1[5]$ ، ومنه: $\boxed{x=5k-1}$

(1) وبالتعويض نجد: $\boxed{y=16k-408}$

ب- لدينا $x\equiv 0[8]$ و $y\equiv 0[8]$

ومنه: $k\equiv 5[8]$

وبما أن: $2024=8\times 11\times 23$

فإن $x\neq 0[23]$ و $x\neq 0[11]$

(0.5) إذن: $x=40p-16$ ، $y=184p-456$

حيث $p\neq -4[11]$ و $p\neq 5[23]$

2- أ) لدينا:

a	0	1	2	3	4	5	6
a^6	0	1	1	1	1	1	1

(1) إذن $a^6=0[7]$ أو $a^6\equiv 1[7]$

ب- لدينا: $2024=7\times 289+1$

(1) إذن: $PGCD(2024;7)=1$

- نعلم أن $7\mid x$ و $7\mid y$ ، ومنه $7\mid 16x^6-5y^6$ أي $7\mid 2024$ ، وهذا تناقض إذن الاستلزام محقق.

ج- من السابق نجد:

x^6	1	0	1
y^6	1	1	0

(0.5) حالة $(1;1)$ نجد: $16x^6-5y^6\equiv 4[7]$

حالة $(0;1)$ نجد $16x^6-5y^6\equiv 2[7]$

حالة $(1;0)$ نجد: $16x^6-5y^6\equiv 2[7]$

إذن الاستلزام محقق.

(1) 3) لدينا من أجل (E'): $16x^6-5y^6\equiv 1[7]$

(0.5) وهذا يناقض الاستلزام السابق؛ إذن المعادلة ليس لها حل.

تمرين 3: (4 نقاط)

1- أ) المعادلة: $z^2-2z+2=0$

(1) $z_1=1+i$ ؛ $z_2=1-i$

ب-

(1) $(z_1)^{8n}+(z_2)^{8n}=\sqrt{2}^{8n}(e^{i\frac{n\pi}{4}}+e^{-i\frac{n\pi}{4}})$

$=2^{4n}\times 2=2^{4n+1}$

ج- $\frac{z'-a}{z'-b}=\frac{z-2+iz}{z-2-iz}=\frac{i(z-a)}{(z-b)(1-i)}$

(0.5) $=i\,\frac{z-a}{z-b}$

ب- $(\vec{M'B};\vec{M'A})=\frac{\pi}{2}+(\vec{MB};\vec{MA})$

(0.5) ج) من أجل M من (AB) لدينا:

$(\vec{MB};\vec{MA})=k\pi$

(0.5) ومنه حسب السابق:

$(\vec{M'B};\vec{M'A})=\frac{\pi}{2}+k\pi$

ومنه M تنتمي إلى الدائرة قطرها [AB] ما عدا A و B.

Scanné avec CamScanner

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 0$

ومنه قابلة للاشتقاق عند 2 (0,25)

ونستنتج: $f'(2) = 0$.

(3

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (0,25)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (0,25)

4-1) إثبات أن من أجل كل $x < 2$:

$f'(x) = 2(x-1)e^{x(2-x)} + (x-1)^2 e^{x(2-x)}(2-2x)$

$= 2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$ (0,25)

ب- من أجل $x > 2$:

$f'(x) = 2(x-2)\ln(x-2) + (x-2)$

$= (x-2)[2\ln(x-2) + 1]$ (0,25)

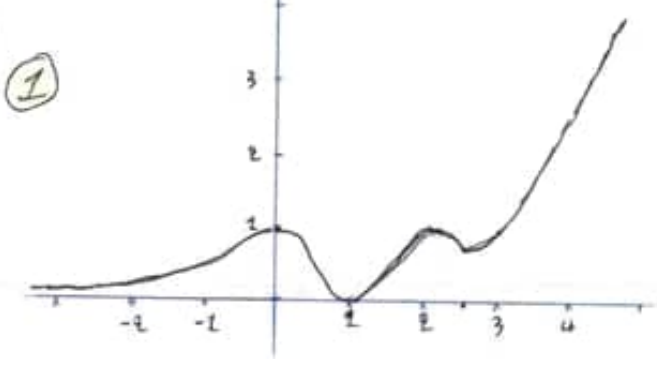
ج- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	1	2	$2+e^{-1/2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	0	↗ 1	↘ 0	↗ 1	↘ $\approx 0,8$	↗ $+\infty$

(1)

5) الرسم:

(1)



6-1) إثبات أن الدالة F هي دالة أصلية لـ f على $]2;+\infty[$:

$u = \ln(x-2)$; $v' = (x-2)^2$ (0,25)

$\int (x-2)^2 \ln(x-2)\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v$

$= \frac{1}{3}(x-2)^3 \ln(x-2) - \frac{1}{9}(x-2)^3 + C = F(x)$

ب- حساب المساحة:

$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{3} 2 - f(x)\,dx$

$A(\lambda) = F(\lambda) - F(3)$ (0,25) u.a

ج- $\lim_{\lambda \to 2} A(\lambda) = \frac{1}{9}$ u.a (0,25)

Scanné avec CamScanner

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
الشعبة: رياضيات

ثانوية محند مخبي
دورة ماي 2024

امتحان بكالوريا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 04 سا و 30 د

على الممتحن أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على 03 صفحات (من الصفحة 1 إلى الصفحة 3)

التمرين الأول (4 نقاط):

n عدد طبيعي غير معدوم. نعتبر مجموعة من الأكياس U_1، U_2، ... ، U_n .

يحتوي الكيس U_1 على قريصتين سوداوين وقريصة بيضاء، وتحتوي بقية الأكياس $(U_2$ ، ... ، $U_n)$ كل منها على قريصة سوداء وقريصة بيضاء.

نسحب من الكيس U_1 قريصة واحدة ونضعها في الكيس U_2 ، ثم نسحب قريصة من U_2 ونضعها في U_3 ، و نكمل العملية بهذا الشكل إلى أن نسحب قريصة من U_{n-1} ونضعها في الكيس U_n .

من أجل كل k طبيعي، $1 \le k \le n$ ، نعتبر A_k الحدث " القريصة المسحوبة من الكيس U_k بيضاء " و p_k احتمالها (أي $p_k = P(A_k)$).

1) احسب P_1 ثم بيّن أنّ $P_{A_1}(A_2) = \frac{2}{3}$ و $P_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{1}{3}$ و احسب P_2 .

2) أجب بصحيح أو خطأ (مع التبرير) على الاقتراحات التالية:

أ) من أجل كل $n \ge 1$: $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}$.

ب) المتتالية $(q_n)_{n \ge 1}$ المعرفة بـ: $q_n = p_n - \frac{1}{2}$ متتالية حسابية.

ج) المتتالية $(p_n)_{n \ge 1}$ متقاربة إلى $\frac{1}{2}$.

التمرين الثاني (4,5 نقاط)

I. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(4z - 3 - i\sqrt{3})(z^2 - z + 1) = 0$.

II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 2$ ، $z_B = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_C = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4}$.

1) اكتب z_B على الشكل الأسّي، ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B)^n$ حقيقيًا سالبًا.

2) نعتبر φ التحويل النقطي الذي يحوّل النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ بحيث: $z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

أ) حدّد لاحقة النقطة A' صورة A بالتحويل φ .

Scanné avec CamScanner

ب) عين العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه A ونسبته $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3) نضع التحويل $f=\varphi\circ h$ الذي يحوّل النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M''(z'')$.

أ) بيّن أنّ $z''-2=(z-2)e^{i\frac{\pi}{6}}$ ثم استنتج طبيعة التحويل f وعناصره المميزة.

ب) استنتج أنّ φ هو مركب تحويلين يطلب تحديدهما.

4) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها $z\neq 2$ و $M'(z')$ صورتها بالتحويل φ .

أ) بيّن أنّ $\frac{z'-z}{z'-2}=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث AMM' .

ب) بيّن أنّ $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ وأنّ $2MM'=AM$.

ج) استنتج طريقة لإنشاء النقطة M' .

التمرين الثالث (5 نقاط):

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases}u_0\in\mathbb{N}\\u_{n+1}=5u_n+3\end{cases}$ ،

و لتكن (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n+\frac{3}{4}$.

1) أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب) برهن أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $4u_n=5^n(4u_0+3)-3$.

2) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11 .

ب) برهن أنّ $5^4\equiv 13[17]$ و $13^2\equiv -1[17]$ ثم استنتج أنّ $5^{16}\equiv 1[17]$.

ج) برهن أنّ $u_{1445}\equiv u_0[11]$ و $u_{1445}\equiv 14(u_0+1)[17]$.

3) عيّن أصغر قيمة للعدد u_0 حتى يكون u_{1445} مضاعفًا للعدد 187 .

4) نضع $u_0=33$ وليكن المجموع S_n : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $16S_n=135\times 5^{n+1}-12n-147$

ب) عيّن قيم n حتى يكون: $\begin{cases}16S_n\equiv 0[11]\\n\equiv 4[5]\end{cases}$

clicEdition

Scanné avec CamScanner

التمرين الرابع (6,5 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\begin{cases} f(x)=(x-1)^2 e^{x(2-x)} & , \ x \le 2 \\ f(x)=1+(x-2)^2 \ln(x-2) & , \ x>2 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أثبت أنّ f مستمرة عند 2 .

2) أ) تحقق أنه من أجل $x<2$ و $x \neq 0$: $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=x\,e^{x(2-x)}-x\dfrac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}$.

ب) أثبت أنّ f قابلة للاشتقاق عند 2 و أنّ $f'(2)=0$.

3) احسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.

4) أ) أثبت أنه من أجل كل $x<2$: $f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$.

ب) أ) أثبت أنه من أجل كل $x>2$: $f'(x)=(x-2)\big(1+2\ln(x-2)\big)$.

ج) ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

5) ارسم المنحني (C_f) (يعطى $f(3)=1$ و $f(2,6)=0,8$) .

6) ليكن λ عدد حقيقي بحيث $2<\lambda<3$.

أ) باستعمال مكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x-2)^2\ln(x-2)$.

ب) احسب بدلالة λ مساحة الحيّز المستوي $A(\lambda)$ المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات $y=1$ ، $x=\lambda$ ، $x=3$.

ج) احسب $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 2 \\ \lambda>2}} A(\lambda)$.

انتهى الموضوع الأول

Scanné avec CamScanner

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على 03 صفحات (من الصفحة 4 إلى الصفحة 6)

التمرين الأول (4,5 نقاط):

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقط $A(1;1;0)$، $B(2;1;1)$ و $C(-1;2;-1)$.

1) أ) بين أن النقط A، B و C ليست في استقامية.

ب) بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $x+y-z-2=0$.

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتيهما على الترتيب:

$(P): x+2y-3z+1=0$ و $(Q): 2x+y-z-1=0$

والمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0;4;3)$ و $\vec{u}(-1;5;3)$ شعاع توجيه له.

أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

ب) تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D).

3) عيّن تقاطع المستويات الثلاث (ABC)، (P) و (Q).

التمرين الثاني (5 نقاط):

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E)\cdots 16x-5y=2024$

أ) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $y\equiv 0[8]$ ثم حل المعادلة (E).

ب) حدّد الثنائيات $(x;y)$ من حلول (E) والتي من أجلها يكون $p\gcd(x;y)=8$.

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E^*)\cdots 16x^6-5y^6=2024$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد صحيح نسبي a فإنّ $a^6\equiv 0[7]$ أو $a^6\equiv 1[7]$.

ب) تحقق أنّ 7 و 2024 أوّليان فيما بينهما ثم بيّن الاستلزام التالي:

$[(x;y)$ حل للمعادلة $(E^*)]$ فإنّ $[p\gcd(x;7)=1$ أو $p\gcd(y;7)=1]$.

ج) استنتج الاستلزام التالي:

$[(x;y)$ حلا للمعادلة $(E^*)]$ فإنّ $[16x^6-5y^6\equiv 2[7]$ أو $16x^6-5y^6\equiv 4[7]]$

3) استنتج أنّ المعادلة (E^*) لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

clicEdition

Scanné avec CamScanner

التمرين الثالث (4 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها $z\neq 0$ النقطة M' لاحقتها z' بحيث: $z'=2\left(1-\frac{1}{z}\right)$.

1) أ) عيّن z_1 و z_2 حلا المعادلة $z'=z$.

ب) أثبت أنّ $z_1^{8n}+z_2^{8n}=2^{4n+1}$ حيث $n\in\mathbb{N}$.

2) نعتبر النقطتين $A(a=1-i)$ و $B(b=1+i)$.

أ) بيّن أنّ $\frac{z'-a}{z'-b}=i\frac{z-a}{z-b}$.

ب) استنتج علاقة بين الزاويتين الموجهتين $\left(\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}\right)$ و $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)$.

ج) عيّن صورة المستقيم (AB) بالتحويل f .

د) عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث: $\left(\overrightarrow{M'B};\overrightarrow{M'A}\right)=k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

التمرين الرابع (6,5 نقاط)

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x}\,e^{1-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) ادرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 وفسّر النتيجة بيانيا.

2) أ) أثبت أنه من أجل كل $x>0$: $f'(x)=\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}e^{1-x}$.

ب) شكل جدول تغيرات f .

3) ارسم بعناية المنحنى (C_f) .

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\int_n^{n+1} f(t)\,dt$.

1) أعط تفسيرًا بيانيًا للعدد u_n .

2) بيّن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $\sqrt{n+1}\,e^{-n}\leq u_n\leq\sqrt{n}\,e^{1-n}$ ثم استنتج أنّ (u_n) متناقصة.

III. لتكن F الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$.

1) أ) أثبت أنه من أجل كل $t\in[0;+\infty[$: $t+1\geq 2\sqrt{t}$.

Scanné avec CamScanner

2) ب) استنتج أنه من أجل كل $x \geq 1$: $F(x) \leq \frac{1}{2}\int_1^x (t+1)e^{1-t}dt$.

3) ج) اعتمادًا على مكاملة بالتجزئة أثبت أنّ: $\int_1^x (t+1)e^{1-t}dt = 3-(2+x)e^{1-x}$ ،

ثم استنتج الحصر $0 \leq F(x) \leq \frac{3}{2}$.

4) من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع: $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

5) أ) أثبت أنّ (S_n) متزايدة.

ب) أثبت أنّ (S_n) متقاربة وأعط حصرًا لنهايتها.

انتهى الموضوع الثاني

clicEditions

Scanné avec CamScanner