



الرابعة متوسط



$$E=mc^2$$

الرياضيات

ملخص شامل

الأستاذ عباسي للرياضيات



ABC

للحصول على كسر غير قابل للاختزال مباشرة بعد عملية
اختزال واحدة ، تتبع الخطوات التالية :

- (1) نحسب PGCD لكل من البسط والمقام
- (2) نقسم كلا من البسط والمقام على PGCD
- (3) نتحقق كلا من البسط والمقام لكسر المختزل انهما عددان اوليان فيما بينهما .

مثال : اختزل الكسر $\frac{60}{45}$ ليصبح كسر غير قابل للاختزال

بعد اتباع الخطوات السابقة نجد أن : $PGCD(60 ; 45) = 15$

ومنه : $\frac{60}{45} = \frac{4 \times 15}{3 \times 15} = \frac{4}{3}$ وبما أن : $PGCD(4 ; 3) = 1$ فإن : $\frac{4}{3}$ غير قابل للاختزال .

تذكير بالمكتسبات القبلية

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k} = \frac{a+b}{k}$$

$$\frac{a}{k} - \frac{b}{k} = \frac{a-b}{k}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad-bc}{cd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c}$$

مثال 01 : أحسب العبارة التالية ثم اختزل ان أمكنك ذلك

$$B = \left(\frac{7}{6} - \frac{3}{4}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{1}{3} ; A = \frac{2}{7} - \frac{3}{7} \times \frac{8}{21} = \frac{6}{49}$$

مثال 02 : أعط الكتابة العلمية لـ A و B

$$A = 5,2 \times 10^{-3} + 6,4 \times 10^{-2} + 0,0034$$

$$A = 7,26 \times 10^{-2}$$

$$B = \frac{5 \times 10^2 + 3 \times 10^3}{1,4 \times 10^{-4}} = 2,50 \times 10^7$$

لإيجاد القاسم الأكبر المشترك PGCD للعددين a و b
تتبع الخطوات التالية (حيث $a > b$) :

❖ خوارزمية إقليدس :

- (1) نجز عملية القسم الإقليدية لـ a على b نسمي الباقي r_1 والحاصل q_1 .
- (2) نجز عملية القسمة الإقليدية لـ b على r_1 نسمي الباقي r_2 والحاصل q_2 . وهكذا يكون PGCD لـ a و b آخر باقي غير معدوم .

مثال : أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 322 و 1078 باستعمال خوارزمية إقليدس

$$\begin{aligned} 1078 &= 3 \times 322 + 112 \\ 322 &= 2 \times 112 + 98 \\ 112 &= 1 \times 98 + 14 \\ 98 &= 14 \times 7 + 0 \end{aligned}$$

الباقي	b	a	
112	322	1078	1
98	112	322	2
14	98	112	3
0	14	98	4

$$PGCD(1078; 322) = 14$$

للإثبات أن عدداً هما أوليان فيما بينهما ، نتبع الخطوات التالية

- (1) نحسب PGCD لهذين العددين .
- (2) إذا كان PGCD يساوي 1 ، فنقول عن العددين أنهما أوليان فيما بينهما .

مثال : اثبت أن العددين 27 و 19 أوليان فيما بينهما

$$\begin{aligned} 27 &= 19 \times 1 + 8 \\ 19 &= 8 \times 2 + 3 \\ 8 &= 3 \times 2 + 2 \\ 3 &= 2 \times 1 + 1 \\ 2 &= 1 \times 2 + 0 \end{aligned}$$

الباقي	b	a	
8	19	27	1
3	8	19	2
2	3	8	3
1	2	3	4
0	1	2	5

$$PGCD(27; 19) = 1$$

تبسيط مجموعة جذور، نتبع مايلي :

- (1) نكتب إن أمكن كل جذر على الشكل $a\sqrt{b}$
- (2) نستخرج $\sqrt{b}$ كعامل مشترك باستخدام الخاصية التوزيعية

مثال : بسط العبارة التالية $\sqrt{50} + \sqrt{98}$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

$$\text{ومنه : } \sqrt{50} + \sqrt{98} = 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = \sqrt{2}(7 + 5) = 12\sqrt{2}$$

لجعل مقام النسبة $\frac{a}{\sqrt{b}}$ عددا ناهقا

- (1) نقوم بضرب كلا من البسط و المقام النسبة في $\sqrt{b}$
- (2) نقوم بعد ذلك بتبسيط الكسر ان أمكن ذلك

مثال : اكتب على شكل كسر مقامه عدد ناطق $\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

تذكر بالمكتسبات القبلية

$$(a^n)^m = a^{(n \times m)}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(ab)^n = a^n \times b^n$$

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$1^n = 1$$

مثال : اكتب الناتج على أبسط شكل :

$$A = \sqrt{125} + \sqrt{45} = 8\sqrt{5} ; \sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5} = 6\sqrt{5}$$

$$\frac{\sqrt{44}}{2} = \sqrt{\frac{44}{4}} = \sqrt{11} \quad | \quad \frac{\sqrt{44}}{2} = \frac{\sqrt{4 \times 11}}{2} = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$$

خواص جذور التربيعية

$(\sqrt{a})^2 = a$	$\sqrt{a^2} = a$
$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$
$\sqrt{ab^2} = \sqrt{a} \times \sqrt{b^2} = b\sqrt{a}$	

لحل المعادلات من الشكل $x^2 = a$ ، نتبع مايلي :

- (1) إذا كان $a > 0$ فإن المعادلة لها حلان : $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$
- (2) إذا كان $a = 0$ فإن المعادلة لها حل وحيد هو 0
- (3) إذا كان $a < 0$ فإن المعادلة ليس لها حل

مثال : حل المعادلة $x^2 = 7$ و $x^2 = -4$

بما أن $7 > 0$ فإن المعادلة لها حلان هما : $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$

بما أن $-4 < 0$ فإن المعادلة ليس لها حل

تبسيط العدد غير الناهق $\sqrt{a}$ ، نتبع الخصوات التالية :

- (1) نكتب العدد a على شكل جداء مربع تام أي : $a = b^2 \times c$
- (2) نستعمل خواص الجذور التربيعية المذكورة أعلاه ، لكتابه على شكل $c\sqrt{b}$

مثال : كتابة على الشكل $a\sqrt{b}$ العدد $\sqrt{50}$ حيث :

a و b عدنان طبيعيان و a أصغر عدد ممكن

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{5^2 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

تحليل العبارات الجبرية ، نتبع الخصوات التالية :

- (1) نبحث عن العامل المشترك لكل حدود العبارة الجبرية
- (2) إن لم يكن العامل المشترك ظاهرا ، نجرب إحدى المتطابقات الشهيرة .

مثال : تحليل العبارات التالية

$$4x + 12 = 4x + 4 \times 3 = 4(x + 3)$$

$$(x + 2)(2x + 1) - x(x + 2)$$

$$(x + 2)(2x + 1 - x) = (x + 2)(x + 1)$$

$$x^2 + 16x + 64 \text{ من الشكل } a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{و بالمطابقة نجد : } a^2 = x^2 \text{ و } b^2 = 64$$

$$\text{ومنه : } x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2$$

$$4x^2 - 28x + 49 - 5(2x - 7)$$

$$\text{بالمطابقة نجد : } a^2 = 4x^2 \text{ و } b^2 = 49$$

$$\text{ومنه : } (2x - 7)^2 - 5(2x - 7)$$

$$(2x - 7)(2x - 7 - 5)$$

$$(2x - 7)(2x - 12)$$

$$x^2 - 9 + (2x + 6)$$

$$\text{لدينا : } x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

$$\text{و أيضا : } (2x + 6) = 2(x + 3)$$

$$\text{ومنه : } (x + 3)(x - 3) + 2(x + 3)$$

$$(x + 3)(x - 3 + 2)$$

$$(x + 3)(x - 1)$$

خواص مستعملة لنشر العبارات الجبرية

$$k(a + b) = ka + kb \quad | \quad k(a - b) = ka - kb$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

نشر وتبسيط العبارات الجبرية ، نتبع الخصوات التالية :

- (1) نشر العبارة الجبرية بإستخدام الخواص المذكورة أعلاه

- (2) نقوم بتبسيط العبارة الجبرية إلى أبسط شكل ممكن

مثال : نشر و تبسيط العبارات التالية :

$$3(2 + 5x) = 3 \times 2 + 3 \times 5x = 6 + 15x$$

$$(x + 4)(x + 3) = x^2 + 4x + 3x + 12 \\ = x^2 + 7x + 12$$

$$(3x + 1)^2 = (3x)^2 + 6x + 1 \\ = 9x^2 + 6x + 1$$

$$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - (2 \times 2x \times 3) + 3^2 \\ = 4x^2 - 12x + 9$$

$$\left(\frac{4}{5} - 2x\right) \left(\frac{4}{5} + 2x\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - (2x)^2 \\ = \frac{16}{25} - 4x^2$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 - (2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 \\ = 2 - 2\sqrt{6} + 3 = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$(-2x + 0,5)^2 = (-2x)^2 + 2 \times (-2x) \times 0,5 + (0,5)^2 \\ = 4x^2 - 2x + 0,25$$

حل المعادلة تؤول إلى الشكل : $(ax + b)(cx + d) = 0$

- (1) نقوم بتحليل العبارة إلى جداء عاملين
- (2) نحل المعادلة الأولى $ax_1 + b = 0$
- (3) بعدها نحل المعادلة الثانية $cx_2 + d = 0$
- (4) للمعادلة حلين هما : x_1 و x_2

مثال : حل المعادلة $(1 - 2x)(4x - 3) - 3(4x - 3) = 0$

لدينا : $(4x - 3)(1 - 2x - 3) = (4x - 3)(-2x - 2)$

ومنه نحل المعادلة التالية : $(4x - 3)(-2x - 2) = 0$

إذن : $4x_1 - 3 = 0$ ، نجد أن : $x_1 = \frac{3}{4}$

أو : $-2x_2 - 2 = 0$ ، نجد أن : $x_2 = -1$

ومنه حلول المعادلة هما : $\frac{3}{4}$ و -1

لتبسيط مشكلة وحل معادلة ، نتبع الخصوات التالية

- (1) نختار المجهول
- (2) نضع المعادلة المناسبة التي تعبر عن المشكلة
- (3) نحل المعادلة ثم نتحقق من الحل
- (4) نجيب عن السؤال

مثال : حل المسألة التالية

عمر شعيب قبل سبع سنوات هو نصف عمره بعد أربع سنوات .
حدد عمر شعيب

لدينا : $2(x - 7) = x + 4$

$$2x - 14 = x + 4$$

$$2x - x = 4 + 14$$

$$x = 18$$

خواص المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

- (1) كل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد x يمكن تحويلها إلى معادلة من الشكل $ax = b$
- (2) إذا كان $a \neq 0$ حل المعادلة $ax = b$ هو : $x = \frac{b}{a}$

حل المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

- (1) نحول المعادلة إلى الشكل $ax = b$ بجعل المجهول x التي تشمل x على يسار المساواة والأعداد على يمين المساواة .
- (2) بعد ذلك نقوم بتبسيط ثم نحل المعادلة لإيجاد قيمة x

مثال : حل المعادلة $5x + 2 = 2x + 3$

نطرح (2) من طرفي المساواة

$$5x = 2x + 1$$

نطرح $(2x)$ من طرفي المساواة

$$5x - 2x = 1$$

$$3x = 1$$

نضرب طرفي المساواة في $\frac{1}{3}$

$$x = \frac{1}{3}$$

حل المعادلة من الشكل : $(ax + b)(cx + d) = 0$

- (1) نحل المعادلة الأولى $ax_1 + b = 0$
- (2) بعدها نحل المعادلة الثانية $cx_2 + d = 0$
- (3) للمعادلة حلين هما : x_1 و x_2

مثال : حل المعادلة $(2x - 7)(8x - 9) = 0$

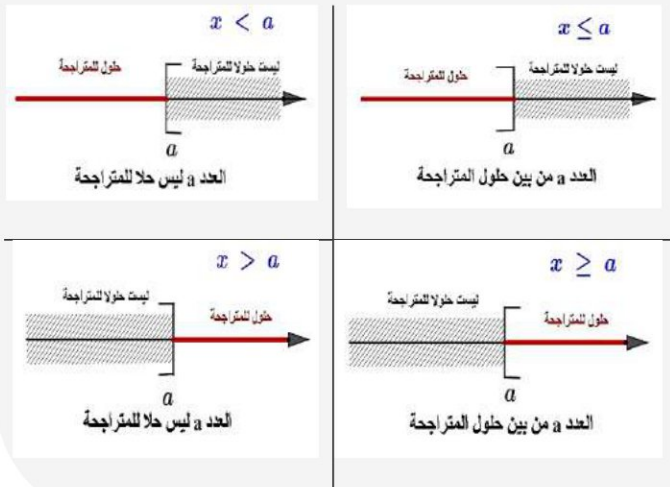
نحل المعادلة $2x_1 - 7 = 0$ ، ومنه : $x_1 = \frac{7}{2}$

نحل المعادلة $8x_2 - 9 = 0$ ، ومنه : $x_2 = \frac{9}{8}$

ومنه حلول المعادلة هما : $\frac{9}{8}$ و $\frac{7}{2}$

تمثيل حلول متراجحة بيانياً ، نتبع مايلي :

- (1) نحل المتراجحة كما هو مذكور سابقاً .
- (2) في مستقيم مدرج نلون نصف المستقيم الممثل لمجموعة حلول المتراجحة ، ونشط نصف المستقيم الآخر .
- (3) نفصل بين نصفي المستقيمين بمعكوفة [، فإذا كانت فاصلة النقطة من ضمن حلول المتراجحة توجه المعكوفة لجهة الجزء الملون وإلا توجه لجزء مشطوب .



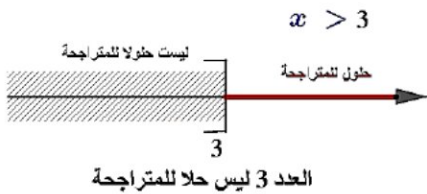
مثال : حل و تمثيل حلول المتراجحة $6x + 5 > 23$

نطرح (5) من طرفي المتباينة ، فنحصل على :

$$6x > 18$$

نضرب طرفي المتباينة في $\frac{1}{6}$ ، فنجد :

$$x > 3$$



خواص المتراجحات من الدرجة الأولى بهجوم واحد

- (1) لا يتغير اتجاه متراجحة ، عند إضافة (أو طرح) نفس العدد من طرفي المتراجحة .
- (2) لا يتغير اتجاه متراجحة ، عند ضرب (أو قسمة) طرفي المتباينة بنفس العدد الموجب تماماً .
- (3) يتغير اتجاه متراجحة ، عند ضرب (أو قسمة) طرفي المتباينة بنفس العدد السالب تماماً .

لحل المتراجحات من الدرجة الأولى بهجوم واحد

- (1) نحول المتراجحة إلى الشكل $ax \geq b$ بجعل المجاهيل x التي تشمل x على يسار المتباينة والأعداد على يمين المتباينة .
- (2) بعد التبسيط ، نقسم طرفي المتراجحة على العدد a مع مراعاة إشارته واتجاه المتراجحة

مثال : حل المتراجحة $-5x + 2 \geq 2x + 3$

نطرح (2) من طرفي المتباينة ، فنحصل على :

$$-5x \geq 2x + 1$$

نطرح (2x) من طرفي المتباينة ، فنحصل على :

$$-5x - 2x \geq 1$$

$$-7x \geq 1$$

نضرب طرفي المتباينة في $-\frac{1}{7}$ مع تغيير اتجاه المتراجحة ، فنجد :

$$x \leq -\frac{1}{7}$$

التعابير الإحصائية

- (1) الإحصاء هو دراسة ظاهرة أو معطيات بطريقة علمية ، ترجمتها وتفسيرها .
- (2) لغة الإحصاء ضرورية للتعامل مع هذا المفهوم فهذه اللغة تتمثل في معرفة بعض التعابير والمفردات الإحصائية الأساسية .

مثال : للالتحاق بمتوسطة حي واد النيل البوني بولاية عنابة

- 209 تلميذ يستعملون النقل العمومي
- 284 تلميذ يأتون راجلين
- 92 تلميذ يأتون في سيارات أوليائهم

- (3) نسمي مجتمعا إحصائيا مجموع الأفراد الذين تخصمهم الدراسة الإحصائية .

في المثال السابق يشكل تلاميذ متوسطة حي واد النيل البوني عنابة المجتمع الإحصائي ، أفرادهم تلاميذ هذه الأكاديمية و الدراسة الإحصائية تتمثل في كيفية التحاق التلاميذ بالمتوسطة

- (4) تسمى التكرار الكلي للسلسلة عدد عناصر هذه السلسلة .

التكرار الكلي : $209 + 284 + 92 = 585$
585 عناصر هذا المجتمع و الذي يتمثل في تلاميذ المتوسطة

- (5) نسمي متغيرا إحصائيا أو ميزة إحصائية الشيء الذي تخصه الدراسة الإحصائية و الذي يشمل عدة أنواع مختلفة ، حيث يأخذ كل فرد من المجتمع المدروس نوعا واحد فقط منها .

بالنسبة للمثال السابق المتغير الإحصائي هو طبيعة النقل

- (6) نسمي التكرار المرفق بنوع معين للمتغير الإحصائي عدد مرات ظهور هذا النوع .

تكرار التلاميذ الذين يستعملون النقل العمومي هو 209

- (7) تسمى التواتر « التكرار النسبي » المرفق بنوع معين للمتغير الإحصائي : حاصل قسمة تكرار هذا النوع على التكرار الكلي

تواتر التلاميذ الذي يستعملون النقل العمومي هو $\frac{209}{585}$
و يعبر عن هذه النتيجة بعدد عشري أو بنسبة مئوية

- (8) نقول عن ميزة أنها كمية عندما تكون ممثلة بعدد .
و نقول عن ميزة غير كمية أنها نوعية : الجنس ، اللون فهذا طبع إحصائي نوعي .

مثلا : العمر ، المسافة ، المدة ، العلامة هي ميزات كمية

- (9) التكرار المجمع الصاعد لقيمة (أو لفئة) هو مجموع تكرار هذه القيمة (أو الفئة) وتكرارات القيم (أو الفئات)
- (10) التكرار المجمع النازل : لقيمة (أو لفئة) هو مجموع تكرار هذه القيمة (أو الفئة) وتكرارات القيم (أو الفئات)

مثال : لدينا سلسلة إحصائية تتعلق بأطوال النهار ، لنعين التكرار المجمع الصاعد و النازل

المجموع	[140;160]	[120;140]	[100;120]	[80;100]	النطوال
40	6	12	10	12	التكرار
	40	34	22	12	التكرار المجمع لصاعد
	6	18	28	40	التكرار المجمع النازل

- (11) التواتر المجمع الصاعد : لقيمة (أو فئة) هو مجموع تواتر هذه القيمة (أو الفئة) وتواترات القيم (أو الفئات)
- (12) التواتر المجمع النازل : لقيمة (أو لفئة) هو مجموع تواتر هذه القيمة (أو الفئة) وتواتر القيم (أو الفئات)

مثال : نبقي مع المثال السابق

المجموع	[140;160]	[120;140]	[100;120]	[80;100]	النطوال
40	6	12	10	12	التكرار
	$\frac{6}{40}$	$\frac{12}{40}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{12}{40}$	التواتر
	$\frac{40}{40}$	$\frac{34}{40}$	$\frac{22}{40}$	$\frac{12}{40}$	التواتر المجمع الصاعد
	$\frac{6}{40}$	$\frac{18}{40}$	$\frac{28}{40}$	$\frac{40}{40}$	التواتر المجمع النازل

ملاحظات

- (1) عندما يكون عدد القيم كبيراً نلجأ إلى حصرها ضمن مجالات تدعى فئات (كما ورد في المثال السابق)
- (2) مركز الفئة : هو العدد $\frac{a+b}{2}$
- (3) طول الفئة : هو العدد الموجب $b - a$

(13) نسمي الوسط الحسابي لسلسلة إحصائية حاصل قسمة مجموع قيم السلسلة المتوازنة بالتكرارات الموافقة لها على الترتيب التكرار الكلي .

مثال 01 : حساب وسط حسابي لسلسلة علامات التلاميذ في فرض الرياضيات

العلامات	7	8	9	10	11	المجموع
التكرارات	6	3	5	1	2	17

الوسط الحسابي لهذا الطبع الإحصائي المتقطع هو :

$$m = \frac{6 \times 7 + 3 \times 8 + 5 \times 9 + 1 \times 10 + 2 \times 11}{17}$$

$$m \approx 8,41$$

مثال 02 : إذا بوبنا العلامات في فئات : نحصل على السلسلة الإحصائية التالية :

العلامات	[7;10[	[10;13[	[13;16[	المجموع
التكرارات	14	5	6	25
مركز الفئة	8,5	11,5	14,5	

$$m = \frac{14 \times 8,5 + 5 \times 11,5 + 6 \times 14,5}{25}$$

$$m = 10,54$$

ملاحظات

عندما يتطلب الأمر بطبع إحصائي مستمر ، نحسب الوسط الحسابي بتعويض كل فئة $[a; b[$ بحساب مركز فئتهم ثم نحسب الوسط الحسابي .

سبب الانتقال من الوسط إلى الوسيط لسلسلة إحصائية لأن بعض حالات سلاسل إحصائية مرتبة ترتيباً تصاعدياً و إن الوسط الحسابي لا يقسم السلسلة إلى جزأين لهما نفس عدد العناصر ، وهذا الأمر يمكن تحقيقه بحساب الوسيط

- (14) عندما تكون سلسلة إحصائية مرتبة ، الوسيط هي القيمة التي تجزئ هذه السلسلة إلى جزأين لهما نفس التكرار .
- (15) عدد القيم الأصغر من الوسيط يساوي عدد القيم الأكبر منه ونرمز لوسيط السلسلة الإحصائية بالرمز : Med .
- (16) لحساب الوسيط لسلسلة إحصائية نرتبها ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً إذا لم تكن مرتبة ثم نراعي فردية أو زوجية التكرار الكلي .
- (17) إذا كان N التكرار الكلي فردياً فإن قيمة رتبة $\frac{N+1}{2}$ تمثل الوسيط Médiane .
- (18) إذا كان N التكرار الكلي زوجياً ، فإن نصف مجموع قيم $\frac{N}{2}$ و $\frac{N}{2} + 1$ تمثل الوسيط Médiane .

مثال 01 : عين وسيط السلسلة 4,4,5,6,6,7,8,10,3

التكرار الكلي للسلسلة هو عدد فردي و يساوي 9
نرتب السلسلة ترتيباً تصاعدياً :
3,4,4,5,6,6,7,8,10
وهو رتبة الوسيط هي : $\frac{9+1}{2} = 5$
أي أن $Med = 6$

مثال 02 : عين وسيط السلسلة 9,3,4,7,8,7,5,2

التكرار الكلي للسلسلة هو عدد زوجي و يساوي 8
نرتب السلسلة ترتيباً تنازلياً :
9,8,7,7,5,4,3,2
وهو وسيط هو نصف مجموع القيم التي رتبتهما : $(\frac{8}{2} ; \frac{8}{2} + 1)$
أي أن $Med = \frac{7+5}{2} = 6$

ملاحظات

- (1) نجد نفس الثنائية بإستعمال طريقة الحل بالتعويض أو طريقة الحل بالجمع ، إذن الطريقة هي عملية إختيارية .
- (2) يمكن دمج بين الطريقتين حيث يمكننا استعمال طريقة الجمع لإيجاد أحد المجهولين ثم التعويض في إحداهما لإيجاد المجهول الآخر . ﴿ يمكننا القول العكس صحيح ﴾
- (3) لإختيار طريقة الحل الأفضل نلاحظ معاملي x أو y إذا كان أحد معاملي x أو y يساوي 1 :
فالأحسن نختار طريقة الحل بالتعويض .
إذا كان أحد معاملي x أو y لا يساوي 1 :
فالأحسن نختار طريقة الحل بالجمع .

لحل مسألة بتوضيف جملة معادلتين ، نتبع الخطوات التالية :

- (1) نختار المجهولين وليكن x و y أو a و b
- (2) نقوم بترييض المسألة بالتعبير عنها بمعادلتين .
- (3) نحل جملة المعادلتين ، بإختيارنا لإحدى الطريقتين السابقتين .
- (4) نتحقق من النتيجة ثم نجيب عن الأسئلة .

مثال : قبل 11 سنة كان عمر نجيب ضعف عمر شعيب**بعد 4 سنوات سيصبح عمر نجيب $\frac{9}{7}$ عمر شعيب**نختار x يمثل عمر نجيب و y يمثل عمر شعيب

$$\begin{cases} x - 11 = 2(y - 11) \\ x + 4 = \frac{9}{7}(y + 4) \end{cases}$$

ومنه نحصل على الجملة التالية :

العمر الحالي لـ نجيب هو : 23 سنة

و العمر الحالي لـ شعيب هو 17 سنة

لإيجاد الحل الجبري لجملة معادلتين من الدرجة الأولى**بمجهولين ، نختار إحدى الصريقتين :**

- (1) طريقة الحل بالتعويض : تهدف هذه الطريقة إلى استخراج أحد المجهولين من إحدى المعادلتين ثم التعويض في الأخرى .
- (2) طريقة الحل بالجمع : تهدف هذه الطريقة إلى جعل معاملي x أو y متعاكسين ثم جمع طرف مع طرف .

$$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$$

أولاً : طريقة الحل بالتعويضالمعادلة رقم 2 ، تسمح بكتابة : $y = 2 - 4x$

نعوض هذه القيمة في المعادلة رقم 1 فنجد :

$$3x + 2(2 - 4x) = -1$$

$$3x + 4 - 8x = -1$$

لإيجاد قيمة x ، تتبع مراحل حل معادلة من الدرجة الأولى

بمجهول واحد ، فنتحصل على :

$$x = 1$$

نعوض $x = 1$ في $y = 2 - 4x$ فنجد :

$$y = -2$$

ومنه ثنائية الحل للجملة المعادلتين هي : $(1 ; -2)$ **ثانياً : طريقة الحل بالجمع**نضرب طرفي المعادلة رقم 2 في العدد (-2) ، فنتحصل على :

$$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ -8x - 2y = -4 \end{cases}$$

نجمع المعادلتين طرف مع طرف ، فنجد :

$$3x + 2y - 8x - 2y = -1 - 4$$

نقوم بنفس الطريقة بجعل هذه المرة معاملي x متعاكسين :نضرب طرفي المعادلة رقم 1 في العدد (-4) و طرفي المعادلة رقم 2 في العدد $(+3)$ فنتحصل على :

$$\begin{cases} -12x - 8y = 4 \\ 12x + 3y = 6 \end{cases}$$

نجمع المعادلتين طرف مع طرف ، فنجد :

$$y = -2$$

لتعيين دالة خطية انطلاقاً من عدد غير معدوم وصورته

(1) نحاول إيجاد معامل الدالة الخطية a مثال : f دالة خطية حيث : $f(2) = 3$
عين الدالة الخطيةبما أن f دالة خطية فإن f تكتب : $f(x) = ax$

$$f(2) = 3 \text{ و } f(2) = ax$$

$$a = \frac{3}{2} \text{ معناه } 2a = 3 \text{ ومنه } a = \frac{3}{2}$$

$$\text{إذن : } f(x) = \frac{3}{2}x$$

لتمثيل الدالة الخطية بيانياً ، نتبع مايلي :

- (1) نضع $y = f(x)$ حيث تصبح الدالة الخطية $y = ax$
- (2) نختار قيمتين لـ x ونعوض في عبارة الدالة الخطية لإيجاد قيمة y .
- (3) نستنتج إحداثي النقطتين $(x; y)$ أو $(x; f(x))$
- (4) نمثلها في معلم ونصل بينهما بخط مستقيم يشمل المبدأ.
- (5) نتحصل في الأخير على بيان الدالة الخطية.

ملاحظات

- (1) $y = ax$ هي معادلة مستقيم الذي يمثل بيانياً دالة خطية.
- (2) هندسياً a معامل الدالة الخطية تصبح تسميته معامل التوجيه أو ميل المستقيم.
- (3) التمثيل البياني لدالة خطية في معلم مبدؤه O هو مستقيم يشمل مبدأ المعلم والنقطة A ذات الإحداثيات $(1; a)$ حيث معامل الدالة الخطية.

تعريف وترمين الدالة الخطية

- (1) عندما نرفق كل عدد حقيقي x بعدد حقيقي وحيد ax .
- (2) نقول أننا عرفنا دالة خطية حيث معامل تناسبها a
- (2) نرمز للدالة الخطية التي معاملها a بالرمز : $x \mapsto ax$
- ونسُميها بحرف f ، h أو k ونكتب : $f : x \mapsto ax$
- ونكتب أيضاً : $f(x) = ax$

إثبات أن الدالة خطية انطلاقاً من جدول قيم ، يجب علينا :

(1) نثبت أن الجدول هو جدول قيم تناسبية

مثال : أثبت أن قيم الجدول الذي تمثل دالة الخطية

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	4	2	0	-2	-4	-6

نلاحظ أن هذا الجدول هو جدول تناسبية لأن :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{6}{-3} = \frac{4}{-2} = \dots = \frac{-6}{3} = -2$$

لحساب صورة عدد بواسطة دالة الخطية ، نتبع مايلي :

(1) نعوض قيمة x في عبارة الدالة الخطيةمثال : أحسب صورة العدد 5 بالدالة $f(x) = 10x$ صورة العدد 5 بالدالة f هي : $f(5) = 10 \times 5 = 50$

$$f : 5 \mapsto 50$$

لتعيين عدد صورته بدالة خطية معلومة ، نتبع مايلي :

(1) نحل المعادلة $f(x) = ax$ وإيجاد المجهول x

$$\text{حيث : } x = \frac{f(x)}{a}$$

مثال : عين عدد صورته بالدالة الخطية $f(x) = 5x$ هي 10لدينا : $f(x) = 5x$ و $f(x) = 10$ أي : $5x = 10$ ، نجد $x = 2$ العدد الذي صورته بالدالة f : 10 هو العدد 2

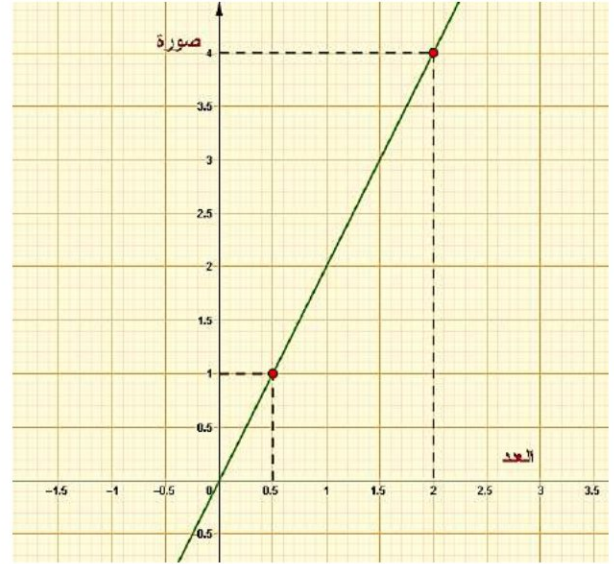
لقراءة التمثيل البياني لدالة خطية ، نتبع الخطوات التالية :

- (1) نقرأ قيم x على محور الفواصل .
- (2) نقرأ قيم y على محور الترتيب .

مثال : المستقيم (d) يمثل دالة خطية f

اقرأ صورة العدد 2

اقرأ العدد الذي صورته هي 1



صورة 2 هي 4 أي نكتب : $f(2) = 4$

0,5 هو العدد الذي صورته هي 1 أي نكتب : $f(1) = 0,5$

حساب معامل الدالة الخطية انطلاقاً من تمثيلها البياني

- (1) نختار نقطة من المستقيم الممثل للدالة الخطية
- (2) نكتب إحداثيتي النقطة على الشكل $f(x) = y$
- (3) ومنه بعد تعويض كل من x و y في معادلة المستقيم ، نستطيع إيجاد معامل الدالة الخطية

مثال : إيجاد معامل الدالة الخطية من المثال السابق

وجدنا سابقاً أن $f(2) = 4$ ، المستقيم معادلته $y = ax$

بتعويض : $x = 2$ و $y = 4$ ، نجد : $2a = 4$

ومنه : $a = 2$ ، أي أن $f(x) = 2x$

إثبات أن نقطة تنتمي إلى مستقيم الممثل للدالة الخطية

- (1) نبثق عن العبارة الجبرية للدالة الخطية التي تمثيلها المستقيم ، كما هو موضح في الأمثلة السابقة .
- (2) بعدها نتحقق من أن النقطة تحقق هذه الدالة .

مثال : أثبت أن النقطة $A(3; 4)$ تنتمي إلى المستقيم الممثل لـ f

مما سبق لدينا : $f(x) = 2x$ أي $y = 2x$

و منه بالتعويض $x = 3$ نحصل على : $2 \times 3 = 6$

و منه نستنتج أن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم

بمعنى آخر : الفاصلة 3 تعطينا الترتيب 6

بمستقيم الممثل لدالة الخطية f وليس 4

ملاحظات

لبرهنة أن مجموعة من النقاط في استقامية واحدة .
يكفي أن نبين أن كل نقطة من هذه النقاط تنتمي إلى نفس
المستقيم الممثل للدالة الخطية .
و ذلك عبر المراحل المذكورة سابقاً

تذكير بالمكتسبات القبلية

حساب النسبة $P\%$
المقدار y من المقدار x
 $y = \frac{P}{100} \times x$

زيادة x بـ $P\%$
 $y = \left(1 + \frac{P}{100}\right) \times x$

خفض x بـ $P\%$
 $y = \left(1 - \frac{P}{100}\right) \times x$

حساب الكلفة الحجمية لعينة
 $\rho = \frac{m}{v}$

حساب السرعة المتوسطة
 $v = \frac{d}{t}$

حساب الطاقة الكهربائية
 $E = P \times t$

تعريف وترميز الدالة التآلفية

- (1) عندما نرفق كل عدد حقيقي x بعدد حقيقي وحيد $ax + b$.
نقول أننا عرفنا دالة تآلفية حيث معامل توجيهها a .
- (2) نرمز للدالة التآلفية التي معاملها a بالرمز : $x \mapsto ax + b$
ونسميها بحرف f ، h أو k ونكتب : $f : x \mapsto ax + b$
ونكتب أيضا : $f(x) = ax + b$
- (3) الدالة التآلفية لا تمثل وضعية تناسبية

حساب صورة عدد بواسطة دالة التآلفية ، تتبع مايلي :

- (1) نعوض قيمة x في عبارة الدالة التآلفية

مثال : أحسب صورة العدد 5 بالدالة $f(x) = 10x + 2$

صورة العدد 5 بالدالة f هي : $f(5) = 10 \times 5 + 2 = 52$
 $f : 5 \mapsto 52$

لتعيين عدد صورته بدالة تآلفية معلومة ، تتبع مايلي :

- (1) نحل المعادلة $f(x) = ax + b$ وإيجاد المجهول x
حيث : $x = \frac{f(x) - b}{a}$

مثال : عين عدد صورته بالدالة التآلفية $f(x) = 5x - 2$ هي 8

لدينا : $f(x) = 5x - 2$ و $f(x) = 8$

أي : $5x - 2 = 8$ ، نجد $x = \frac{8+2}{5} = 2$

العدد الذي صورته بالدالة f : 8 هو العدد 2

لتعيين دالة تآلفية انطلاقا من عددين وصورتهما

الطريقة الأولى : حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بهجوليين

- (1) نحاول إيجاد معامل a والعدد b .

مثال : f دالة تآلفية حيث : $f(6) = 1$ و $f(-2) = -3$
عين الدالة التآلفية f

بما أن f دالة تآلفية فإن f تكتب : $f(x) = ax + b$

$$f(6) = 1 \text{ و } f(6) = 6a + b$$

$$f(-2) = -3 \text{ و } f(-2) = -2a + b$$

$$\begin{cases} 6a + b = 1 \\ -2a + b = -3 \end{cases} \text{ إذن :}$$

بعد تطبيق طريقة الحل بالجمع نحصل على :

$$b = -2 \text{ و } a = \frac{1}{2}$$

إذن الدالة التآلفية هي : $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

الطريقة الثانية : باستخدام تناسب التغيرات

- (1) نحاول إيجاد معامل a والعدد b ، وذلك بحساب معامل التوجيه المستقيم a أولا .
- (2) بعد ذلك بتعويض قيمة a في الدالة نحسب العدد b .

مثال : نفس المثال السابق

لدينا

$$a = \frac{f(6) - f(-2)}{6 - (-2)} = \frac{1 - (-3)}{8} = \frac{1}{2}$$

ومنه بتعويض a في $6a + b = 1$ نجد :

$$b = -2$$

إذن الدالة التآلفية هي : $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

تعيين العاملين للدالة التآلفية انطلاقاً من تمثيلها البياني

- (1) نختار نقطتين من المستقيم الممثل للدالة التآلفية .
- (2) نكتب إحداثيتي النقطتين على الشكل $f(x) = y$.
- (3) ومنه بعد تعويض كل من x و y في معادلة المستقيم ، نستطيع إيجاد معامل a والعدد b .

مثال : توظيف المثال السابق

بقراءة السابقة لتمثيل البياني هي : $f(4) = 4$ و $f(-2) = 1$
 نعلم أن للمستقيم (d) معادلة و هي من الشكل : $y = ax + b$
بإختيار طريقة حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين
 $f(4) = 4$ تعني أن : $-2a + b = 1$
 $f(-2) = 1$ تعني أن : $4a + b = 4$
 ومنه بعد إختيار طريقة حل بالجمع نجد :

$$a = \frac{1}{2} \text{ و } b = 2$$

نعوض بقيمتي a و b فنجد عبارة الدالة التآلفية :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

إثبات أن نقطة تنتمي إلى مستقيم الممثل للدالة التآلفية

- (1) نبحث عن العبارة الجبرية للدالة التآلفية التي تمثيلها المستقيم ، كما هو موضح في الأمثلة السابقة .
- (2) بعدها نتحقق من أن النقطة تحقق هذه الدالة .

مثال : أثبت أن النقطة $A(3; 4)$ تنتمي إلى المستقيم الممثل لـ f

مما سبق لدينا : $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ أي : $y = \frac{1}{2}x + 2$
 ومنه بالتعويض $x = 3$ نحصل على : $\frac{1}{2} \times 3 + 2 = 3,5$
 ومنه نستنتج أن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم
بمعنى آخر : الفاصلة 3 تعطينا الترتيب 3,5
بمستقيم الممثل لدالة التآلفية f وليس 4

ملاحظات

لبرهنة أن مجموعة من النقاط في استقامية واحدة .
 يكفي أن نبين أن كل نقطة من هذه النقاط تنتمي إلى نفس
 المستقيم الممثل للدالة التآلفية .
 وذلك عبر المراحل المذكورة سابقاً

لتمثيل الدالة التآلفية بيانياً ، نتبع مايلي :

- (1) نضع $y = f(x)$ حيث تصبح الدالة الخطية $y = ax + b$
- (2) نختار قيمتين لـ x ونعوض في عبارة الدالة التآلفية لإيجاد قيمة y .
- (3) نستنتج إحداثيتي النقطتين $(x; y)$ أو $(x; f(x))$
- (4) نمثلها في معلم ونصل بينهما بخط مستقيم لا يشمل المبدأ .
- (5) نتحصل في الأخير على بيان الدالة التآلفية .

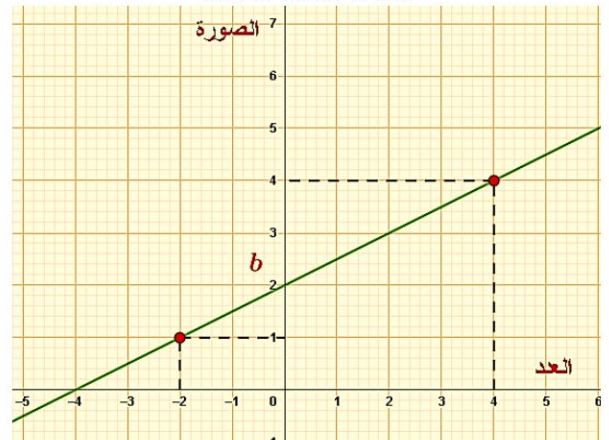
ملاحظات

- (1) $y = ax + b$ هي معادلة مستقيم الذي يمثل بيانياً دالة تآلفية
- (2) هندسياً a معامل الدالة التآلفية تصبح تسميته معامل التوجيه أو ميل المستقيم .
- (3) التمثيل البياني لدالة تآلفية في معلم مبدؤه O هو مستقيم لا يشمل مبدأ المعلم والنقطة A ذات الإحداثيات $(0; b)$.
- (4) b هي ترتيبية نقطة تقاطع المستقيم مع محور الترتيب يدعى العدد b هندسياً بـ : الترتيبية عند المبدأ

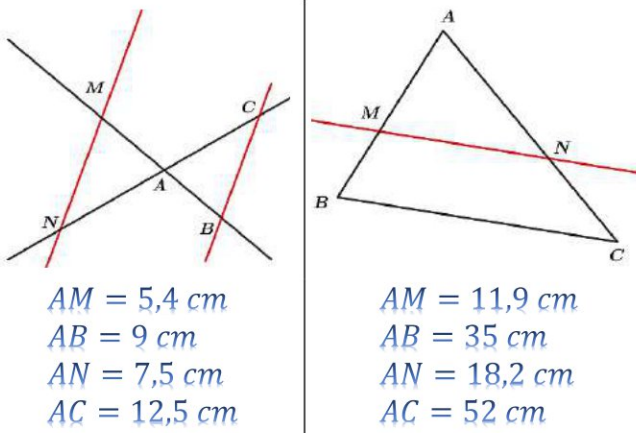
لقراءة التمثيل البياني لدالة تآلفية ، نتبع الخصائص التالية :

- (1) نقرأ قيم x على محور الفواصل .
- (2) نقرأ قيم y على محور الترتيب .

مثال : نتبع نفس طريقة قراءة التي تم تطرق إليها في ملخص الخاص بالدالة الخطية



مثال 02 : اثبت أن المستقيمان (MN) و (BC) متوازيان



في الشكل الأول

$$\frac{AM}{AB} = \frac{5,4}{9} = 0,6 \quad \text{و} \quad \frac{AN}{AC} = \frac{7,5}{12,5} = 0,6$$

حسب خاصية طاليس العكسية ، المستقيمان متوازيان

في الشكل الثاني

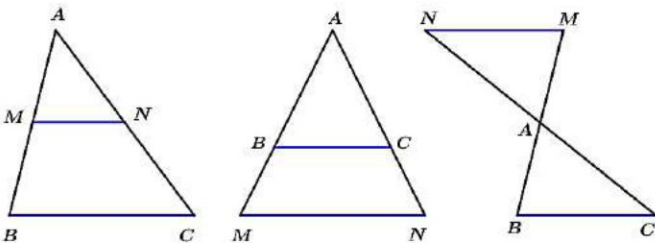
$$\frac{AN}{AC} = \frac{18,2}{52} = 0,35 \quad \text{و} \quad \frac{AM}{AB} = \frac{11,9}{35} = 0,34$$

حسب خاصية طاليس العكسية ، المستقيمان غير متوازيين

خاصية طاليس على المثلث

ليكن ABC مثلث ، M نقطة من الحامل (AB) ، N نقطة من الحامل (AC) ، إذا كان (MN) // (BC) فإن :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



خاصية العكسية لطاليس على المثلث

ABC مثلث إذا كانت M نقطة من [AB]

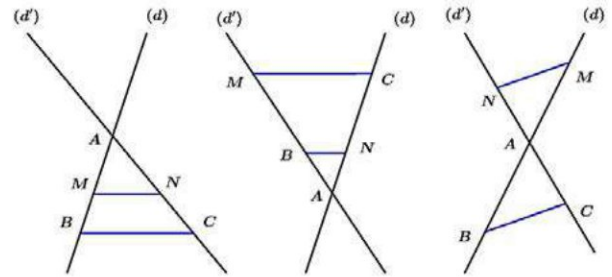
و كانت N نقطة من [AC] و $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

فإن : (MN) // (BC)

خاصية طاليس المباشرة

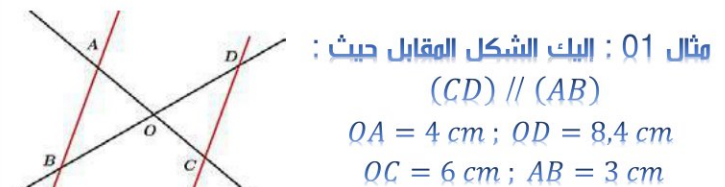
(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A . B و M نقطتان من (d) مختلفتان عن A . C و N نقطتان من (d') مختلفتان عن A . إذا كان (MN) // (BC) فإن :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



خاصية طاليس العكسية

(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A . B و M نقطتان من (d) مختلفتان عن A . C و N نقطتان من (d') مختلفتان عن A . إذا كان : $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ و كانت النقاط M ، B ، A في استقامة واحدة و نفس الترتيب مع النقاط N ، C ، A فإن : (MN) // (BC)



أحسب الطولين : OB و CD

من المعطيات لدينا (AC) و (DB) مستقيمان متقاطعان في O

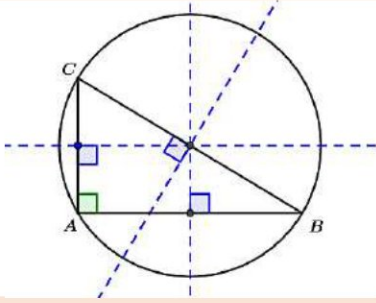
و المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان

إذن حسب خاصية طاليس نكتب مايلي : $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$

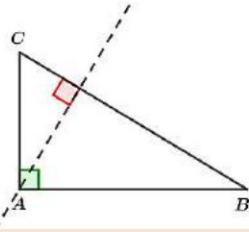
أي بعد التعويض نجد : $OB = 5,6 \text{ cm}$ و $CD = 4,5 \text{ cm}$

تذكير بالمكتسبات القبلية

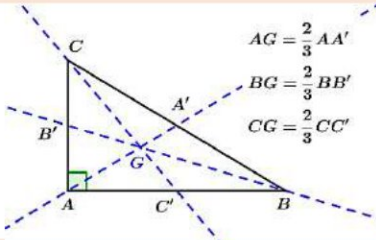
- (1) مجموع قيسي الزاويتين الحادتين في مثلث القائم يساوي 90°
- (2) محاور مثلث القائم هي محاور أضلاعه حيث تقاطع في منتصف الوتر الذي يمثل مركز الدائرة المحيطة .



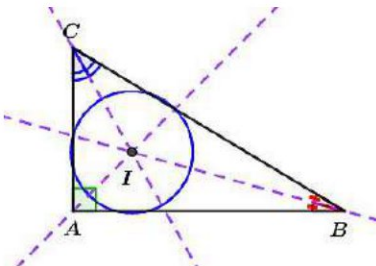
- (3) الإرتفاع في المثلث القائم هو المستقيم الذي يشمل رأس الزاوية القائمة ويعامد الوتر .



- (4) المتوسط في المثلث هو المستقيم الذي يشمل رأس و منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس .



- (5) المنصف الداخلي لمثلث هو منصف احدى زواياه الداخلية . نقطة تقاطع المنصفات الداخلية لزاويا مثلث هي مركز الدائرة الداخلية له .



في مثلث قائم

- (1) $\cos$ زاوية حادة يساوي حاصل قسمة طول الضلع المجاور للزاوية على طول الوتر .
- (2) $\sin$ زاوية حادة يساوي حاصل قسمة طول الضلع المقابل للزاوية على طول الوتر .
- (3) $\tan$ زاوية حادة يساوي حاصل قسمة طول الضلع المقابل للزاوية على طول الضلع المجاور للزاوية .

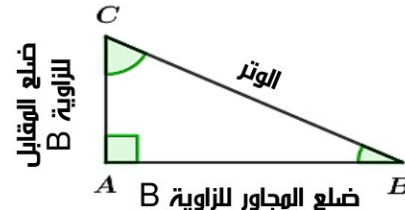
ملاحظات

$\cos$ و $\sin$ زاوية محصورة بين 0 و 1

$\tan$ زاوية حادة و هو عدد موجب

مثال : من أجل المثلث ABC القائم في A

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} ; \sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} ; \tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$



علاقات حساب في المثلثات القائمة

في مثلث قائم ، x تمثل قيس الزاوية الحادة

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ و } \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

مثال : علما أن $\cos x = \frac{3}{5}$; احسب $\sin x$ و $\tan x$

باستعمال العلاقة $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

لدينا : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\sin^2 x = \frac{16}{25} \text{ و منه } \sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \text{ أي :}$$

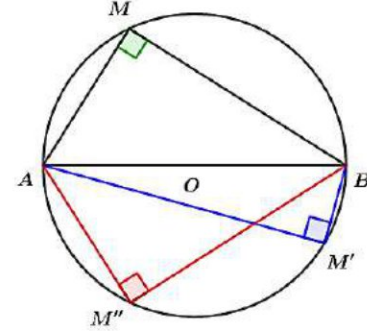
$$\sin x = \frac{4}{5} \text{ أي :}$$

باستعمال العلاقة : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\tan x = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{3} \text{ ومنه :}$$

(6) المثلث القائم و الدائرة

لـ إذا كانت M نقطة و تنتمي للدائرة التي قطرها $[AB]$
فإن المثلث AMB قائم في M
لـ إذا كان المثلث AMB قائم ، فإن M نقطة تنتمي للدائرة
التي قطرها $[AB]$ و مركزها منتصف $[AB]$



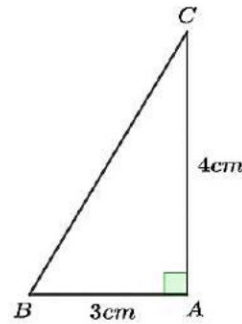
(7) خاصية فيثاغورس : إذا كان المثلث ABC قائم في A فإن :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

مثال : المثلث قائم في A ، حيث :

$$AC = 4 \text{ cm} \text{ و } AB = 3 \text{ cm}$$

أحسب BC طول الوتر $[BC]$



لدينا المثلث ABC قائم في A و حسب

خاصية فيثاغورس نكتب المساواة التالية :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 3^2 + 4^2$$

$$BC = 5 \text{ cm} \text{ و } BC^2 = 25$$

(8) خاصية العكسية لفيثاغورس : إذا كان ABC مثلث حيث

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ فإن المثلث } ABC \text{ قائم في } A$$

مثال : المثلث ABC ، حيث :

$$BC = 7 \text{ cm} \text{ و } AC = 4 \text{ cm} \text{ و } AB = 5 \text{ cm}$$

تحقق من أن المثلث ABC مثلث قائم

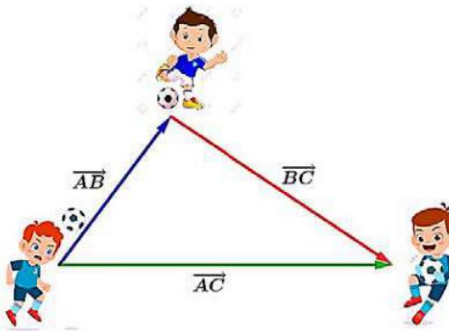
بما أن BC أكبر طول إذا نكتب مايلي : $BC^2 = AC^2 + AB^2$

و منه بعد تحقق من صحة المساواة نستنتج أن المثلث ABC

ليس بمثلث قائم

مركب انسحابين

إذا تحول الشكل 1 إلى الشكل 2 بالإنسحاب ذي الشعاع $\overrightarrow{AB}$
و تحول الشكل 2 إلى الشكل 3 بالإنسحاب ذي الشعاع $\overrightarrow{BC}$.
فإن الشكل 1 يتحول إلى الشكل 3 بالإنسحاب ذي الشعاع $\overrightarrow{AC}$.

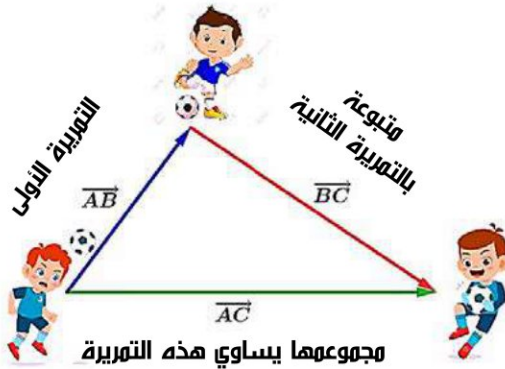


مجموع شعاعين

باستعمال علاقة شال

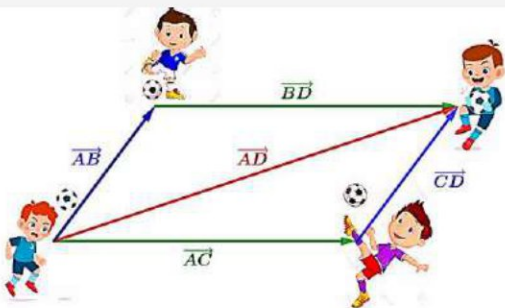
تركيب الإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ متبوعا بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ هو الإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$

من الرسم السابق نكتب مايلى : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



باستعمال علاقة متوازي النضلاء

إذا كان ABDC متوازي الأضلاع فإن : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$
محصول مجموع شعاعين لهما نفس المبدأ هي قطر متوازي الأضلاع



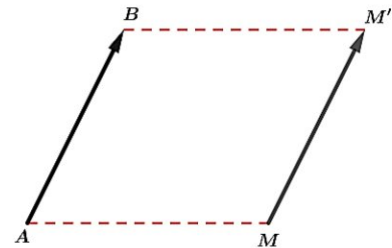
خواص الأشعة و الإنسحاب

(1) صورة M بالإنسحاب الذي يحول A إلى B معناه :

$ABM'M$ متوازي الأضلاع

(2) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ ، معناه الإنسحاب الذي يحول M إلى M' .

أي أن لهما نفس : المنحى و الإتجاه و الطول « الطويلة »



منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت I منتصف القطعة [AB] فإن : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

العكس صحيح

الأشعة و متوازي الأضلاع

إذا كان ل [AD] و [BC] نفس المنتصف فإن :

« العكس صحيح » $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

لإثبات أن شعاعين متساويين ، نتم إحدى الخصوات التالية :

(1) إثبات أن القطعتين المستقيمتين لهما نفس المنتصف

(2) إثبات أن الرباعي ABCD متوازي الأضلاع

مثال : BDS مثلث و I منتصف القطعة [SD]
H نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة I

« في هذا المثال ، يكفي تبيان أن MNSR متوازي الأضلاع »

من المعطيات لدينا : H نظيرة B بالنسبة إلى I ، يعني : $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IH}$

و بما أن I منتصف [SD] ، يعني : $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{ID}$

و منه قطري الرباعي يتناصفان في I ، إذن الرباعي BDHS

متوازي الأضلاع و منه نستنتج أن : $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{SB}$

إذا كان $AD = BC$ و $AB = CD$ فإن :

الرابعي ABCD متوازي أضلاع

إذا كان $AB = CD$ و $(AB) \parallel (DC)$ فإن :

الرابعي ABCD متوازي أضلاع

خواص الإنسحاب

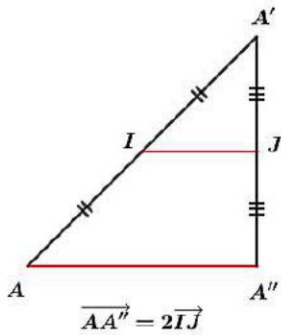
لـ يحفظ الأطوال ، المساحات ، الزوايا و استقامية النقط .

لـ صورة مستقيم هي مستقيم يوازيه .

لـ صورة قطعة مستقيم هي قطعة مستقيم تقايسها و توازيه .

لـ صورة دائرة هي دائرة لها نفس القطر .

إضافة من الجيل الأول، تركيب تناظرين مركبين



I ، J نقطتين من المستوي

إجراء التناظر الذي مركزه I ،

متبوعا بإجراء التناظر الذي

مركزه J يؤول إلى إجراء

الإنسحاب الذي شعاعه

$(IJ + IJ)$ ، الشعاع $(IJ + IJ)$

IJ نمرز إليه بـ $2IJ$ معناه :

A' نظيرة A بالنسبة إلى I

A'' نظيرة A' بالنسبة إلى J

فيكون لدينا : $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{IA'}$ و $\overrightarrow{A'A''} = 2\overrightarrow{A'J}$

$$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''}$$

$$\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{IA'} + 2\overrightarrow{A'J}$$

$$\overrightarrow{AA''} = 2(\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'J})$$

$$\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{IJ}$$

يمكن الوصول لهذه النتيجة باستعمال خاصية

مستقيم المنتصفين في المثلث

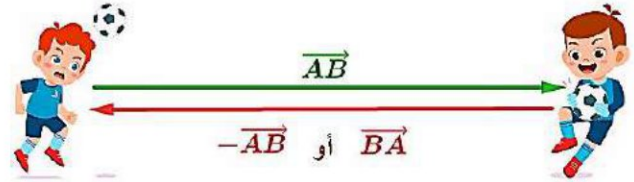
الشعاعان المتعاكسان

يكون الشعاعان متعاكسين إذا كان مجموعهما شعاع معدوما

لهما نفس المنحى ، نفس الطول و اتجاهين متعاكسين

إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متعاكسان ونكتب : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

ونقول أن الشعاع $\overrightarrow{BA}$ هو معاكس الشعاع $\overrightarrow{AB}$



مجموع شعاعين متعاكسين يساوي شعاع معدوم

نرمز له : $\vec{O}$ ، هو الشعاع الذي بدايته هي نهايته

المثال السابق : حسب علاقة شال

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{O}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{O}$$

تذكير بالمكتسبات القبلية

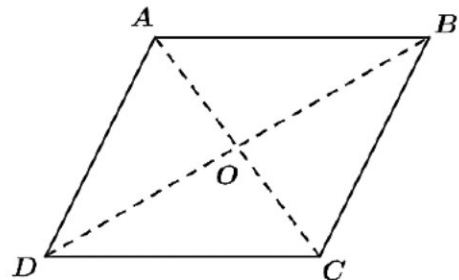
ABCD رباعي :

لـ إذا كان $(AB) \parallel (DC)$ و $(AD) \parallel (BC)$ فإن :

الرابعي ABCD متوازي أضلاع .

لـ إذا تقاطع القطران $[AB]$ و $[BD]$ في منتصفهما فإن :

الرابعي ABCD متوازي أضلاع .



تساوي الشعاعين

(1) يتساوى شعاعان إذا كان لهما نفس مركبتين في المعلم

مثال : نعتبر النقط $A(1; 2)$ ، $B(2; 4)$ ، $C(1; -3)$
أوجد حسابيا إحداثيا النقطة C' صورة C بالإنسحاب $\overrightarrow{AB}$

C' صورة C بالإنسحاب $\overrightarrow{AB}$ ، أي $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$

نضع $C'(x; y)$ أي : $\overrightarrow{CC'} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ومنه نتحصل على الجملة التالية : $\begin{cases} x-1=1 \\ y+3=2 \end{cases}$

بعد حل الجملة نجد إحداثيا النقطة : $C'(2; -1)$

مجموع شعاعين

إذا كان $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

فإن مركبتين الشعاع $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ هما :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A + x_D - x_C \\ y_B - y_A + y_D - y_C \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$$

تابع للمثال السابق : أحسب إحداثيات النقطة D

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \quad \text{علما أن :}$$

نضع $D(x; y)$ ثم نكتب مركبتين كل من الأشعة الثلاثة

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

ومنه بالتعويض في العبارة $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ نجد :

$$\begin{pmatrix} 1+0 \\ 2+(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

ومنه نتحصل على الجملة التالية : $\begin{cases} x-1=1 \\ y-2=-3 \end{cases}$

بعد حل الجملة نجد إحداثيا النقطة : $D(2; -5)$

لحساب مركبتين شعاع $\overrightarrow{AB}$ في معلم منسوب إلى مستو

إذا كانت إحداثيا النقطتين $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$

في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ فإن مركبتين الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

مثال : لدينا $A(-3; 4)$ و $B(5; 3)$

احسب مركبتين الشعاع $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 - (-3) \\ 3 - 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

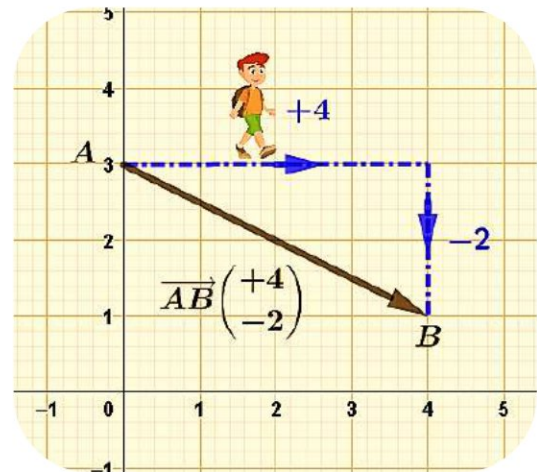
ملاحظة

مركبتين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هما إحداثيتي النقطة M في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

حيث النقطة O هي مبدأ هذا المعلم

القراءة البيانية لمركبتين شعاع ، نتبع الخصائص التالية :

- (1) ننتقل أفقيا بالتوازي مع محور الفواصل ، من بداية الشعاع إلى نهايته ، وعدد الوحدات المقروءة تمثل **مركبة الأولى** .
- (2) ننتقل عموديا بالتوازي مع محور الترتيب ، من بداية الشعاع إلى نهايته ، وعدد الوحدات المقروءة تمثل **مركبة الثانية** .
- (3) تُعطى الإشارة (+) أو (-) لكل من **مركبة 1** و **مركبة 2** إذا تم الانتقال في الاتجاه موجب أو السالب للمعلم



المسافة بين نقطتين من المستوى في معلم $(O; i; j)$

إذا كانت $(x_A; y_A)$ ، $(x_B; y_B)$ إحداثيا النقطتان A و B في معلم متعامد ومتجانس فإن المسافة AB تعطى بالعلاقة :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

أو يمكن أن نكتب هكذا :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

مثال : $A(-1; 2)$ و $B(-3; 5)$ ، احسب AB

$$AB^2 = ((-3) - (-1))^2 + (5 - 2)^2$$

$$AB^2 = 4^2 + 3^2$$

$$AB = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

تذكير بالمكتسبات القبلية

إحداثيا نقطة في المستوى

يمكن تحديد موضع نقطة من المستوى بواسطة الثنائية $(x; y)$

عدان نسميها إحداثيا هذه النقطة في المعلم $(O; i; j)$

x : تسمى بالفاصلة ، y تسمى بالترتيبة

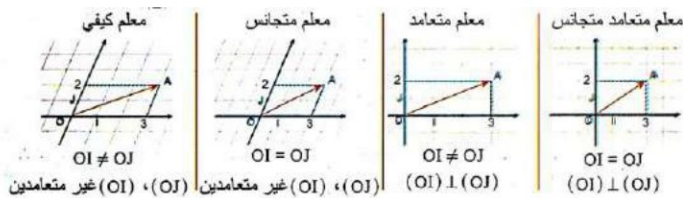
أنواع المعالم

الشكل 1 : معلم كفي

الشكل 2 : معلم متعامد و غير متجانس

الشكل 3 : معلم متجانس و غير متعامد

الشكل 4 : معلم متعامد و متجانس



تعيين إحداثيتي النقطة منتصف قطعة مستقيمة

A و B نقطتان إحداثيها $(x_A; y_A)$ و $(x_B; y_B)$ في المعلم $(O; i; j)$ ، حيث إحداثيا M منتصف القطعة [AB]

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} ; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

مثال : لدينا $A(-3; 4)$ و $B(5; 3)$

احسب إحداثيا M منتصف [AB]

بما أن M منتصف [AB] ، فإن :

$$x_M = \frac{(-3) + 5}{2} = 1 \text{ و } y_M = \frac{4 + 3}{2} = 3,5$$

إذا إحداثيا النقطة M هما : $(1; 3,5)$

لإثبات أن النقطة M هي منتصف القطعة مستقيمة [AB] ،

نتبع إحدى الطرق التالية :

$$(1) \text{ نبين أن : } \vec{AM} = \vec{MB}$$

(2) نحسب إحداثيا النقطة M منتصف القطعة مستقيمة .

(3) نتحقق من أن $AB = AM + MB$ ، بعد حساب المسافات

مثال : M نقطة من القطعة [AB]

حيث : $A(-3; 4)$ ، $B(5; 3)$ و $M(1; 3,5)$

أثبت أن M منتصف هذه القطعة

نختار الطريقة الأولى ، أي نبين أن : $\vec{AM} = \vec{MB}$

$$\vec{AM} \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 3,5 - 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{AM} \begin{pmatrix} 4 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{MB} \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 3 - 3,5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{MB} \begin{pmatrix} 4 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

ومنه نستنتج أن النقطة M منتصف [AB]

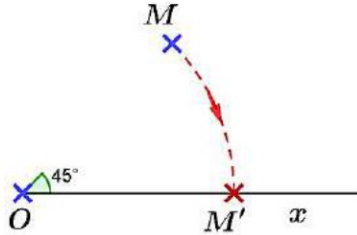
إذا اتبعنا الطريقة الثانية ، سنعيد نفس مراحل المتبعة في المثال

السابق لحساب إحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيمة

كيفية إنشاء صور أشكال بسيطة بالدوران

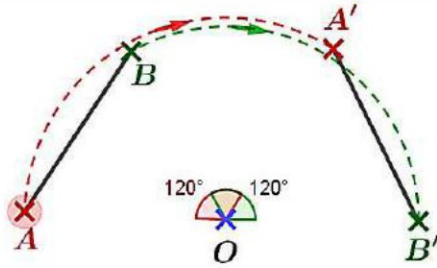
إنشاء النقطة M' صورة M بالدوران الذي مركزه O

- 1 إنشاء نصف المستقيم $[Ox]$ ، مع الإنتباه لجهة الدوران
- 2 إنشاء النقطة M' على $[Ox]$ حيث $OM' = OM$



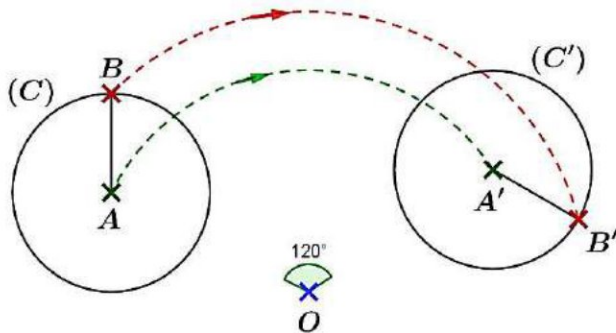
إنشاء صورة القطعة المستقيمة $[AB]$ بالدوران الذي مركزه O

- 1 إنشاء الصورتين A' و B' للنقطتين A و B بهذا الدوران
و تكون $[A'B']$ هي : $[AB]$



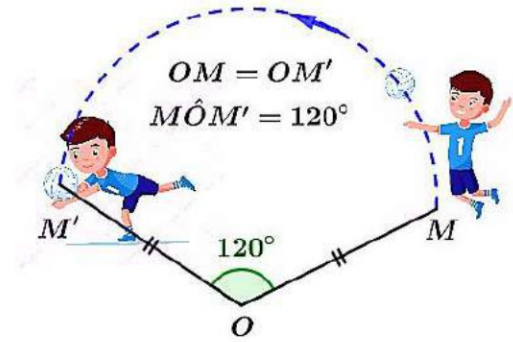
إنشاء إنشاء صورة دائرة مركزها A بالدوران الذي مركزه O

- 1 إنشاء الصورة A' للنقطة A بهذا الدوران و تكون صورة الدائرة المعطاة هي الدائرة التي مركزها A' ولها نفس نصف القطر الدائرة الأولى



مفاهيم تجريبية للدوران

- إذا قمنا بدوران حول نقطة O بزاوية قياسها α .
- فإن الشكل 1 يتوقع على الشكل 2 .
- نقول أن الشكل 1 هو صورة الشكل 2 بالدوران الذي مركزه O و الزاوية التي قياسها α في إتجاه المختار .



خواص الدوران

- الدوران يحفظ
- الأطوال ، الإستقامة ، الزوايا والمساحات

صور أشكال بواسطة دوران

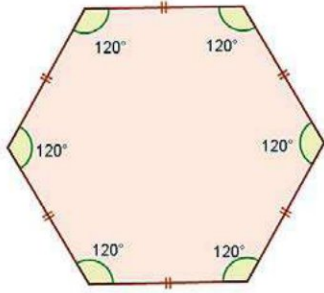
- صورة مستقيم هي مستقيم
- صورة قطعة مستقيمة هي قطعة مستقيمة تقايسها
- صورة نصف مستقيم هو نصف مستقيم
- صورة الدائرة التي مركزها I هي الدائرة التي لها نفس نصف القطر و مركزها I' صورة النقطة I .

ملاحظات

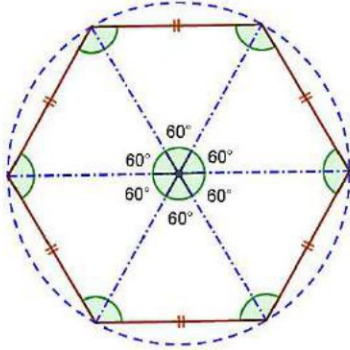
- صورة مستقيمان متعامدان هما مستقيمان متعامدان
- صورة مستقيمان متوازيان هما مستقيمان متوازيان
- صورة مثلث قائم هو مثلث قائم

المضلعات المنتظمة

المضلع المنتظم هو مضلع أضلاعه متقايسة و زواياه لها نفس القيس .



توجد دائرة مارة على جميع رؤوس المضلع المنتظم نقول أن هذه :
الدائرة المحيطة بالمضلع المنتظم و مركزها هو مركز المضلع المنتظم



حساب قيس الزاوية $\widehat{AOB}$ لمضلع منتظم مركزه O, A, B

رأسان متتاليان للمضلع وعدد أضلاعه n

$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{n} \text{ : بمعنى } n \text{ على } 360^\circ \text{ نقسم الزاوية}$$

حساب قيس الزاوية $\widehat{ABC}$ لمضلع منتظم مركزه C, B, A

هي رؤوس للمضلع

(1) نعين الزاوية المركزية $\widehat{AOC}$ التي نرسم نفس القوس التي ترسمه

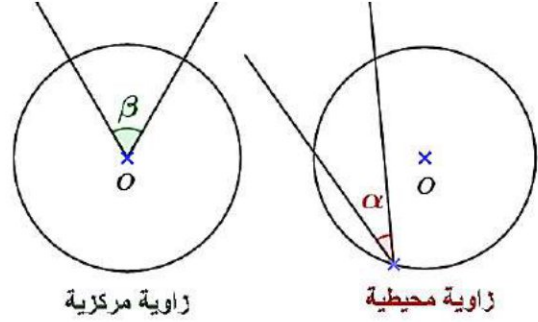
الزاوية المحيطة $\widehat{ABC}$

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} \text{ (2) نستعمل خاصية قيس الزاوية المحيطة}$$

الزاوية المحيطة و الزاوية المركزية

(1) الزاوية المحيطة في دائرة : هي الزاوية المشكلة من وترين للدائرة يلتقيان في نقطة منها .

(2) الزاوية المركزية في دائرة : هي الزاوية التي رأسها هو مركز هذه الدائرة .

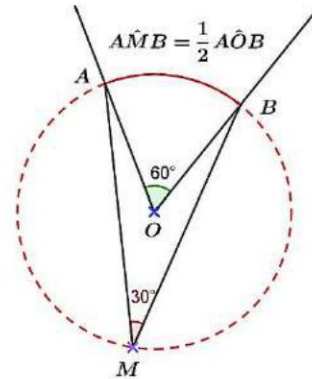


خاصية قيس الزاوية المحيطة

قيس الزاوية المحيطة في دائرة يساوي نصف قيس الزاوية المركزية التي تحصر معها نفس القوس

نقول أن الزاوية $\widehat{AOB}$ هي الزاوية المركزية المشتركة مع الزاوية المحيطة $\widehat{AMB}$ يعني أنهما يحصران نفس القوس $\widehat{AB}$

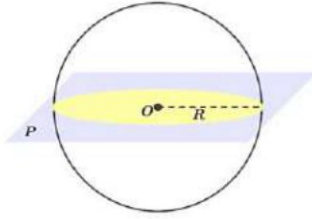
$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$$



الزاويتان المركزيتان اللتين تحصران نفس القوس متقايسان

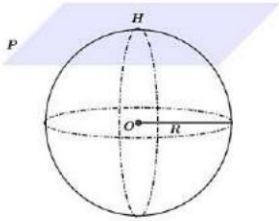
الحالة 02 : $OH = 0$

الدائرة الناتجة من قطع الكرة بمستوي P ، لها للكرة نفس المركز O ونفس نصف القطر R للكرة نقول أنها : أكبر دائرة للكرة



الحالة 03 : $OH = R$

الدائرة الناتجة عن قطع الكرة بالمستوي P لها مركز S أو N ونصف قطر يساوي الصفر .
نقول أن : المستوي P مماس للكرة في S أو N



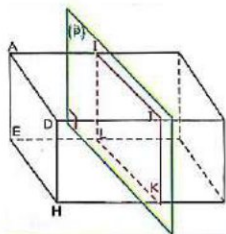
ملاحظة

إذا كان $OH > R$ فإن المستوي P لا يقطع الكرة

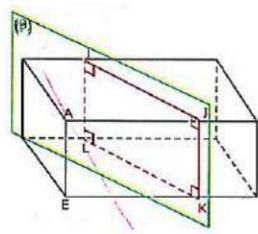
مقطع لمتوازي المستطيلات

مقطع متوازي مستطيلات بمستوي :

- (1) يوازي أحد أوجهه هو مستطيل له نفس بعدي الوجه الموازي .
- (2) يوازي أحد أحرفه هو مستطيل طوله أو عرضه يساوي طول ذلك الحرف .



مقطع موازي لأحد الوجه
(وجه الجانبي)



مقطع موازي لأحد الأحرف

تعريف بالكرة والجلة

الكرة التي مركزها O ونصف قطرها R ، هي مجموعة النقط M

$$OM = R \text{ بحيث}$$

الجلة التي مركزها O ونصف قطرها R ، و هي مجموعة النقط M

$$OM \leq R \text{ بحيث}$$



الجلة

مملوءة من الداخل



كرة السلة

قارغة من الداخل

مساحة الكرة وحجم الجلة

حجم الجلة	مساحة الكرة
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$	$A = 4\pi R^2$

مقطع لكرة بمستوي

مقطع كرة بمستوي هو دائرة

ملاحظة

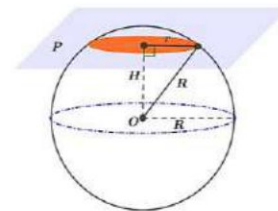
$[NS]$ قطر كرة مركزها O ، P هو المستوي العمودي على $[NS]$

في H نقول ان : OH هي المسافة بين O و P المستوي .

الحالة 01 : $0 < OH < R$

- (1) الدائرة الناتجة من قطع الكرة بمستوي P مركزها H . من أجل كل نقطة من هذه الدائرة ، المثلث قائم في تلك النقطة
- (2) في الدائرة نصف قطرها r .

$$\text{يعطى بالقاعدة : } r = \sqrt{R^2 - OH^2}$$



تكبير أو التصغير بالنسبة K

- (1) تكبير مجسم معناه : ضرب كل أبعاده بالنسبة K بحيث :
 $K > 1$
- (2) تصغير مجسم معناه : ضرب كل أبعاده بالنسبة K بحيث :
 $0 < K < 1$
- (3) تكبير و تصغير مجسمات لا يغيران طبيعتها .
- (4) أثناء التكبير أو التصغير أبعاد الجسم بالنسبة K فإن :
 مساحته تضرب بالنسبة K^2 و حجمه يضرب بالنسبة K^3

تذكير بالمكتسبات القبلية

متوازي المستطيلات

الحجم	المساحة
$V = a \times b \times h$	$S = 2(a \times b + a \times h + b \times h)$

مكعب

الحجم	المساحة
$V = a^3$	$S = 6 \times a^2$

أسطوانة الدوران

الحجم	المساحة
$V = \pi \times R^2 \times h$	$S = 2 \times \pi \times R (h + R)$

الهرم

الحجم	المساحة
$V = B \times h$	$S = B \times \left(\frac{a \times c}{2} \times \text{عدد أوجه} \right)$

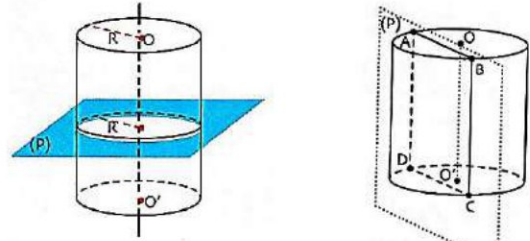
B مساحة القاعدة

المخروط الدوران

الحجم	المساحة
$V = \frac{1}{3} \times h \times \pi \times R^2$	$S = \pi \times R \times h + \pi \times R^2$

مقطع لأسطوانة دورانية

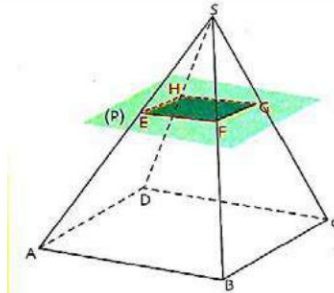
- مقطع أسطوانة نصف قطرها R بمستوي عمودي على المحور : هو دائرة نصف قطرها R مركزها ينتمي إلى المحور . ﴿ مواز و مطابق لقاعدته ﴾
- (2) موازي للمحور : هو مستطيل طوله أو عرضه يساوي إرتفاع الأسطوانة .



المستوي موازي لمحور الأسطوانة المستوي عمودي على محور الأسطوانة

مقطع لهرم

- مقطع هرم بمستوي موازي لقاعدته هو تصغير لقاعدته أضلاعها موازي لأضلاع قاعدة الهرم



مقطع لمخروط دوراني

- مقطع مخروط دوراني بمستوي موازي لقاعدته هو دائرة مصغرة لقاعدته ، مركزها ينتمي إلى إرتفاع المخروط

