الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية البيض — ثـانوية حميتو الحاج علي الشلالة

امتحان : بكالوريا التجريبي

الشعبة : علوم تجريبية — دورة مـــــــاي 2021

اختبار في مادة الرياضيات — المدة : ثلاث ساعات و نصف

على الطالب ان يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الاول(20 نقطة) :

التمرين الأول(04 نقاط) :

1. a و b عددان مركبان حيث : $\begin{cases} a+\bar{b}=6+2i\sqrt{3} \\ \bar{a}-2b=-3+i\sqrt{3} \end{cases}$. عين العددين a و b .
2. نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب $z_A=3+i\sqrt{3}$ ، $z_B=3-i\sqrt{3}$.

أ- أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي .

ب- استنتج الشكل الأسي للعد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ ثم استنتج نوع المثلث OAB .

ج- عين z_I لاحقة النقطة I مركز ثقل المثلث OAB ثم أكتب معادلة الدائرة المحيطة به .

د- بين أن : $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{2020}\times\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1441}=-1$

3. لتكن النقطة D نظيره النقطة O بالنسبة إلى النقطة I . ماهي طبيعة الرباعي ADBI ؟ أحسب مساحته .
4. نعتبر (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ المعرفة بـ : $z\neq 0$: $arg\left(\frac{z}{i\bar{z}}\right)=\arg(z_A)$.

أ- بين أن : $C\in(\Gamma)$ حيث : $z_C=iz_B$

ب- عين طبيعة المجموعة (Γ) .

التمرين الثاني (04نقاط):

جمعية خيرية تتكون من 12 شخص (7 رجال و 5 نساء) من بينهم رجل واحد اسمه محمد. نريد تشكيل لجنة للتسيير بها 3 أعضاء.

I. ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها حيث تضم رئيسا ونائبا له وكاتبا .

II. **في حالة أن الأعضاء لهم نفس المهام .**

1. عين عدد اللجان التي يمكن تشكيلها .
2. أحسب احتمال الحوادث التالية : A:" اللجنة تضم محمد" B:"اللجنة تتكون من رجلين و امرأة"

C:" اللجنة بها رجل على الأقل" D : " اللجنة مكونة من امرأة على الأكثر"

3. نعتبر اللجنة مشكلة من الرجال فقط وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة مختارة عدد الرجال الذين يحمل إسم محمد

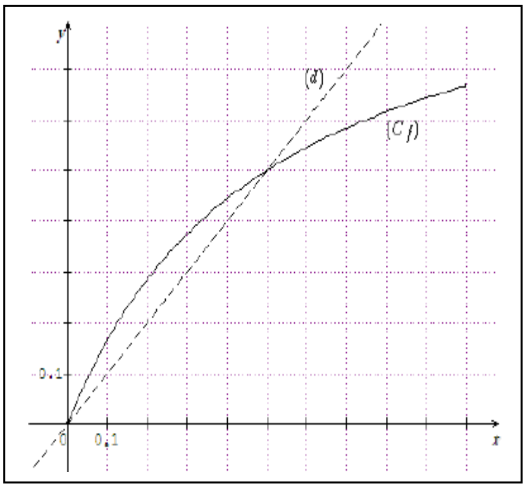
- عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله .

التمرين الثالث (05 نقاط):

I. في الشكل المقابل مثلنا المنصف الأول (d) و المنحنى (C_f) الممثل للدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ كمايلي : $f(x) = \frac{2x}{2x+1}$

- بين أن الدالة f متزايدة .

II. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كمايلي : $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$



1. أ- أنقل الشكل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود $_0$ ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم .

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) و تقاربها .

2. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < \frac{1}{2}$.

3. أدرس اتجاه تغير (u_n) و استنتج أنها متقاربة .

III. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = 3^n \times \frac{u_n}{2u_n - 1}$.

1. بين أن $_{n+1} - 6v_n = 0$ ثم استنتج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2. أكتب عبارة $_n$ بدلالة n ثم بين أن $u_n = \frac{2^n}{3+2^{n+1}}$ و احسب نهاية (u_n) .

3. أحسب بدلالة n المجموع : $S = \frac{(2u_0-1)v_0}{u_0} + \frac{(2u_1-1)v_1}{u_1} + \cdots + \frac{(2u_n-1)v_n}{u_n}$

التمرين الرابع (07 نقاط) :

I. لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بالعبارة : $g(x) = \frac{-x^2+x+1}{x-1}$.

1. أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .
2. أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $-1 < \alpha < 0$ ، $1 < \beta < 2$.

ب- استنتج اشارة g(x) حسب كل قيم x من $\mathbb{R} - \{1\}$.

II. نعتبر الدالة العددية المعرفة على $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ كمايلي : $f(x) = x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- أحسب $\lim_{x\to0} f(x)$ ، $\lim_{x\to1} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا .

ب- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2. أ- بين أنه من اجل كل عدد $x \in \mathbb{R} -]0;1[$ فإن : $f'(x) = -\frac{g(x)}{x}$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أ- بين ان المستقيم $(\Delta): y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

4. أنشئ (C_f) و (Δ) (نأخذ $f(\alpha) \approx -1.58$ ، $f(\beta) \approx 2.58$).
5. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = x - m$

الموضوع الثاني (20 نقطة)

التمرين الأول (04 نقاط)

I. $P(z)$ كثير حدود للمتغير الغير معدوم z حيث : $P(z) = z^3 + 4\sqrt{3}z^2 + 24z + 24\sqrt{3}$.

1. أ- أحسب $P(-2\sqrt{3})$.

ب- أوجد العددين المركبين a و b حيث : $P(z) = \left(z + 2\sqrt{3}\right)(z^2 + az + b)$.

ج- حل المعادلة $P(z) = 0$

II. المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{u}, \vec{v})$ A ، B ، C لواحقها على التراتيب $z_A = -2\sqrt{3}$ ، $z_B = -\sqrt{3} + 3i$ ، $z_C = -\sqrt{3} - 3i$

1. أ- أكتب كلا من z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسي .

ب- بين أن : $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{2020} - \left(\frac{z_B}{z_C}\right)^{1441} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. أ- اكتب العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الجبري .

ب- أعط تفسيرا هندسيا لطويلة و عمدة العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3. ليكن الدوران R الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{3}$.

أ- عين العبارة المركبة للدوران R و استنتج صورة A بالدوران R .

ب- عين $_D$ لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R ثم اكتب z_D على الشكل الجبري.

التمرين الثاني(04 نقاط) :

تتكون باقة ورد من أربع وردات حمراء و ثلاث وردات بيضاء ووردتين لونهما أصفر.

I. نختار عشوائيا وفي ان واحد 3 وردات من هذه الباقة وليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الوردات الصفراء المختارة .

1. أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X .
2. أحسب E(X) الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X .

II. نختار عشوائيا من هذه الباقة 3 وردات على التوالي وبدون إرجاع . نعتبر الحدثين التاليين:

A :" اختيار ثلاث وردات من نفس اللون" B:" اختيار وردتين على الأقل لونهما أحمر"

1. أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(A \cap B)$ ثم استنتج $P(A \cup B)$

التمرين الثالث(05 نقاط) :

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$.

1. أحسب u_1 ، u_2 و u_3 .
2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $v_n = 4n - 10$.

أ- عين طبيعة المتتالية (v_n) و استنتج أساسها .

3. لتكن المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــ : $w_n = u_n - v_n$

أ- برهن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم عين حدها الأول .

ب- عبر عن n بدلالة n و استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$

ج- أحسب نهاية (u_n) . ماذا تستنتج ؟

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

- بين أن : $S_n = 22\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + 2(n-5)(n+1)$

التمرين الرابع (07 نقاط):

I.لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x+2}$ حيث a و b عددان حقيقيان . و (C_g) تمثيلها البياني في المستو المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- عين a و b حيث (C_g) يشمل النقطة $A(\ln 2; \ln 2)$ و يقبل عند النقطة A مماسا موازيا لمحور الفواصل .

II.نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستو المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بين انه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x+2}$
2. أحسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ ، $-\infty$.
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين و (Δ') يطلب تعيين معادلة لكل منهما .
5. أثبت ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها .
6. بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة α حيث : $-1.7 < \alpha < -1.6$
7. أرسم (Δ) و (Δ') و (C_f)
8. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x) = [f(x)]^2$

- عين اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها .

بالتوفيق مع تحيات أستاذة المادة

تصحيح الامتحان التجريبي 3ع ت

2021/05/24

الموضوع الأول

تمرين 01:

$$\begin{cases} a+\bar{b} = 6+2i\sqrt{3} \\ \bar{a}-2b = -3+i\sqrt{3} \end{cases}$$

تعيين العددين a و b:

لدينا:
$$\begin{cases} a+\bar{b} = 6+2i\sqrt{3} \quad \dots\dots (\times 2) \\ \bar{a}-2b = -3+i\sqrt{3} \end{cases}$$

ومنه:
$$\begin{cases} 2a+2\bar{b} = 12+4i\sqrt{3} \\ a-2\bar{b} = -3-i\sqrt{3} \end{cases} +$$

$$\Rightarrow 3a = 9+3i\sqrt{3}$$ 0,25

$$a = 3+i\sqrt{3}$$

نعوض قيمة a في المعادلة (1):

$$\bar{b} = 6+2i\sqrt{3} - a$$
$$= 6+2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}$$
$$\bar{b} = 3+i\sqrt{3}$$ 0,25

إذا: $b = 3-i\sqrt{3}$

$$(a;b) = (3+i\sqrt{3} \,;\, 3-i\sqrt{3})$$

(2) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي:

$$z_A = 3+i\sqrt{3}$$

$|z| = 2\sqrt{3}$ $\quad \arg z_A : \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

إذا: $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ 0,25

$$z_A = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_B = \bar{z}_A = 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$$ 0,25

كتابة العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الأسي:

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{\cancel{2\sqrt{3}}\, e^{i\frac{\pi}{6}}}{\cancel{2\sqrt{3}}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$ 0,25

استنتاج طبيعة المثلث OAB:

لدينا: $\dfrac{z_A-z_O}{z_B-z_O} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ 0,25

أي: $\left|\dfrac{z_A-z_O}{z_B-z_O}\right| = \dfrac{OA}{OB} = 1$ 0,25

ومنه: $OA = OB$

ولدينا: $\arg\left(\dfrac{z_A-z_O}{z_B-z_O}\right) = (\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA}) = \dfrac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

إذا المثلث OAB متقايس الأضلاع.

تعيين z_I:

I مركز ثقل المثلث OAB معناه I مرجح الجملة المثقلة $\{(O;1)(A;1)(B;1)\}$

وبالتالي:
$$z_I = \frac{z_O+z_A+z_B}{3} = 2$$ 0,25

معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث:

الدائرة المحيطة بالمثلث OAB مركزها I ونصف قطرها OI:

$$(x-x_I)^2+(y-y_I)^2 = r^2 \qquad I(2;0)$$

$$(x-2)^2+y^2 = 4$$ 0,5 $\qquad OI = 2$

تبيين أن: $\left(\dfrac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{2020} * \left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{1441} = -1$

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{2020} = \left(\frac{2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^{2020} = e^{i\frac{2020}{6}\pi}$$

$$= e^{i\left(\frac{2016\pi}{6}+\frac{4\pi}{6}\right)}$$ 0,25

إذا القطران $[DI]$ و $[AB]$
متناصفان ومتعامدان
ومنه الرباعي $ADBI$ معين .

مساحة الرباعي $ADBI$:

$$S_{ADBI} = \frac{AB \times DI}{2}$$

$$AB = |z_B - z_A| = 2\sqrt{3}$$

$$DI = |z_I - z_D| = 2$$ 0,25

$$S_{ADBI} = \frac{2\sqrt{3} \times 2}{2} = 2\sqrt{3}\ (u.a)$$

تذكير:

مساحة المعين = $\frac{1}{2} \times$ حاصل ضرب طول قطريه

4)

$$(T): \quad \arg\left(\frac{z}{i\bar{z}}\right) = \arg(z_A)$$

تبيين أن: $C \in (\Gamma)$:

$z_C = i\,z_B$ نحقق . $\bar{z}_C = i(3 - i\sqrt{3})$

$$\bar{z}_C = 3i + \sqrt{3}$$ 0,25

ولدينا

$$\arg\left(\frac{z_C}{i\bar{z}_C}\right) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}+3i}{3+i\sqrt{3}}\right)$$

$$= \arg(\sqrt{3}+3i) - \arg(3+i\sqrt{3})$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$= \arg(z_A)$$

$$\arg(\sqrt{3}+3i) : \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ \sin\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} \end{cases} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\arg(3+i\sqrt{3}) : \begin{cases} \cos\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \end{cases} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$= e^{i1336\pi} \times e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1441} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{1441}$$

$$= e^{i\frac{1441\pi}{3}}$$ 0,25

$$= e^{i\left(\frac{1440\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= e^{i480\pi} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} \ldots (2)$$

إذا

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{2020} \times \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1441} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= e^{i\pi} = -1$$

3) D نظيرة O بالنسبة الى I :

تعيين لاحقة D :

لدينا: $\vec{OI} = \vec{ID}$ ومنه:

$$z_I - z_O = z_D - z_I$$

إذا $z_D = 2z_I$ 0,25

$$z_D = 4$$

طبيعة الرباعي $ADBI$:

لدينا:
$$\begin{cases} \frac{z_D + z_I}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

إذا القطران $[DI]$ و $[AB]$
متناصفان 0,25

ولدينا:

$$\frac{z_B - z_A}{z_D - z_I} = \frac{3 - i\sqrt{3} - 3 - i\sqrt{3}}{4 - 2}$$

$$= \frac{-2i\sqrt{3}}{2} = -i\sqrt{3}$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_I}\right) = (\vec{ID}; \vec{AB}) = -\frac{\pi}{2}$$

تم المحيد العشوائي وقانون احتماله:

شرح: 3 رجال ومحمد ليس معهم $X=0$

3 رجال ومحمد معهم $X=1$

$X=\{0;1\}$ 0.5

$P(X=0)=\dfrac{C_1^0\times C_6^3}{C_7^3}=\dfrac{4}{7}$ 0.5

$P(X=1)=\dfrac{C_1^1\times C_6^2}{C_7^3}=\dfrac{3}{7}$ 0.5

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

التمرين الثالث:

$f(x)=\dfrac{2x}{2x+1}$ $D_f=[0;1]$

0.25 تبيين أن الدالة f متزايدة:

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و: $f'(x)=\dfrac{2}{(2x+1)^2}>0$

ومنه f متزايدة

0.5 ① تمثيل الحدود

ب. التخمين: نلاحظ أن $U_0<U_1<U_2<U_3$

ومنه (U_n) متزايدة ومتقاربة نحو $\frac{1}{2}$.

البرهان بالتراجع أن: $0<U_n<\frac{1}{2}$

0.75 لدينا: $0<U_0=\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ ومنه الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض أن: $0<U_n<\frac{1}{2}$ صحيحة و نثبت أن $0<U_{n+1}<\frac{1}{2}$.

لدينا: $0<U_n<\frac{1}{2}$ و لدينا f متزايدة اذا: $f(0)<f(U_n)<f(\frac{1}{2})$

اذا: $0<U_{n+1}<\frac{1}{2}$

$f(0)=0$

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

ومنه: $C\in(\Gamma)$

طبيعة المجموعة (Γ):

لدينا: $\arg\left(\dfrac{z}{i\bar{z}}\right)=\arg(z_A)$

ومنه: $\arg(z)-\arg(i\bar{z})=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$

$\arg(z)-\arg(i)-\arg(\bar{z})=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$

$\arg z-\arg\bar{z}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$

$\arg z+\arg z=\dfrac{4\pi}{6}+2\pi k$

$2\arg z=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$ ومنه

0.25 $\arg z=\dfrac{\pi}{3}+\pi k$

$(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\dfrac{\pi}{3}+\pi k$

وبما أن: $C\in(\Gamma)$ فإن مجموعة النقط هي المستقيم (OC) ماعدا النقطة O.

التمرين الثالث:

II ① عدد الحالات هو: 0.25 $A_{12}^3=1320$

II) في حالة أن الأعضاء لم تقسم المهام:

عدد الحالات: 0.25 $C_{12}^3=220$

احتمال الأحداث:

$P(A)=\dfrac{C_1^1\times C_{11}^2}{220}=\dfrac{1}{4}$ 0.5

$P(B)=\dfrac{C_7^2\times C_5^1}{220}=\dfrac{21}{44}$ 0.5

$P(C)=\dfrac{C_7^1\times C_5^2+C_7^2\times C_5^1+C_7^3}{220}=\dfrac{21}{22}$ 0.5

$P(D)=\dfrac{C_5^1\times C_7^2+C_7^3}{220}=\dfrac{7}{11}$ 0.5

$$= 3^{n+1} \times \frac{\frac{2U_n}{2U_n+1}}{\frac{2U_n-1}{2U_n+1}}$$

$$= 3^{n+1} \times \frac{2U_n}{2U_n-1}$$

اذا:

$$V_{n+1} - 6V_n = 3^{n+1} \times \frac{2U_n}{2U_n-1} - 6\times 3^n \times \frac{U_n}{2U_n-1}$$

$$= 3^{n+1} \times \frac{2U_n}{2U_n-1} - 2\times 3\times 3^n \times \frac{U_n}{2U_n-1}$$

$$= 3^{n+1} \times \frac{2U_n}{2U_n-1} - 3^{n+1} \times \frac{2U_n}{2U_n-1}$$

$$= 0$$

استنتاج ان (V_n) هندسية:

لدينا: $V_{n+1} - 6V_n = 0$

ومنه: $V_{n+1} = 6V_n$

اذا: (V_n) هندسية اساسها $q=6$

وحدها الاول $V_0 = 3^0 \times \frac{U_0}{2U_0-1} = -\frac{1}{3}$ 0.25

عبارة الحد العام:

$V_n = V_0 \times q^n \Rightarrow V_n = -\frac{1}{3} \times 6^n$ 0.25

تبيان ان:

$$U_n = \frac{3^n \times U_n}{2U_n - 1}$$

لدينا:

$$V_n = 3^n \times \frac{U_n}{2U_n-1}$$

$$V_n(2U_n-1) = 3^n U_n$$

$$2V_nU_n - V_n - 3^n U_n = 0$$

ومنه الخاصية من اجل $(n+1)$ اذا

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فهي

صحيحة من اجل n.

اتجاه تغير U_n:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n}{2U_n+1} - U_n$$

$$= \frac{-2U_n^2 + U_n}{2U_n+1}$$

$$= \frac{U_n(-2U_n+1)}{2U_n+1}$$ 0.25

$U_n = 0$ معناه $U_{n+1} - U_n = 0$

او $U_n = \frac{1}{2}$

U_n	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$U_{n+1}-U_n$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ولدينا: $0 < U_n < \frac{1}{2}$

اذا: $U_{n+1} - U_n > 0$

ومنه (U_n) متزايدة

، (U_n) متزايدة ومحدودة من الاعلى

بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة. 0.25

(III

$$V_n = 3^n \times \frac{U_n}{2U_n-1}$$

تبين أن: $V_{n+1} - 6V_n = 0$

$$V_{n+1} = 3^{n+1} \times \frac{U_{n+1}}{2U_{n+1}-1}$$ 0.25

$$= 3^{n+1} \times \frac{\frac{2U_n}{2U_n+1}}{\frac{2\times 2U_n}{2U_n+1} - 1}$$

ومنه : $S = 3^0 + 3^1 + \dots + 3^n$

3^n : متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1

$$S = \left(\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right)$$

0,25

$$S_n = \frac{1-3^{n+1}}{-2}$$

التمرين الرابع :

$$g(x) = \frac{-x^2+x+1}{x-1} \qquad D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

أ/ دراسة تغيرات الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ و :

$$g'(x) = \frac{-x^2+2x-2}{(x-1)^2}$$

0,25

$g'(x) = 0$ معناه : $-x^2+2x-2=0$

$\Delta = -8 < 0$

ومنه $g'(x) < 0$ اذا الدالة g متناقصة تماما على مجالي تعريفها

جدول التغيرات 0,25

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$$

0,25

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim -x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ <}} g(x) = -\infty \ ; \ \lim_{\substack{x\to1 \\ >}} g(x) = +\infty$$

نبين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β :

$$U_n(2V_n - 3^n) = V_n$$

$$U_n = \frac{V_n}{2V_n - 3^n}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}\times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3}\right)\times 6^n - 3^n}$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{-2^n\times 3^n}{2\left(\frac{-1}{3}\right)\times 2^n\times 3^n - 3^n}$$

0,5

$$= \frac{1}{3}\times\frac{-2^n\times \cancel{3^n}}{\cancel{3^n}\left(\frac{-2}{3}\times 2^n - 1\right)}$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{-2^n}{\left(\frac{-2^{n+1}-3}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{-2^n\times\cancel{3}}{3^n\left(-2^{n+1}-3\right)}$$

$$= \frac{-2^n}{-2^{n+1}-3} = \frac{2^n}{2^{n+1}+3}$$

حساب نهاية U_n :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}+3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}$$

0,25

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2+\frac{3}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

حساب المجموع :

$$S = \frac{(2U_0-1)V_0}{U_0} + \frac{(2U_1-1)V_1}{U_1} + \dots + \frac{(2U_n-1)V_n}{U_n}$$

لدينا : $\frac{(2U_n-1)V_n}{U_n} = 3^n$

0,25

$\lim_{x \to 1} \ln x = 0$ و

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x-1+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ (0,25)

$= +\infty$

تبيين ان : $f'(x) = g(x)$ على مجال تعريفها

$f(x) = x-1+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$f'(x) = 1 + \frac{1(x-1)-1\times x}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x}$

$= 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x}$

$= 1 - \frac{1}{x(x-1)}$

(0,5) $= \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x-1}\right)$

$= \frac{1}{x}\left(\frac{x^2-x-1}{x-1}\right)$

$= \frac{-1}{x}\left(\frac{-x^2+x+1}{x-1}\right)$

$= \frac{-g(x)}{x}$

ومنه اشارة $f'(x)$ من اشارة $\frac{-g(x)}{x}$

(0,25) اشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$	α	0	1	β	$+\infty$
$-g(x)$	$-$	0 $+$	$+$	‖ $-$	0	$+$
x	$-$	$-$	0 $+$	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0 $-$		‖ $-$	0	$+$

$-1 < \alpha < 0$:

✓ الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[-1;0]$ و $g(-1) = \frac{1}{2}$ ، $g(0) = -1$

$g(0) \times g(-1) < 0$ (0,25) و

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل α حيث

$-1 < \alpha < 0$

✓ الدالة g مستمرة ورتيبة على $]1;2]$

$g(2) = -1$ (0,25) و :

$\lim_{x\to 1^>} g(-1) = +\infty$

و $0 \in]-1;+\infty[$ اذا حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة

$g(x)=0$ تقبل حل $\beta \in]-1;2]$ (0,25)

استنتاج اشارة $g(x)$:

(0,5) من جدول التغيرات نجد

x	$-\infty$	α	1	β	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0 $-$	‖	$+$ 0	$-$

II

$f(x) = x-1+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

حساب النهايات

$\lim_{x\to 0^<} f(x) = \lim_{x\to 0^<} x-1+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\infty$ (0,25)

$\lim_{x\to 1^>} f(x) = \lim_{x\to 1^>} x-1+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = +\infty$ (0,25)

ومنه (C_f) تقبل مستقيمين مقاربين

(0,5) معادلة كل منهما $x=0$; $x=1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x-1+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\infty$ (0,25)

لأن $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = 1$ (0,25)

ومنه الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;\alpha[\cup]\beta;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]\alpha;0[\cup]1;\beta[$

(0,25) جدول تغيرات f

x	$-\infty$ α 0		1 β $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$	//////	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow f(\alpha) \searrow -\infty$	//////	$+\infty \searrow f(\beta) \nearrow +\infty$

نبين أن $(\Delta): y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f):

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{|x|\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$$ (0,25)

ومنه (Δ) مقارب لـ (C_f)

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ):

اشارة الفرق: $f(x)-y$

$$f(x)-y=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$$

معناه $\frac{x}{x-1}=1$

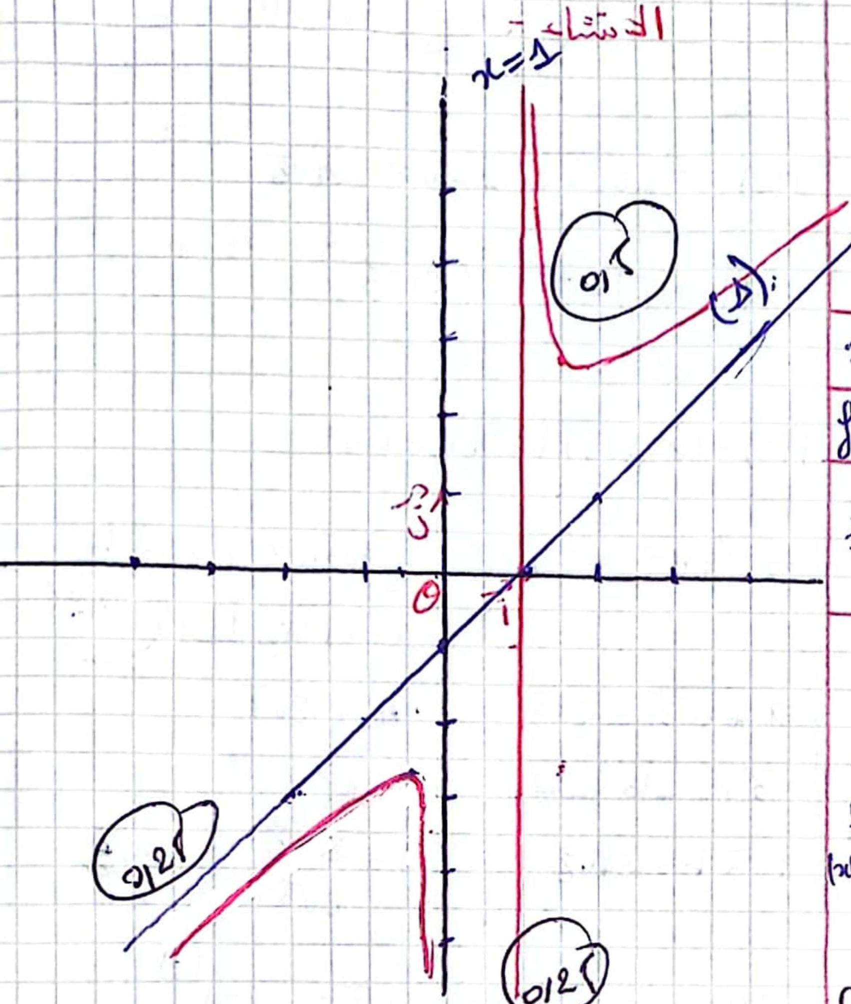
ومنه $\frac{x}{x-1}-1=0$ (0,5)

$$\frac{x-x+1}{x-1}=0 \Rightarrow \frac{1}{x-1}=0$$

لا توجد حلول للمعادلة.

x	$-\infty$ 0		1 $+\infty$
$f(x)-y$	$-$	//////	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	//////	(C_f) فوق (Δ)

الانشاء:



المناقشة البيانية:

حلول المعادلة: $f(x)=x-m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=x-m$ ومنه:

$-m\in]-\infty;-1[$ أي: $m\in]1;+\infty[$ المعادلة لها حل وحيد سالب (0,75)

$-m=-1$ أي $m=1$: المعادلة ليس لها حل

$-m\in]1;+\infty[$ أي: $m\in]-\infty;-1[$ المعادلة لها حل وحيد موجب

$Z_A = -2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\, e^{i\pi}$ 0,25

$Z_B = -\sqrt{3} + 3i$

$|Z_B| = 2\sqrt{3}$

$\arg(-\sqrt{3}+3i) : \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

$Z_B = 2\sqrt{3}\, e^{\frac{2\pi}{3} i}$ 0,25

$Z_C = \overline{Z_B} = 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ 0,25

تبيين أن: $\left(\dfrac{Z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{2020} + \left(\dfrac{Z_B}{Z_C}\right)^{1441} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\left(\dfrac{Z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{2020} = \left(\dfrac{\cancel{2\sqrt{3}}\, e^{i\pi}}{\cancel{2\sqrt{3}}}\right)^{2020} = e^{i\, 2020\pi} = e^{i(1010 \times 2\pi)} = 1$

$\left(\dfrac{Z_B}{Z_C}\right)^{1441} = \left(\dfrac{\cancel{2\sqrt{3}}\, e^{\frac{2\pi}{3} i}}{\cancel{2\sqrt{3}}\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}}\right)^{1441}$ 0,5

$= \left[e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}\right]^{1441} = \left[e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}\right]^{1441}$

$= e^{i\frac{5764\pi}{3}} = e^{\frac{5763\pi+\pi}{3} i}$

$= e^{\left(1921\pi+\frac{\pi}{3}\right)i}$

$= e^{\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)i}$

$= e^{\frac{4\pi}{3} i}$

$= \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}$

$= -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

الموضوع 02

1) لدينا: $P(z) = z^3 + 4\sqrt{3}\, z^2 + 24z + 24\sqrt{3}$

أ/ $P(-2\sqrt{3}) = 0$ 0,25

إيجاد العددين المركبين a و b:

$P(z) = (z+2\sqrt{3})(z^2+az+b)$

$= z^3 + az^2 + bz + 2\sqrt{3}z^2 + 2\sqrt{3}az + 2\sqrt{3}b$ 0,25

بالمطابقة نجد

$\begin{cases} a + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}a + b = 24 \\ 2\sqrt{3}\, b = 24\sqrt{3} \end{cases}$ $a = 2\sqrt{3}$ 0,25 $b = \dfrac{24\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 12$

$P(z) = (z+2\sqrt{3})(z^2+2\sqrt{3}z+12)$ (3

حل المعادلة $P(z)=0$:

$P(z)=0$ تكافئ: $\begin{cases} z+2\sqrt{3}=0 \\ \text{أو} \\ z^2+2\sqrt{3}z+12=0 \end{cases}$ 0,25

$z = -2\sqrt{3}$

$\Delta = -36 = 36i^2$

$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-2\sqrt{3}-6i}{2} = -\sqrt{3}-3i \\ z_2 = \dfrac{-2\sqrt{3}+6i}{2} = -\sqrt{3}+3i \end{cases}$ 0,25

$S = \{2\sqrt{3} ; -\sqrt{3}-3i ; -\sqrt{3}+3i\}$

كتابة Z_A ؛ Z_B ؛ Z_C على الشكل الأسي:

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{2020} + \left(\frac{z_B}{z_C}\right)^{1441} = 1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

كتابة العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + 3i + 2\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - 3i + 2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}+3i)}{(\sqrt{3}-3i)(\sqrt{3}+3i)}$$

0,25

$$= \frac{3 - 9 + 6i\sqrt{3}}{12}$$

$$= \frac{-6 + 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

التفسير الهندسي :

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow AB = AC$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{2\pi}{3}$$

0,25

$$\arg\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) : \begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$$

ومنه : المثلث ABC متساوي الساقين

0,25

③ عبارة الدوران R :

$$z' = z \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z \quad 0,25$$

استنتاج صورة A بالدوران R :

$$z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_A$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2\sqrt{3})$$

$$= -\sqrt{3} + i\,3 = z_B$$

$R(B) = D$ تعيين z_D :

$$z_D = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_B$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3} + 3i) \quad 0,25$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{3}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$z_D = \sqrt{3} + 3i \quad 0,25$$

كتابة z_D على الشكل الجبري :

$\cancel{|z_D| = \sqrt{12}}$

$$\cancel{\arg(z) : \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

التمرين الثاني

/I عدد الحالات الممكنة : $C_9^3 = 84$

قيم المتغير العشوائي X :

$$X = \{0; 1; 2\}$$

قانون الاحتمال

$$P(X=0) = \frac{C_7^3}{84} = \frac{35}{84} \quad 0,5$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 \times C_7^2}{84} = \frac{42}{84} \quad 0,5$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 \times C_7^1}{84} = \frac{7}{84} \quad 0,5$$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{35}{84}$	$\frac{42}{84}$	$\frac{7}{84}$

حساب $E(X)$: 0,5

$$E(X) = 0 \times \frac{35}{84} + 1 \times \frac{42}{84} + 2 \times \frac{7}{84}$$

$$= 56/84$$

II) عدد الحالات الممكنة: $A_9^3 = 504$

$$P(A) = \frac{A_4^3 + A_3^3}{504} = \frac{30}{504}$$ 0,5

$$P(B) = \frac{3 \times A_4^2 \times A_5^1 + A_4^3}{504} = \frac{204}{504}$$ 0,5

$A \cap B$: 3 وردات حمراء.

$$P(A \cap B) = \frac{A_4^3}{504} = \frac{24}{504}$$ 0,5

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P = \frac{30 + 204 - 24}{504} = \frac{210}{504}$$ 0,5

التمرين الثالث:

1/ $U_0 = 1$

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2n - 1$$

حساب U_1 ، U_2 ، U_3:

$$U_1 = \frac{1}{2}U_0 + 2\times 0 - 1 = \frac{-1}{2}$$ 0,25

$$U_2 = \frac{1}{2}U_1 + 2\times 1 - 1 = \frac{3}{4}$$ 0,25

$$U_3 = \frac{1}{2}U_2 + 2\times 2 - 1 = \frac{27}{8}$$ 0,25

2/ $V_n = 4n - 10$

أ/ طبيعة المتتالية (V_n):

لدينا: $V_{n+1} - V_n = 4$ 0,5

ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها $r = 4$

③ $W_n = U_n - V_n$

$= U_n - 4n + 10$

ب/ اثبات أن (V_n) هندسية:

$$W_{n+1} = U_{n+1} - 4(n+1) + 10$$

$$= \frac{1}{2}U_n + 2n - 1 - 4n - 4 + 10$$

$$= \frac{1}{2}U_n - 2n + 5$$ 0,75

$$= \frac{1}{2}(U_n - 4U_n + 10) = \frac{1}{2}W_n$$

ومنه (W_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول

$W_0 = U_0 - V_0 = 1 + 10 = 11$ 0,25

عبارة W_n بدلالة n:

$$W_n = 11\left(\frac{1}{2}\right)^n$$ 0,5

عبارة U_n بدلالة n:

$$U_n = W_n + V_n$$ 0,5

$$= 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$$

نهاية (U_n):

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$$ 0,5

$$= +\infty$$

نستنتج أن (U_n) متباعدة. 0,25

④ حساب المجموع:

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

لدينا:

$$U_n = W_n + V_n$$

ومنه:

$$S_n = W_0 + V_0 + W_1 + V_1 + \dots + W_n + V_n$$ 0,25

$$= (W_0 + W_1 + \dots + W_n) + (V_0 + V_1 + \dots + V_n)$$

متتالية هندسية   متتالية حسابية

$$g(x) = x+2 - \frac{4e^x}{e^x+2}$$:إذا

II) 1) تبيين أن : $f(x) = x-2+\frac{8}{e^x+2}$

$$f(x) = x+2 - \frac{4e^x}{e^x+2}$$

$$= x+2 - \frac{4(e^x+2)-8}{e^x+2}$$

0,5

$$= x+2 - \frac{4\cancel{(e^x+2)}}{\cancel{e^x+2}} + \frac{8}{e^x+2}$$

$$= x+2-4+\frac{8}{e^x+2}$$

$$= x-2+\frac{8}{e^x+2}$$ وهو المطلوب

حساب نهايتي الدالة f :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x-2+\frac{8}{e^x+2} = -\infty$$ 0,25

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x-2+\frac{8}{e^x+2} = +\infty$$ 0,25

دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على IR و

$$g'(x) = 1 - \frac{8e^x}{(e^x+2)^2}$$

$$= \frac{(e^x+2)^2 - 8e^x}{(e^x+2)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}+4e^x+4-8e^x}{(e^x+2)^2}$$

ومنه

أو نحسب Δ
$\Delta = 0$
اشارة العبارة من اشارة a +

$$= \frac{e^{2x}-4e^x+4}{(e^x+2)^2}$$ 0,5

متزايدة

$$= \frac{(e^x-2)^2}{(e^x+2)^2} > 0$$ تماما على IR

0,25

$$S = w_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + (n+1)\left(\frac{V_0+V_n}{2}\right)$$

$$= 11 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + (n+1)\left(\frac{-10+4n-10}{2}\right)$$ 0,5

$$= 22\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + (n+1)\left(\frac{4n-20}{2}\right)$$

$$= 22\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + 5(n+1)(2n-10)$$

0,25 وهو المطلوب

التمرين الرابع :

$$g(x) = ax+b - \frac{4e^x}{e^x+2}$$

تعيين العددين a و b :

$$g'(x) = a - \frac{8e^x}{(e^x+2)^2}$$ 0,25

لدينا : $(\mathcal{C}_g)$ يقبل مماس موازي لمحور الفواصل عند A معناه :

$$g'(\ln 2) = 0$$

ومنه :

$$g'(\ln 2) = a - \frac{8e^{\ln 2}}{(e^{\ln 2}+2)^2} = 0$$

إذا :

$$a - \frac{16}{16} = 0$$

0,25 ومنه $\boxed{a=1}$

$$g(x) = x+b - \frac{4e^x}{e^x+2}$$

ولدينا :

$$g(\ln 2) = \ln 2$$

$$g(\ln 2) = \ln 2 + b - \frac{8}{4} = \ln 2$$

$$\ln 2 + b - 2 = \ln 2$$

ومنه : $\boxed{b=2}$

0,25

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	0,25			$+\infty$

④ تبيين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين:

✓ لدينا: $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2}$

و: $\lim_{x \to -\infty} -\frac{4e^x}{e^x+2} = 0$

ومنه: 0,5

(C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x+2$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

✓ لدينا: $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x+2}$

و: $\lim_{x \to +\infty} \frac{8}{e^x+2} = 0$ 0,5

ومنه (C_f) يقبل المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

تبيين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف

بما أن $f'(x)$ انعدمت عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$ ولم تغير إشارتها إذاً النقطة A هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) $A(\ln 2; \ln 2)$ 0,5

⑧/ تبيين أن (C_f) تقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث

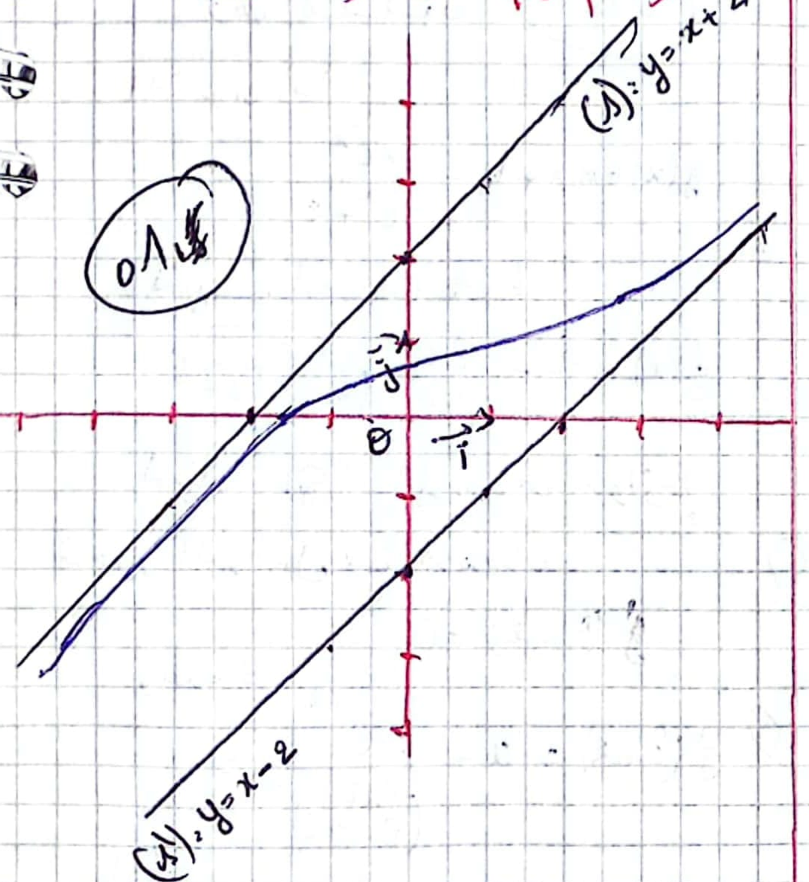
$-1,7 < \alpha < -1,6$

الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $[-1,7; -1,6]$ ولدينا: $f(-1,6) = 0,03$ و $f(-1,7) = -0,03$ أي: 0,75

$f(-1,6) \times f(-1,7) < 0$ ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيداً α

رسم (C_f)، (Δ) و (Δ').



III) $h(x) = [f(x)]^2$

اتجاه تغير الدالة h وجدول التغيرات،

الدالة h معرفة وقابلة للاشتقاق على IR ودالتها المشتقة هي:

$h'(x) = 2 \times f'(x) \times f(x)$ 0,25

ولدينا: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ $2f'(x) \geq 0$ إذا: إشارة $h'(x)$ من إشارة $f(x)$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h'(x)$	0.25	$-$	0	$+$	

ومنه الدالة f متناقصة على $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة على $[\alpha;+\infty[$

0.25

0.25

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} [f(x)]^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} [f(x)]^2 = +\infty$$

$$h(\alpha) = [f(\alpha)]^2 = 0$$

انتهى

بالتوفيق في بكالوريا

2021

للجميع دون

استثناء