متوسطة بحري مختار بسيدي عون

المستوى: 4 متوسّط

المـــراجعـــة

النهائيـ لـ Bem ــة

من إعداد الأستاذ:

- ✓ محمد العربي موساوي.

السنة الدراسية: 2023/2022

الفهـــرس

التمرين 01:

A ، B عددان حيث :

$B = 4\sqrt{24} + \sqrt{96} - \sqrt{600}$ ، $A = \frac{3575}{4225}$

1) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 3575 و 4225 .

2) اكتب $\frac{3575}{4225}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال .

3) احسب بتمعّن العدد P حيث : $P = \frac{3575}{4225} - \frac{5}{13} \div \frac{2}{3}$.

4) اكتب B على شكل $a\sqrt{6}$ حيث a عدد طبيعي .

5) بيّن أن : $\frac{1}{B} = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

التمرين 02:

A و B عددان حقيقيان حيث:

$A = \sqrt{48} - 2\sqrt{27}$ ، $B = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

1) اكتب العدد A على الشكل $a\sqrt{3}$ حيث a عدد نسبي .

2) اكتب B على شكل نسبة مقامها عدد ناطق .

بيّن أنّ C عدد طبيعي حيث : $C = 3B - \frac{1}{2}A$.

التمرين 03:

1) احسب القاسم المشترك الأكبر العددين 567 و 448.

2) اكتب على الشكل $a + b\sqrt{7}$ كلا من العددين:

$A = \sqrt{2} \times \sqrt{8} + \sqrt{448} - \sqrt{567}$

و $B = \sqrt{63} - \sqrt{28} + 4$

3) x عدد حقيقي غير معدوم. أوجد قيم x بحيث:

$$\frac{x}{4+\sqrt{7}} = \frac{4-\sqrt{7}}{x}$$

التمرين 04:

لتكن العبارة F حيث :

$F = (2x+3)(3x-1) - (2x+3)^2$.

1) انشر ثم بسّط العبارة F .

2) حلّل العبارة F إلى جداء عاملين.

3) حل المعادلة: $(2x+3)(x-4) = 0$

4) حل المتراجحة : $2x^2 - 5x - 12 \geq 2x(x-1)$ ، ثمّ مثّل حلولها بيانيا .

التمرين 05:

لتكن العبارة E حيث: $E = (2x-1)^2 + (4x^2-1)$

1) انشر ثم بسّط العبارة E .

2) حلّل إلى جداء عاملين العبارة $4x^2 - 1$ ، ثم استنتج تحليلا للعبارة E .

3) حل المعادلة: $4x(2x-1) = 0$.

التمرين 06:

E عبارة جبرية حيث :

$$E = (4x+1)^2 - (x-2)^2$$

1) انشر و بسّط العبارة E .

2) حلّل العبارة E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى .

حل المعادلة: $(5x-1)(3x+3) = 0$.

التمرين 07:

E عبارة جبرية حيث: $E = (3x+1)^2 - 25$

1) انشر ثم بسّط العبارة E .

2) حلّل العبارة E إلى جداء عاملين .

3) حل المتراجحة: $(3x-4)(3x+6) > 9x^2 - 30$ ، ثمّ مثّل حلولها بيانيا .

التمرين 08:

1) حل الجملة التالية جبريا : $\begin{cases} x + y = 30 \\ 5x + 3y = 114 \end{cases}$

2) تتكون حمولة إحدى الشاحنات من 30 صندوقا وزن البعض منها $20\ kg$ و وزن البعض الآخر $12\ kg$.

علما أن وزن حمولة الشاحنة $456\ kg$.

- عين عدد الصناديق التي وزنها $20\ kg$ و عدد الصناديق التي وزنها $12\ kg$.

(لاحظ أن: $114 \times 4 = 456$)

حل التمرين 01:

1) حساب $PGCD(4225;3575)$

لدينا: $4225 = 3575 \times 1 + 650$

$3575 = 650 \times 5 + \mathbf{325}$

$650 = 325 \times 2 + 0$

ومنه: $\boldsymbol{PGCD(4225;3575) = 325}$

2) كتابة $\frac{3575}{4225}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال:

$$\frac{3575}{4225} = \frac{3575 \div 325}{4225 \div 325} = \frac{11}{13}$$

3) حساب العدد P:

لدينا : $P = \frac{3575}{4225} - \frac{5}{13} \div \frac{2}{3}$.

أي: $P = \frac{11}{13} - \frac{5}{13} \times \frac{3}{2}$

$= \frac{11}{13} - \frac{15}{26}$

$= \frac{11 \times 2}{13 \times 2} - \frac{15}{26}$

$= \frac{22}{26} - \frac{15}{26}$

ومنه: $\boldsymbol{P = \frac{7}{26}}$

4) كتابة B على شكل $a\sqrt{6}$ حيث a عدد طبيعي :

لدينا: $B = 4\sqrt{24} + \sqrt{96} - \sqrt{600}$

أي: $= 4\sqrt{4 \times 6} + \sqrt{16 \times 6} - \sqrt{100 \times 6}$

$= 4\sqrt{4} \times \sqrt{6} + \sqrt{16} \times \sqrt{6} - \sqrt{100} \times \sqrt{6}$

$= 4 \times 2 \times \sqrt{6} + 4 \times \sqrt{6} - 10 \times \sqrt{6}$

$= 8 \times \sqrt{6} + 4 \times \sqrt{6} - 10 \times \sqrt{6}$

$= (8 + 4 - 10)\sqrt{6}$

ومنه: $\boldsymbol{B = 2\sqrt{6}}$

5) تبيان أن : $\frac{1}{B} = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{1 \times \sqrt{6}}{2\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2 \times 6} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

ومنه: $\boldsymbol{\frac{1}{B} = \frac{\sqrt{6}}{12}}$

حل التمرين 02:

1) كتابة العدد A على الشكل $a\sqrt{3}$ حيث a عدد نسبي :

لدينا: $A = \sqrt{48} - 2\sqrt{27}$

أي: $A = \sqrt{16 \times 3} - 2\sqrt{9 \times 3}$

$= 4\sqrt{3} - 2 \times 3\sqrt{3}$

$= 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

ومنه: $\boldsymbol{A = -2\sqrt{3}}$

2) كاتبة B على شكل نسبة مقامها عدد ناطق :

لدينا: $B = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$

أي: $B = \frac{(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$ ومنه: $\boldsymbol{B = \frac{3-\sqrt{3}}{3}}$

3) بيّن أنّ C عدد طبيعي :

لدينا : $C = 3B - \frac{1}{2}A$

أي: $C = 3\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{1}{2}(-2\sqrt{3})$

$= 3\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{1}{2}(-2\sqrt{3})$

$= \mathbf{3} - \sqrt{3} + \sqrt{3}$

ومنه: $\boldsymbol{C = 3}$

تذكّر الكتابة العلمية

مثال:

$A = \frac{0.6 \times (10^3)^2 \times 6 \times 10^{-4}}{9 \times 10^5}$

$= \frac{0.6 \times 6}{9} \times \frac{10^6 \times 10^{-4}}{10^5}$

$= 0.36 \times 10^{6-4-5}$

$= \mathbf{0.36} \times 10^{-3}$

$= \mathbf{3.6 \times 10^{-1}} \times 10^{-3}$

$= \mathbf{3.6 \times 10^{-1-3}}$

ومنه: $A = \mathbf{3.6 \times 10^{-1-3}}$

حل التمرين 03:

1) حساب $PGCD(448;567)$

لدينا: $567 = 448 \times 1 + 119$

$448 = 119 \times 3 + 91$

$119 = 91 \times 1 + 28$

$91 = 28 \times 3 + 7$

$28 = 7 \times 4 + 0$

ومنه: $\boldsymbol{PGCD(448;567) = 7}$

2) كتابة A و B على شكل $a + b\sqrt{7}$:

لدينا: $A = \sqrt{2} \times \sqrt{8} + \sqrt{448} - \sqrt{567}$

أي: $A = \sqrt{16} + \sqrt{64 \times 7} - \sqrt{81 \times 7}$

$= 4 + 8\sqrt{7} - 9\sqrt{7}$

$= 4 + (8-9)\sqrt{7}$

ومنه: $\mathbf{A = 4 - \sqrt{7}}$

و لدينا: $B = \sqrt{63} - \sqrt{28} + 4$

أي: $B = \sqrt{9 \times 7} - \sqrt{4 \times 7} + 4$

$= 3\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 4$

$= (3-2)\sqrt{7} + 4$

$= \sqrt{7} + 4$

ومنه: $\mathbf{B = 4 + \sqrt{7}}$

3) إيجاد قيم x :

لدينا: $\dfrac{x}{4+\sqrt{7}} = \dfrac{4-\sqrt{7}}{x}$

أي: $x \times x = (4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})$

وعليه: $x^2 = 4^2 - \sqrt{7}^2$ أي: $x^2 = 16 - 7$

ومنه: $x^2 = 9$

هذا يعني أن: $x = \sqrt{9} = 3$ أو $x = -\sqrt{9} = -3$

و منه للمعادلة حلان هما 3 و -3

حل التمرين 04:

1) نشر ثم تبسيط العبارة F .

لدينا: $F = (2x+3)(3x-1) - (2x+3)^2$

$= 6x^2 - 2x + 9x - 3 - (2x+3)^2$

$= 6x^2 + 7x - 3 - [(2x)^2 + 2(2x) \times 3 + 3^2]$

$= 6x^2 + 7x - 3 - (4x^2 + 12x + 9)$

$= \boldsymbol{6x^2} + \boldsymbol{7x} - 3 - \boldsymbol{4x^2} - \boldsymbol{12x} - 9$

$= \boldsymbol{6x^2} - \boldsymbol{4x^2} + \boldsymbol{7x} - \boldsymbol{12x} - 3 - 9$

ومنه: $\boldsymbol{F = 2x^2 - 5x - 12}$

2) تحليل العبارة F إلى جداء عاملين.

لدينا: $F = (2x+3)(3x-1) - (2x+3)^2$

$= \boldsymbol{(2x+3)}(3x-1) - \boldsymbol{(2x+3)}(2x+3)$

$= \boldsymbol{(2x+3)}[(3x-1) - (2x+3)]$

$= \boldsymbol{(2x+3)}[3x - 1 - 2x - 3]$

ومنه: $\boldsymbol{F = (2x+3)(x-4)}$

3) حل المعادلة: $\boldsymbol{(2x+3)(x-4) = 0}$

لدينا $(2x+3)(x-4) = 0$

معناه $2x + 3 = 0$ أو $x - 4 = 0$

أي $2x = -3$ أو $x = 4$

أي $x = \dfrac{-3}{2}$ أو $x = 4$

إذن للمعادلة حـــلان هما $\dfrac{-3}{2}$ و 4

4) حل المتراجحة :

$2x^2 - 5x - 12 \geq 2x(x-1)$ ،

ثمّ تمثيل حلولها بيانيا .

لدينا $2x^2 - 5x - 12 \geq 2x(x-1)$

أي: $2x^2 - 5x - 12 \geq 2x^2 - 2x$

$\boldsymbol{2x^2 - 2x^2} - 5x + 2x \geq 12$

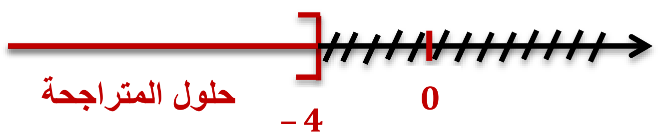
$-3x \geq 12$

وعليه: $x \leq \dfrac{12}{-3}$

ومنه: $x \leq -4$

إذن حلول المتراجحة هي كل الأعداد x
الأصغر أو تساوي -4

التمثيل البياني لحلول المتراجحة:



حل التمرين 05:

1) نشر ثم تبسيط العبارة E .

لدينا: $E = (2x-1)^2 + (4x^2-1)$

$= [(2x)^2 - 2(2x)\times 1 + 1^2] + (4x^2-1)$

$= \mathbf{4x^2 - 4x + 1} + 4x^2 - 1$

$= \mathbf{4x^2} + 4x^2 \mathbf{- 4x + 1} - 1$

ومنه: $E = 8x^2 - 4x$

2) التحليل إلى جداء عاملين العبارة $4x^2 - 1$

لدينا: $4x^2 - 1 = (2x)^2 - (1)^2$

$= (2x-1)(2x-1)$

-استنتاج تحليلا للعبارة E

لدينا: $E = (2x-1)^2 + (4x^2-1)$

أي: $E = (2x-1)^2 + (2x-1)(2x-1)$

$= (2x-1)[(2x-1) + (2x+1)]$

$= (2x-1)(2x-1+2x+1)$

$= (2x-1)(4x)$

ومنه: $E = 4x(2x-1)$

3) حل المعادلة: $4x(2x-1) = 0$.

لدينا $4x(2x-1) = 0$

معناه $4x = 0$ أو $2x - 1 = 0$

أي $x = \frac{0}{4}$ أو $2x = 1$

أي $x = 0$ أو $x = \frac{1}{2}$

إذن للمعادلة حـــلان هما 0 و $\frac{1}{2}$

حل التمرين 06:

1) نشر ثم تبسيط العبارة E .

لدينا: $E = (4x+1)^2 - (x-2)^2$

$= 16x^2 + 8x + 1 - (x^2 - 4x + 4)$

$= 16x^2 + 8x + 1 - x^2 + 4x - 4$

$= 16x^2 - x^2 + 8x + 4x + 1 - 4$

ومنه: $E = 15x^2 + 12x - 3$

2) تحليل العبارة E إلى جداء عاملين العبارة :

لدينا: $E = (4x+1)^2 - (x-2)^2$

$= [(4x+1) + (x-2)][(4x+1) - (x-2)]$

$= (4x+1+x-2)(4x+1-x+2)$

ومنه: $E = (5x-1)(3x+3)$

3) حل المعادلة: $(5x-1)(3x+3) = 0$.

لدينا $(5x-1)(3x+3) = 0$

معناه $3x + 3 = 0$ أو $5x - 1 = 0$

أي $3x = -3$ أو $5x = 1$

أي $x = \frac{-3}{3} = -1$ أو $x = \frac{1}{5}$

إذن للمعادلة حـــلان هما -1 و $\frac{1}{5}$

حكمة:

من جد وجد ومن زرع حصد

حل التمرين 07:

1) نشر ثم تبسيط العبارة E .

لدينا: $E = (3x+1)^2 - 25$

$= \left[(3x)^2 + 2(3x)\times 1 + 1^2\right] - 25$

$= 9x^2 + 6x + 1 - 25$

ومنه: $E = 9x^2 + 6x - 24$

2) تحليل العبارة E إلى جداء عاملين.

لدينا: $E = (3x+1)^2 - 25$

$E = (3x+1)^2 - (5)^2$

$= [(3x+1) - 5][(3x+1) + 5]$

$= (3x+1-5)(3x+1+5)$

ومنه: $E = (3x-4)(3x+6)$

3) حل المتراجحة : $(3x-4)(3x+6) > 9x^2 - 30$

لدينا $(3x-4)(3x+6) = (3x+1)^2 - 25$

$= 9x^2 + 6x - 24$

وعليه: $9x^2 + 6x - 24 > 9x^2 - 30$

أي: $9x^2 - 9x^2 + 6x > -30 + 24$

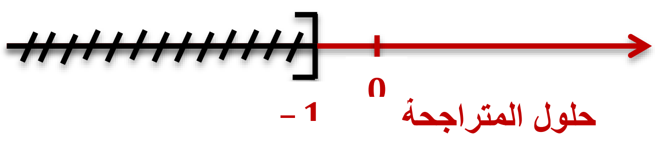
$6x > -6$

وبالتالي: $x > \frac{-6}{6}$

ومنه: $x > -1$

إذن حلول المتراجحة هي كل الأعداد x الأكبر تماما من -1

التمثيل البياني لحلول المتراجحة:



حل التمرين 08:

1) حل الجملة التالية:

$$\begin{cases} x + y = 30 & \dots\dots(1) \\ 5x + 3y = 114 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

نضرب طرفي المعادلة (1) في العدد -3 :

فنحصل على : $\begin{cases} -3x - \cancel{3y} = -90 \\ 5x + \cancel{3y} = 114 \end{cases}$

ثم نجمع طرفي المعادلتين طرفا إلى طرف

نجد : $-3x + 5x = -90 + 114$

أي : $2x = 24$

و عليه: $x = \frac{24}{2}$ و منه : $x = 12$

نعوض قيمة x في المعادلة (1)

نجد: $12 + y = 30$

أي : $y = 30 - 12$ و منه: $y = 18$

2) ليكن x عدد الصناديق التي وزنها $20\ kg$

و y عدد الصناديق التي وزنها $12\ kg$

- بما أن عدد الصناديق في الشاحنة 30

فإن : $x + y = 30$

- و حمولة الشاحنة هي: $20x + 12y = 456$

نحصل هكذا على الجملة: $\begin{cases} x + y = 30 \\ 20x + 12y = 456 \end{cases}$

بقسمة طرفي المعادلة الثانية على العدد 4 نحصل على الجملة:

$\begin{cases} x + y = 30 \\ 5x + 4y = 114 \end{cases}$ المعرّفة في السؤال الأول و التي حلّها $(12;18)$

إذن عدد الصناديق التي وزنها $20\ kg$ هو **12 صندوقا** .

و عدد الصناديق التي وزنها $12\ kg$ هو **18 صندوقا** .

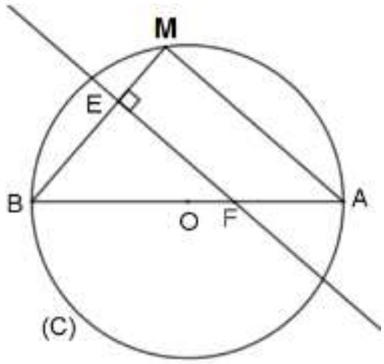
التمرين 09: من ش- ت - م

الشّكل المقابل غير مرسوم بالأبعاد الحقيقية .

(C) دائرة مركزها O و قطرها [AB]

حيث: $AB = 10cm$

M نقطة من (C) حيث : $BM = 6cm$



1) بيّن نوع المثلث MBA ثمّ احسب الطول AM .

2) احسب قيس الزاوية $\widehat{MBA}$

ثم أعط مدور النتيجة إلى الوحدة بالدرجة .

3) E نقطة من $[BM]$ حيث $BE = 4{,}2cm$.

المستقيم الذي يشمل E ويعامد (BC) يقطع $[AB]$ في النقطة F. أحسب الطول BF .

التمرين 10:

الشكل المقابل غير مرسوم بأبعاده الحقيقية بحيث :

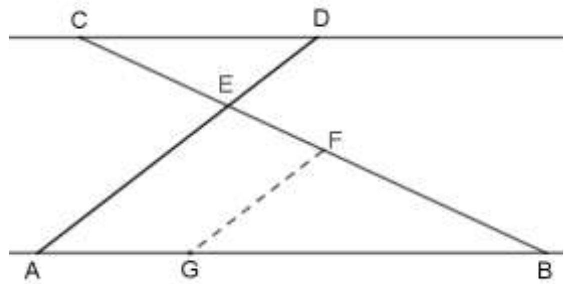
$(AB)//(CD)$ و $AB = 20$; $EB = 16$;

$EA = 10$; $ED = 6$.

1) احسب EC و CD .

2) إذا علمت أن : $BF = 12{,}8$ و أن: $BG = 16$.

- برهن أن: $(FG)//(EA)$.



التمرين 11: من ش- ت - م

وحدة الطول المختارة هي السنتيمتر BEM مثلث قائم في B حيث $BE = 4{,}8$ و $\tan \widehat{M} = \frac{4}{3}$.

1) احسب الطولين: BM و ME .

2) K نقطة من القطعة $[EM]$ بحيث: $EK = 2$ و L نقطة من القطعة $[BE]$ بحيث: $EL = 1{,}6$.

- أثبت أن المستقيمين (BM) و (KL) متوازيان .

التمرين 12:

$ABCD$ متوازي أضلاع ، O نقطة تقاطع قطريه $[AC]$ و $[BD]$.

1) أنشئ النقطة N صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$

2) ما نوع الرباعي $BNCD$ ؟ علّل.

3) بالاعتماد على الشكل انقل ثمّ اتمم ما يلي:

$$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CO} = \cdots$$

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \cdots$$

$$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA} = \cdots$$

التمرين 13:

المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس$(O;\vec{i};\vec{j})$

1) علم النقط $A(6\,;\,3)$ ، $B(2\,;-3)$ ، $C(-4\,;\,1)$

2) أ) احسب أعط القيمة المضبوطة للطول AB .

ب) علما أن: $AC = \sqrt{104}$ و $BC = \sqrt{52}$ ، بيّن أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين .

3) احسب احداثيتي النقطة M مركز الدائرة (K) المحيطة بالمثلث ABC .

4) أنشئ النقطة D صورة النقطة M بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BM}$،ثمّ عيّن حسابيا احداثييها.

5) أثبت أنّ $ABCD$ مربع.

حل التمرين 09: من ش - ت - م

1) تبيان نوع المثلث MBA :

بما أن المثلث MBA محاط بالدائرة (C) و الضلع [AB] قطر لهذه الدائرة فإن المثلث MBA قائم في M .

- حساب الطول AM :

لدينا فإن المثلث MBA قائم في M فحسب خاصية فيثاغورس فإنّ: $AB^2 = AM^2 + BM^2$

أي : $10^2 = AM^2 + 6^2$

$100 = AM^2 + 36$

وعليه : $AM^2 = 100 - 36 = 64$

أي : $AM = \sqrt{64} = 8$

ومنه طول AM هو $8\ cm$

2) حساب قيس الزاوية $\widehat{MBA}$:

لدينا فإن المثلث MBA قائم في M فإنّ:

$\cos \widehat{MBA} = \frac{BM}{AB}$ أي $\cos \widehat{MBA} = \frac{6}{10} = 0.6$

وباستعمال الحاسبة نجد: $\widehat{MBA} \approx 53°.13$

وبالتدوير إلى الوحدة من الدرجة نجد: $\widehat{MBA} \approx 53$

3) حساب الطول BF :

لدينا: $\begin{cases} (AM) \perp (MB) \\ \text{و} \\ (FE) \perp (MB) \end{cases}$ فإنّ : $(FE)//(AM)$

فحسب خاصية طالس فإن: $\frac{BF}{BA} = \frac{BE}{BM} = \frac{FE}{AM}$

بالتعويض نجد: $\frac{BF}{10} = \frac{4.2}{6} = \frac{FE}{8}$

لإيجاد الطول BF نحتفظ بالمساواة التالية: $\frac{BF}{10} = \frac{4.2}{6}$

وعليه: $BF = \frac{4.2 \times 10}{6}$ ومنه: $BF = 7\ cm$

حل التمرين 10:

1) حساب EC و CD :

بما أن $(AB)//(CD)$ و حسب خاصية طالس

فإن : $\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{CD}$

بالتعويض نجد : $\frac{10}{6} = \frac{16}{EC} = \frac{20}{CD}$

لحساب الطول EC نحتفظ بالمساواة التالية : $\frac{10}{6} = \frac{16}{EC}$

أي : $EC = \frac{16 \times 6}{10} = 9.6$ و منه: $EC = 9.6$

لحساب الطول CD نحتفظ بالمساواة التالية : $\frac{10}{6} = \frac{20}{CD}$

أي : $CD = \frac{20 \times 6}{10} = 12$ و منه: $CD = 12$

2) نبرهن أن $(FG)//(EA)$:

نحسب النسبتين $\frac{BF}{BE}$ و $\frac{BG}{BA}$:

أي: $\frac{BF}{BE} = \frac{12.8}{16}$ و $\frac{BG}{BA} = \frac{16}{20}$ و لدينا :

$20 \times 12.8 = 256$ و $16 \times 16 = 256$

إذن: $\frac{BF}{BE} = \frac{BG}{BA}$ و لدينا النقاط B ، F ، E من جهة و

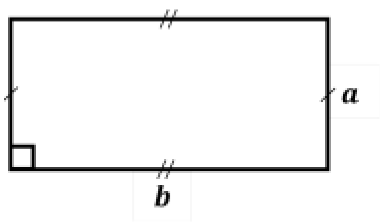
النقاط: B ، G ، A *من جهة أخرى في استقامية*

و بنفس إذن حسب خاصية طالس العكسية

نقول أن: $(FG)//(EA)$

تــذكـيــر:

المستطيل



المحيط P: $P = 2(a + b)$

المساحة A : $A = a \times b$

حل التمرين 11: من ش - ت - م

1) حساب الطولين: BM و ME .

لدينا فإن المثلث EBM قائم في B فإنّ:

$\tan \widehat{M} = \frac{EB}{BM}$ أي $\frac{4}{3} = \frac{4.8}{BM}$

وعليه : $BM = \frac{3\times 4.8}{4}$ ومنه: $BM = 6$

وبتطبيق خاصية فيثاغورس على المثلث EBM

نجد: $EM^2 = EB^2 + BM^2$

$EM^2 = (4.8)^2 + (3.6)^2$

وعليه : $EM^2 = 36$

$EM = \sqrt{36}$

ومنه : $EM = 6$

3) إثبات أن $(KL)//(MB)$:

نحسب النسبتين $\frac{EM}{EK}$ **و** $\frac{EB}{EL}$:

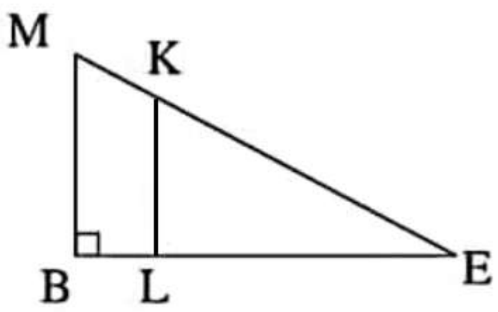
أي: $\frac{EM}{EK} = \frac{6}{2} = 3$ **و** $\frac{EB}{EL} = \frac{4.8}{1.6} = 3$

إذن: $\frac{EB}{EL} = \frac{EM}{EK}$ **و لدينا النقاط** M ، K ، E **من جهة**

و النقاط: B ، L ، E ***من جهة أخرى في استقامية و***

بنفس الترتيب إذن حسب خاصية طالس العكسية نقول

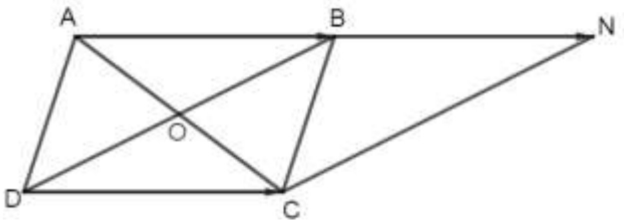
أن: $(KL)//(MB)$



الشكل غير مطلوب

حل التمرين 12:

1) أنشاء النقطة N صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$



2) تحديد نوع الرباعي $BNCD$.

بما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فإنّ: **(1) ....**

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

ولدينا النقطة N صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$

معناه: **(2) ....** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN}$

من **(1)** و **(2)** نستنتج أنّ : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BN}$ إذن فالرباعي $BNCD$ متوازي أضلاع .

3)

$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{DO}$ **(طبقنا علاقة شال)**

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ ($\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{BC}$ شعاعان متعاكسان)

"طبقنا علاقة شال"

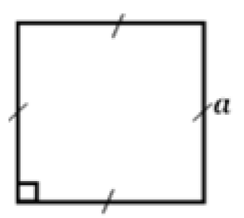
$$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{BC}$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}_{\text{" طبقنا قاعدة متوازي الأضلاع"}}$$

ومنه: $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BD}$

تـذكـيـر:

المربع:



المحيط P: $P = 4 \times a$

المساحة A : $A = a \times a = a^2$

حل التمرين 13:

1) تعليم النقط $A(6\,;\,3)$ ، $B(2\,;-3)$ ، $C(-4\,;\,1)$:

2) أ) حساب القيمة المضبوطة للطول AB .

لدينا: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

أي: $AB=\sqrt{(2-6)^2+(-3-3)^2}$

$=\sqrt{(-4)^2+(-6)^2}$

$=\sqrt{16+36}$

ومنه: $\boldsymbol{AB=\sqrt{52}}$

ب) تبيان أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين .

نقارن بين AB^2+BC^2 و AC^2

لديناً : $AB^2+BC^2=\sqrt{52}^2+\sqrt{52}^2$

$AB^2+BC^2=52+52=104$

و $AC^2=\sqrt{104}^2=104$

أي: $AC^2=AB^2+BC^2$

ومنه المثلث ABC قائم في B حسب خاصية فيثاغورس العكسية

لكن: $AB=BC$ إذن المثلث قائم في B ومتساوي الساقين.

3) حساب احداثيتي النقطة M مركز الدائرة (K) المحيطة بالمثلث ABC :

بما أن الدائرة (K) محيطة بالمثلث ABC القائم في B

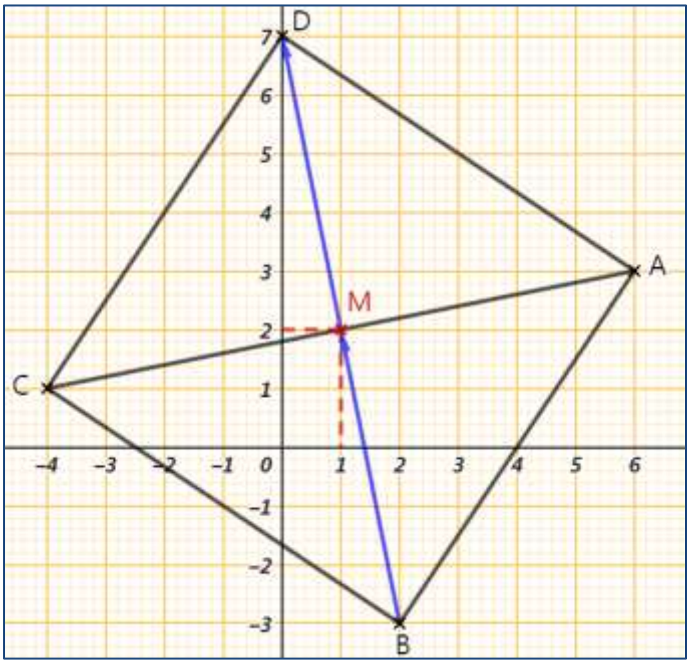
فإن الوتر $[AC]$ هو قطر للدائرة (K) .

ولدينا النقطة M هي مركز الدائرة (K)

إذن M منتصف الوتر $[AC]$.

وبالتالي: $M\left(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\,\frac{y_A+y_C}{2}\right)$

أي: $M\left(\frac{6+(-4)}{2}\,;\,\frac{3+1}{2}\right)$ ومنه: $\boldsymbol{M(1;2)}$



4) أنشاء النقطة D صورة النقطة M بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BM}$، ثمّ حساب احداثييها.

النقطة D صورة النقطة M بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BM}$

معناه : $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BM}$

نحسب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{BM}$: لدينا: $\overrightarrow{BM}\binom{x_M-x_B}{y_M-y_B}$

أي: $\overrightarrow{BM}\binom{1-2}{2-(-3)}$ ومنه: $\overrightarrow{BM}\binom{-1}{5}$

نفرض أنّ: $D(x;y)$ ومنه: $\overrightarrow{MD}\binom{x-1}{y-2}$

لدينا : $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BM}$ يعني أنّ: $\begin{cases}x-1=-1\\ y-2=5\end{cases}$

أي: $\begin{cases}x=-1+1\\ y=5+2\end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases}x=0\\ y=7\end{cases}$ ومنه: $\boldsymbol{D(0;7)}$

5) إثبات أنّ $ABCD$ مربع:

لدينا : $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$ معناه النقطة: M منتصف $[BD]$.

و لدينا أيضا النقطة: M منتصف $[AC]$.

إذن قطرا الرباعي $ABCD$ متناصفان في النقطة M

معناه $ABCD$ متوازي أضلاع و فيه الزاوية $\hat{B}$ قائمة

و $AB=BC=\sqrt{52}$ (ضلعان متتاليان متقايسان)

إذن فهو **مربّع** .

التمرين 14:

خطية حيث: $h(2) = -5$

1) أوجد العبارة الجبرية للدالة h .
2) احسب $h(5)$ ، $h(-\frac{2}{5})$.
3) أوجد العدد x_1 حيث $h(x_1) = -10$

التمرين 15:

f دالة تآلفية حيث: $f(x) = 6 - 3x$

1) عيّن معاملي الدالة f .
2) احسب صورة كل عدد مما يلي: 0 ، 2 و $\frac{1}{3}$
3) عيّن العدد الذي صورته هي 0 بالدالة f

التمرين 16: من ش- ت - م

f دالة تآلفية تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ يشمل النقطتين $A(2;5)$ و $B(-1;-4)$.

1) بيّن أن العبارة الجبرية للدالة التآلفية f هي: $f(x) = 3x - 1$.
2) لتكن النقطة $C\left(4;\ 11\right)$ من المستوي، هل النقط C ، B ، A على استقامة واحدة؟
3) أوجد العدد الذي صورته 29 بالدالة f.

التمرين 17: من ش- ت - م

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) علم النقطتين $A(0\ ;\ 4)$ ، $B(1\ ;\ 0)$.
2) حدد العبارة الجبرية للدالة التآلفية f التي تمثيلها البياني هو المستقيم (AB).
3) ليكن المستقيم (Δ) التمثيل البياني للدالة g حيث : $g(x) = \frac{2}{3}x + 2$

- أنشئ (Δ).
- أوجد إحداثيي M نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و (Δ)

حل التــمرين :14

1) إيجاد العبارة الجبرية للدالة الخطية h .

لدينا $h(2) = -5$

فإن $a = \frac{h(2)}{2} = \frac{-5}{2} = -2.5$

وعليه: $h(x) = -2.5x$

2) احسب $h(5)$ ، $h(-\frac{2}{5})$.

لدينا: $h(x) = -2.5x$

وعليه: $h(5) = -2.5 \times 5 = -12.5$

$h\left(-\frac{2}{5}\right) = -2.5 \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{5}{5} = 1$

3) إيجاد العدد x_1 :

بما أن: $f(x_1) = -10$ فإن: $x_1 = \frac{f(x_1)}{a}$

وعليه: $x_1 = \frac{-10}{-2.5} = 4$

حل التــمرين :15

1) تعيين معاملي الدالة f .

لدينا $f(x) = 6 - 3x$

معاملي الدالة التآلفية f هما $a = -3$ و $b = 6$.

2) حساب صورة كل عدد مما يلي: 0 ، 2 و $\frac{1}{3}$

$f(\mathbf{0}) = 6 - 3 \times \mathbf{0} = 6$

$f(\mathbf{2}) = 6 - 3 \times \mathbf{2} = 6 - 6 = 0$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = 6 - 3 \times \frac{1}{3} = 6 - 1 = 5$

3) تعيين العدد الذي صورته هي 0 بالدالة f :

بوضع $f(x) = 0$ لدينا $6 - 3x = 0$

أي: $-3x = -6$ ومنه : $x = \frac{-6}{-3} = 2$

وبالتالي العدد الذي صورته 0 بالدالة f هو 2 .

حل التــمرين :16 من ش - ت - م

1) تبيان أن $f(x) = 3x - 1$:

الدالة التآلفية f تكتب من الشكل $f(x) = ax + b$

حساب a :

بما أن التمثيل البياني للدالة f يشمل النقطتين

$A(2;5)$ و $B(-1;-4)$ فإن : $f(2) = 5$ و $f(-1) = -4$.

و عليه: $a = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{5-(-4)}{2-(-1)} = \frac{9}{3} = 3$

إذن: $f(x) = 3x + b$

حساب b :

لدينا $f(2) = 5$

هذا يعني أن: $f(\mathbf{2}) = 3 \times \mathbf{2} + b = 5$

نحل المعادلة ذات المجهول b : $3 \times \mathbf{2} + b = 5$

أي: $6 + b = 5$ ومنه: $b = 5 - 6 = \mathbf{-1}$

وعليه: $\boldsymbol{f(x) = 3x - 1}$.

2) معرفة هل النقط C ، B ، A على استقامة واحدة:

بما أن : $f(\mathbf{4}) = 3 \times \mathbf{4} - 1 = 12 - 1 = 11$

وعليه النقطة C تنتمي إلى المستقيم (AB) إذن فالنقط

C ، B ، A على استقامة واحدة .

3) إيجاد العدد الذي صورته 29 بالدالة f :

لدينا $f(x) = 29$ ومنه: $3x - 1 = 29$

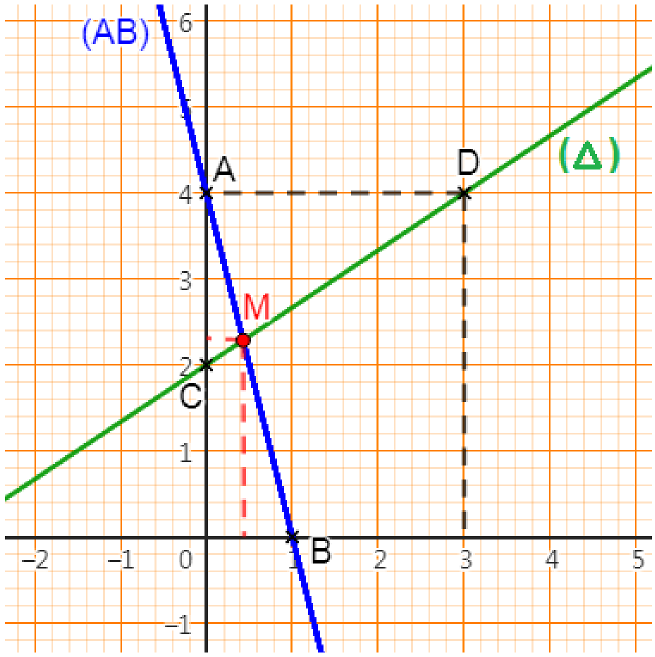
أي: $3x = 29 + 1$ وعليه: $3x = 30$

أي: $x = \frac{30}{3} = 10$

وبالتالي العدد الذي صورته 29 بالدالة f هو **10** .

حل التمرين 17: من ش - ت - م

1)تعليم النقطتين $A(0\,;\,4)$ ، $B(1\,;\,0)$:



2)تحديد العبارة الجبرية للدالة التآلفية f التي تمثيلها البياني هو المستقيم (AB).

الدالة التآلفية f تكتب من الشكل $f(x) = ax + b$

حساب a :

بما أن التمثيل البياني للدالة f يشمل النقطتين $A(0;4)$ و $B(1;0)$ فإن : $f(0) = 4$ و $f(1) = 0$. و عليه:

$$a = \frac{f(0)-f(1)}{0-1} = \frac{4-0}{0-1} = \frac{4}{-1} = -4$$

إذن: $f(x) = -4x + b$

حساب b :

لدينا $f(0) = 4$

هذا يعني أن: $f(\mathbf{0}) = -4 \times \mathbf{0} + b = 4$

نحل المعادلة ذات المجهول b : $-4 \times \mathbf{0} + b = 4$

أي: $b = 4$.

إذن العبارة الجبرية للدّالة التآلفية f

هي : $f(x) = -4x + 4$.

3) ليكن المستقيم (Δ) التمثيل البياني للدالة g

حيث : $g(x) = \frac{2}{3}x + 2$

- جدول مساعد لإنشاء المستقيم (Δ) :

x	0	3
y	2	4
النقطة	$C(0\,;\,2)$	$D(3\,;\,4)$

المستقيم (Δ) يشمل النقطتين $C(0\,;\,2)$ و $D(3\,;\,4)$.

-لإيجاد إحداثيي M نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و (Δ)

نحل المعادلة: $g(x) = f(x)$

أي: $\frac{2}{3}x + 2 = -4x + 4$

$$\frac{2}{3}x + 4x = 4 - 2$$

$\frac{14}{3}x = 2$ و عليه: $x = 2 \times \frac{3}{14} = \frac{6}{14}$

ومنه: $x = \frac{3}{7}$

لنحسب y : $y = -4x + 4$ أي $y = -4\left(\frac{3}{7}\right) + 4$

$$y = \frac{-12}{7} + 4$$

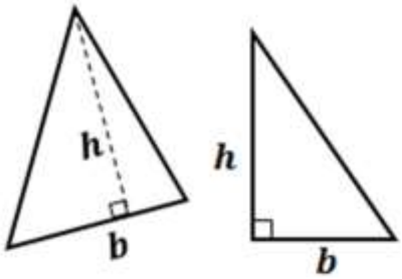
$$y = \frac{-12}{7} + \frac{28}{7}$$

ومنه: $y = \frac{16}{7}$

وعليه: $M(\frac{3}{7}\,;\,\frac{16}{7})$ أي $M(0.4\,;2.3)$

تـذكـيـر:

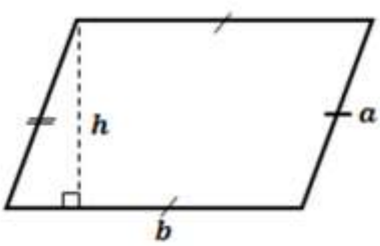
المثلث:



المحيط P: $P =$ مجموع الأضلاع

المساحة A : $A = \frac{b \times h}{2}$

متوازي الأضلاع:



المحيط P: $P = 2(a+b)$

المساحة A : $A = b \times h$

وضعية 01 : من ش - ت - م

I) لِعَمِّي أحمد قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها $1000\ \text{m}^2$ و عرضها خمسي $\left(\frac{2}{5}\right)$ طولها ،

- أوجد بُعْدي هذه القطعة.

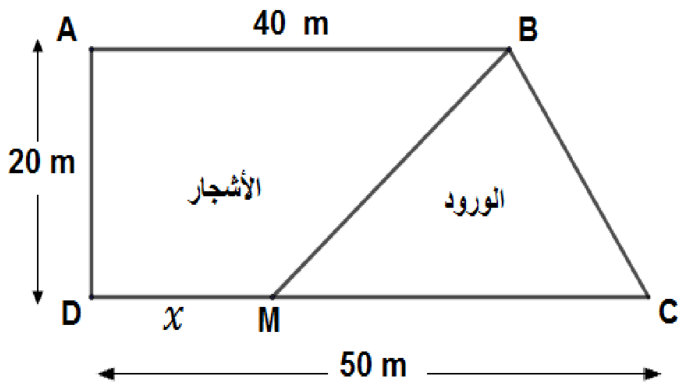
II) تنازل عَمِّي أحمد لأخيه عن جزء من هذه القطعة مساحتها $100\ \text{m}^2$ وخصّص الجزء الباقي منها لاستغلاله مشتلة للورود والأشجار. لهذا الغرض قسّم هذا الجزء عشوائيًا الى قطعتين كما هو موضّح في الشكل:

نضع $DM = x$

(M نقطة من $[DC]$ مع $0 \leq x \leq 50$)

لتكن $f(x)$ مساحة المثلث BCM

و $g(x)$ مساحة القطعة $ABMD$



1) أ – عبّر عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة x .

ب – سَاعِدْ عَمِّي أحمد لإيجاد الطول DM حتى تكون لقطعتي الأرض نفس المساحة .

2) أ- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

مثّل بيانيًا الدالتين : $f(x) = 500 - 10x$ ، $g(x) = 10x + 400$.

نأخذ: 1cm على محور الفواصل يمثِّل 2m، 1cm على محور التراتيب يمثِّل $50\ \text{m}^2$

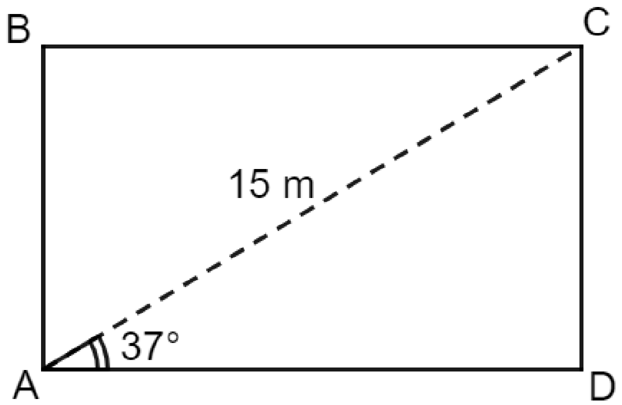
ب-فسّر بيانيًا مساعدتك السابقة لعَمِّي أحمد، مع تحديد قيمة المساحة في هذه الحالة .

وضعية 02 :

1) الشكل المقابل يمثّل أرضية متجر مستطيلة الشكل طول قطرها $15\ m$.

- احسب مساحة أرضية المتجر.

ملاحظة: تعطى النتائج مدورة إلى الوحدة.



2) يريد صاحب المتجر تبليط هذه الأرضية .

- يباع البلاط في صناديق يحتوي كل منها على 2 متر مربع من البلاط.
- أجرة البنّاء $700\ DA$ للمتر المربع الواحد.
- صاحب المتجر يملك $140\ 400\ DA$.

إذا علمت أنّ ثمن الصندوق الواحد يتراوح بين $900\ DA$ و $1400\ DA$ ،

فما هو أكبر ثمن ممكن للصندوق الواحد حتى لا تتجاوز تكلفة تبليط الأرضية المبلغ الذي يملكه صاحب المتجر.

حل الوضعية 01 : من ش - ت - م

I) إيجاد بعدي القطعة:

بفرض طول القطعة هو x فإن عرضها هو $\frac{2}{5}x$. وبما أن مساحتها $1000\ m^2$ فإن: $x\left(\frac{2}{5}x\right) = 1000$

وبالتالي: $\frac{2}{5}x^2 = 1000$ و عليه: $x^2 = 1000 \times \frac{5}{2} = 2500$ بما أن الطول موجب فإن: $x = \sqrt{2500} = 50$

أي: $\frac{2}{5} \times 50 = 20$ بالتالي طول قطعة هو $\boldsymbol{50\ m}$ وعرضها $\boldsymbol{20\ m}$

II)

1) أ – التعبير عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة x .

$$f(x) = \frac{CM \times AD}{2} = \frac{20(50-x)}{2} = \boldsymbol{500 - 10x}$$

$$g(x) = (1000 - 100) - f(x)$$
$$= 900 - (500 - 10x)$$
$$= 900 - 500 + 10x$$

ومنه: $\boldsymbol{g(x) = 10x + 400}$

ملاحظة: يمكن التعبير عن $g(x)$ باستعمال قانون مساحة شبه منحرف

ب – مُسَاعدة عَمّي أحمد لإيجاد الطول DM حتى تكون لقطعتي الأرض نفس المساحة :

لقطعتي الأرض نفس المساحة تعني: $g(x) = f(x)$

أي: $10x + 400 = 500 - 10x$

$10x + 10x = 500 - 400$

وعليه: $20x = 100$ ومنه: $x = \frac{100}{20} = 5$

وبالتالي حتى تكون لقطعتي الأرض نفس المساحة يجب أن يكون $\boldsymbol{DM = 5\ m}$

2) أ- لتمثيل الدالتين : $g(x) = 10x + 400$ و $f(x) = 500 - 10x$

نستعين بالجدولين الآتيين:

x	0	5
$f(x)$	**500**	**450**
النقطة	$(0; 500)$	$(5; 450)$

x	0	5
$g(x)$	**400**	**450**
النقطة	$(0; 400)$	$(5; 450)$

التمثيل البياني:

ب-التفسير البياني للمساعدة السابقة لعَمّي أحمد، مع تحديد قيمة المساحة في هذه الحالة :

التمثيلان البيانيان يتقاطعان في نقطة ذات الاحداثيات $(5; 450)$

وعليه:

عندما يكون $DM = 5m$ تتساوى المساحتان وتكون قيمة الواحدة $450\ m^2$

حل الوضعية 02 :

1) حساب مساحة أرضية المتجر :

لتكن S مساحة أرضية المتجر المستطيلة الشكل

أي: $S = AD \times DC$

أولا: نحسب طول المستطيل:

بما أن DAC مثلث قائم في D فإن: $cos\widehat{DAC} = \frac{AD}{AC}$

أي: $cos37° = \frac{AD}{15}$

ومنه: $AD = 15 \times cos37° = 11.9 \dots\dots$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد طول المستطيل يساوي: $12\ m$

ثانيا: نحسب عرض المستطيل :

نطبق خاصية فيثاغورس على المثلث القائم DAC نجد:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

أي: $15^2 = 12^2 + DC^2$

$$225 = 144 + DC^2$$

$$DC^2 = 225 - 144 = 81$$

و عليه: $DC = \sqrt{81} = 9$

ومنه عرض المستطيل يساوي $9\ m$

ملاحظة : يمكن استعمال النسبة المثلثية sin أو tan لإيجاد الطول DC

و عليه: $S = 12 \times 9 = 108$

ومنه مساحة أرضية المتجر هي $108\ m^2$

2) إيجاد أكبر ثمن ممكن للصندوق الواحد حتى لا تتجاوز تكلفة تبليط الأرضية المبلغ الذي يملكه صاحب المتجر:

أولا: نحسب عدد الصناديق:

$$108 \div 2 = 54$$

عدد الصناديق يساوي 54

ثانيا: نحسب أجرة البناء:

$$108 \times 700 = 75600$$

أجرة البناء هي $75600\ DA$

-نفرض أن x هو الصندوق الواحد

تكلفة تبليط الأرضية: $54x + 75600$

لمعرفة القيمة التي لا يجب أن يتجاوزها الصندوق الواحد حتى لا تزيد تكلفة تبليط الأرضية المبلغ المخصص لها نحل المتراجحة التالية: $54x + 75600 \leq 140\ 400$

أي: $54x \leq 140\ 400 - 75600$

$$54x \leq 140\ 400 - 75600$$

و عليه: $54x \leq 64800$

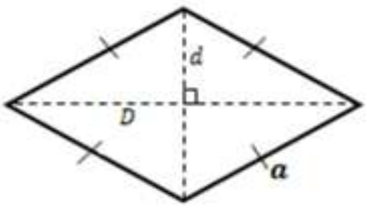
أي: $x \leq \frac{64800}{54}$ ومنه: $x \leq 1200$

نلاحظ أن $900 \leq 1200 \leq 1400$

إذن أكبر ثمن ممكن للصندوق الواحد هو 1200 حتى لا تتجاوز تكلفة تبليط الأرضية المبلغ الذي يملكه صاحب المتجر و المقدّر بـ 140 400.

تـذكـيـر:

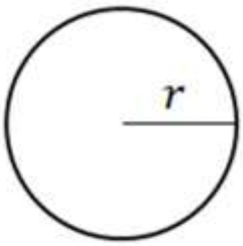
المعين:



المحيط P: $P = 4 \times a$

المساحة A : $A = \frac{D \times d}{2}$

الدائرة و القرص:

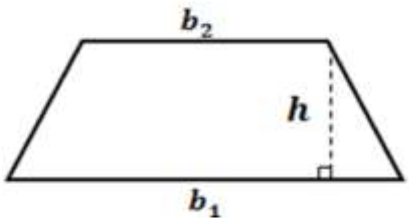


المحيط P: $P = 2 \times r \times \pi$

المساحة A : $A = r^2 \times \pi$

حيث: $\pi \approx 3,14$

شبه المنحرف



المحيط P: $P =$ مجموع الأضلاع

المساحة A : $A = \frac{(b_1 + b_2) \times h}{2}$

تذكيـــــــــــر:

قيس الزاوية المحيطية = نصف قيس الزاوية المركزية

التي تحصر معها نفس القوس من نفس الدائرة

الأستاذ: محمد العربي موساوي

في نهاية العمل المقدّم نرجو من الله عزّ وجل أن يقبل منّا نياتنا

ويصوّب جهدنا ويجعلنا ممّن يفيدون ويستفيدون إنّه على ذلك قدير وبالإجابة جدير .