الخليل في:
الأعدَاد والحسَاب

ثالثة ثانوي: شعبة رياضيات وتقني رياضي

تحتوي هذه المجلة على ملخص شامل ووافي لمحور الأعداد والحساب، موجه تلاميذ للسنة الثالثة ثانوي شعبتي الرياضي والتقني رياضي، بحيث تساعد هذه المجلة على تهيئة الطلاب لمواجهة تمارين هذا المحور دون توتر، لأن تمارين هذا المحور " الذي تنفرد به شعبة رياضي وتقني " ذات مستوى فكري لا بأس به.

محتويات المجلة:

- ملخص شامل لدرس:
  - القسمة في Z
  - الموافقات في Z
  - الأعداد الاولية
- طرائق في الحساب
- تمارين تدريبية
- تمارين تحضيرية للبكالوريا
- البكالوريات السابقة للرياضي والتقني

الأستاذ:
قويسم الخليل

@alkhalilmath

◄ ملاحظة هامة:

كل محتوى هذه المجلة من ممتلكات **الأستاذ: قويسم الخليل** ويخضع لحماية قوانين حقوق الطبع والنشر.

يجوز لك تنزيل المحتوى لاستخدامك الشخصي **فقط**.

لا يُسمح بتعديل المحتوى أو استخدامه لأغراض تجارية | شكرا لكم على تفهمكم

من أعمالي أيضا:

مجلة الخليل في:
الدوال العددية الناطقة

مجلة الخليل في:
الدوال الأسيـــــة

مجلة الخليل في:
الدوال اللوغاريتمية

مجلة الخليل في:
المتتاليات العدديـــة

مجلة الخليل في:
الدوال الأصلية والحساب التكاملي

مجلة الخليل في:
الإحتـــــمالات

مجلة الخليل في:
الأعداد والحساب

مجلة الخليل في:
الأعداد المركبة

1. ملخص الوحدة

01 قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

تعريف

a و b عددان صحيحان مع $a \neq 0$.

- a يقسم b معناه: $b = ak$ حيث: $k \in \mathbb{Z}$

◄ من التعريف:

- نقول a يقسم b أو a قاسم لـ b
- نقول a يقسم b أو b مضاعف لـ a
- نقرأ a يقسم b ونكتب $a \mid b$

◄ مثال:

لدينا: $30 = 5 \times 6$ ومنه: $5 \mid 30$

◄ ملاحظة:

للعددين الصحيحين a و $-a$ نفس القواسم في $\mathbb{Z}$

◄ خـــواص:

a، b، c، m و n أعداد صحيحة غير معدومة

1. إذا كان $a \mid b$ و $b \mid c$ فإنّ $a \mid c$
2. إذا كان $a \mid b$ فإنّ $a \mid mb$
3. إذا كان $a \mid b$ فإنّ $ma \mid mb$
4. إذا كان $a \mid b$ و $a \mid c$ فإن $a \mid mb + nc$

02 القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

مبرهنة

$a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{N}^*$.

- توجد ثنائية وحيدة $(q;r)$ من الأعداد الصحيحة حيث: $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$
- تسمى عملية البحث عن الثنائية $(q;r)$ بالقسمة الاقليدية لـ a على b
- يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل وباقي القسمة الاقليدية لـ a على b.

◄ مثال:

$84 = 4 \times 16 + 4$

احـــذر!

توجد عدة كتابات للعدد a على الشكل $bq + r$ لكن واحدة فقط التي تمثل القسمة للعدد a على b ،

مثلا:

- $74 = 14 \times 4 + 18$
- $74 = 14 \times 5 + 4$
- $74 = 14 \times 6 - 10$

المساواة $74 = 14 \times 5 + 4$ هي الوحيدة التي تمثل القسمة الاقليدية للعدد 74 على 14 لأنّ $0 \leq 4 < 5$

03 الأعداد الأولية

تعريف

n عدد طبيعي.

القول أن n عدد أولي معناه أنّ n يقبل قاسمين بالضبط في مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$: الـ 1 ونفسه.

◄ من التعريف:

- 0 غير أولي لأنه يقبل ما لا نهاية من القواسم.
- 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد هو 1.
- 2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد.
- مجموعة الاعداد الأولية غير منتهية

◄ خـــواص:

- كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا.
- كل عدد طبيعي غير أولي n أكبر تماما من 1 يقبل قاسما أوليا a حيث: $a \leq \sqrt{n}$

◄ الأعداد الأولية الأصغر من 100

الأعداد الأولية بين	
1 و 10	7، 5، 3، 2
11 و 20	19، 17، 13، 11
21 و 30	29، 23
31 و 40	37، 31
41 و 50	47، 43، 41
51 و 100	97، 89، 83، 79، 73، 71، 67، 61، 59، 53

◄ طريقة: (اختبار أولية عدد)

لمعرفة إذا كان عدد طبيعي n أوليا أم لا، نحسب $\sqrt{n}$:

- إذا كان $\sqrt{n}$ مربع تام فإنّ n غير أولي.
- إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي، نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب:
  - إذا وجدنا أحد البواقي معدوم نتوقف، ونجزم أنّ n غير أولي.
  - إذا كانت كل البواقي غير معدومة نجزم أنّ n أولي.

◄ مثال:

- نختبر أما إذا كان العدد 109 أوليا:

لدينا: $\sqrt{109} \approx 10.44$

لدينا الأعداد الأولية الأصغر من 10 هي: $\{2; 3; 5; 7\}$

بما أن 109 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية الأصغر من جذره فهو أولي

◄ تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية:

مبرهنة

كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر تماما من 1 يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية

◄ ملاحظة:

نقبل بدون برهان أن كل عدد طبيعي n يقبل تحليلا وحيـــدا إلى جداء عوامل أولية

◄ مثال:

- تحليل العددين 320 و 504

320	2
160	2
80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$320 = 2^6 \times 5$

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

◄ طريقة: (إيجاد عدد قواسم عدد طبيعي)

لإيجاد عدد قواسم عدد طبيعي a.

- نقوم بتحليله إلى جداء عوامل أولية.
- نضيف 1 إلى كل أس في التحليل، ثم نحسب جداء الأعداد المُحصل عليها.

◄ مثال:

لدينا: $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7^1$

إذن عدد قواسم العدد 504 هو

$(3+1)(2+1)(1+1) = \boxed{24}$

04 القاسم المشترك الأكبر لعددين

تعريف

a و b عددان طبيعيان غير معدومين. D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب.

$D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة لـ a و b.

- يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b
- نرمز للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b بـ: $PGCD(a; b)$

◄ من التعريف:

- ☒ $PGCD(a; a) = a$
- ☒ $PGCD(a; 1) = 1$
- ☒ $PGCD(a; 0) = a$ مع $a \neq 0$
- ☒ $D_0 = \mathbb{N}^*$

◄ مثال:

تعيين $PGCD(16; 10)$:

لدينا: $D_{16} = \{1; 2; 4; 8; 16\}$ و $D_{10} = \{1; 2; 5; 10\}$

ومنه: $D_{16} \cap D_{10} = \{1; 2\}$ إذن: $PGCD(16; 10) = 2$

◄ خـــواص:

a، b، c، m، n و λ أعداد طبيعية غير معدومة.

1. القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس
2. القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين a و b هو: جداء العوامل الأولية المُشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يُؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرّة واحدة وبأصغر أس
3. $PGCD(\lambda a; \lambda b) = \lambda \times PGCD(a; b)$

4 $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$ حيث: r هو باقي قسمة a على b مع $a \geq b$

5 $PGCD(a;b;c) = PGCD(\,PGCD(a;b)\,;c)$

6 إذا كان a يقسم m و n فإنّ a يقسم $PGCD(m;n)$

7 نضع: $\begin{cases} PGCD(a;b) = d \\ a = da' \\ b = db' \end{cases}$
يكون d القاسم المشترك الأكبر بين a و b إذا وفقط إذا كان a' و b' أوليان فيما بينهما

◄ طريقة: (كيفية إيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين)

☒ طريقة 01:

لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b نتبع الخطوات التالية:

- نعتبر a و b عددين صحيحين بحيث $b < a$.
- نقوم بقسمة a على b وليكن الباقي هو r_1
- ثم نقوم بقسمة b على r_1 وليكن الباقي هو r_2
- ثم نقوم بقسمة r_1 على r_2 ولنعتبر أن الباقي هو r_3
- ثم نقسم r_2 على r_3 ونكرر العملية حتى يكون الباقي هو 0
- القاسم المشترك الأكبر بين a و b هو آخر باقي غير معدوم.

☒ طريقة 02:

لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b نتبع الخطوات التالية:

- نقوم بتحليل العددين a و b إلى جداء عوامل أولية.
- القاسم المشترك الأكبر بين a و b هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأصغر أس.

◄ مثال:

- إيجاد $PGCD(74;496)$

لدينا:

$$496 = 74 \times 6 + 52$$
$$74 = 52 \times 1 + 22$$
$$52 = 22 \times 2 + 8$$
$$22 = 8 \times 2 + 6$$
$$8 = 6 \times 1 + \boxed{2}$$
$$6 = 2 \times 3 + 0$$

إذن: $PGCD(74;496) = \boxed{2}$

يعتبر إقليدس عالم رياضيات كبير بالرغم من أنه لايُعرف الكثير عن حياته المبكرة والشخصية، لقد ساهم بشكل كبير في مجال الرياضيات، عرف باسم أبو الهندسة، قام بتدريس الرياضيات في مصر في عهد بطليموس الأول، له كتاب اسمه العناصر، وهو من أهم كتب الرياضيات في كل العصور.

◄ تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين:

تعريف

a و b عددان صحيحان غير معدومين.

- القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث: $d = PGCD(|a|;|b|)$

◄ خاصية:

a ، b و λ أعداد صحيحة غير معدومة.

$$PGCD(\lambda a;\lambda b) = |\lambda| \times PGCD(a;b)$$

05 المضاعف المشترك الأصغر

تعريف

a و b عددان طبيعيان غير معدومين. M_a و M_b مجموعتا مضاعفات a و b على الترتيب.

$M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين الطبيعيين a و b

- يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b
- نرمز للمضاعف المشترك الأصغر لـ a و b بـ $PPCM(a;b)$

◄ من التعريف:

☒ المضاعف الوحيد لـ 0 هو 0

☒ $PPCM(a;a) = a$

☒ $PPCM(1;a) = a$

◄ خـــواص:

a ، b ، c ، m ، n و λ أعداد طبيعية غير معدومة.

1 المضاعف المشترك الأصغر للعددين الطبيعيين a وb هو: جداء العوامل الأولية المُشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يُؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرّة واحدة وبأكبر أس

2 $PPCM(\lambda a;\lambda b)=|\lambda|PPCM(a;b)$

3 $PPCM(a;b;c)=PPCM(PPCM(a;b);c)$

4 إذا كان $n\mid a$ و $m\mid a$ فإنّ $PPCM(m,n)\mid b$

◄ طريقة: (كيفية إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين)

لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b نتبع الخطوات التالية:

- نعتبر a و b عددين طبيعين بحيث $b<a$.
- نقوم بقسمة a على b وليكن الباقي هو r_1
- ثم نقوم بقسمة b على r_1 وليكن الباقي هو r_2
- ثم نقوم بقسمة r_1 على r_2 ولنعتبر أن الباقي هو r_3
- ثم نقسم r_2 على r_3 ونكرر العملية حتى يكون الباقي هو 0
- المضاعف المشترك الأصغر بين a و b هو:

$$\frac{a\times b}{\text{آخر باقي غير معدوم}}$$

◄ مثال:

- إيجاد $PPCM(782;221)$

$$782=221\times 3+119$$
$$221=119\times 1+102$$
$$119=102\times 1+\boxed{17}$$
$$102=17\times 6+0$$

ومنه:

$$PPCM(782;221)=\frac{782\times 221}{17}=\boxed{10166}$$

◄ تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين:

تعريف

a و b عددان صحيحان غير معدومين.

- المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم حيث:

$$m=PPCM(|a|;|b|)$$

◄ العلاقة بين القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر

◄ خاصية:

a و b عددان طبيعيان غير معدومين.

لدينا: $md=ab$ حيث: $\begin{cases} d=PGCD(a;b)\\ m=PPCM(a;b)\end{cases}$

06 الموافقات في $\mathbb{Z}$

تعريف

n عدد طبيعي غير معدوم.

- القول أنّ عددين صحيحين a وb متوافقان بتردد n يعني أنّ a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n
- ونرمز بـ: $a\equiv b[n]$ ونقرأ a يوافق b بتردد n

◄ ملاحظة:

من أجل كل عدد صحيح x لدينا: $x\equiv 0[1]$

مبرهنة

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم.

- a و b لهما نفس الباقي في القسمة الاقليدية على n إذا وفقط إذا كان $a-b$ مضاعف لـ n

نتيجة

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم.

- a و b متوافقان بتردد n إذا وفقط إذا كان $a-b$ مضاعف لـ n

◄ خـــواص:

a ، b ، c ، m ، n و λ أعداد طبيعية غير معدومة.

1 كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n بتردد n. حيث $n>1$

2 من أجل كل عدد صحيح a لدينا: $a\equiv a[n]$

3 إذا كان $a\equiv b[n]$ فإنّ $b\equiv a[n]$

4 إذا كان $\begin{cases} a\equiv b[n]\\ b\equiv c[n]\end{cases}$ فإنّ $a\equiv c[n]$

5	إذا كان $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases}$ فإنّ $a + c \equiv b + d[n]$
6	إذا كان $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases}$ فإنّ $ac \equiv bd[n]$
7	إذا كان $a \equiv b[n]$ فإنّ $ma \equiv mb[n]$
8	إذا كان $a \equiv b[n]$ فإنّ $am \equiv bm[nm]$
9	إذا كان $a \equiv b[n]$ فإنّ $a^m \equiv b^m[n]$

احـــذر!!

لا يمكننا اختصار موافقة مثل مساواة:

$2a \equiv 2b[n]$ لا يستلزم $a \equiv b[n]$

فمثلا: $20 \equiv 16[4]$

بينما هذه الموافقة $10 \equiv 8[4]$ خاطئة

◄ المعادلات من الشكل $ax \equiv b[n]$:

مبرهنة

a وn أعداد طبيعية غير معدومة، b و x عددان صحيحان

- المعادلة $ax \equiv b[n]$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$ إذا وفقط إذا كان b يقبل القسمة على $\text{PGCD}(a; n)$

◄ مثال:

نعتبر المعادلة: $4x \equiv 5[7] \ldots (*)$

لدينا: $5 \mid PGCD(4; 7)$ إذن $(*)$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$

07 التعداد

مبرهنة

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1.

- كل عدد طبيعي a أكبر أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل:

$$a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + \cdots + r_2x^2 + r_1x + r_0$$

حيث: $0 < q < x$ و $0 \leq r_a < x$

مع $a \in \{0; 1; 2; \ldots; n-1\}$

◄ التعداد ذو الأساس x :

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1، a عدد طبيعي.

يتمثل التعداد ذو الأساس x على المصطلحين التاليين:

- إذا كان $a < x$: يُمثل a برمز وحيد يُسمى رقما
- إذا كان $a \geq x$: من المبرهنة، a يُنشر بطريقة وحيدة وفق العدد x:

$$a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + \cdots + r_2x^2 + r_1x + r_0$$

حيث: $0 < q < x$ و $0 \leq r_a < x$

مع $a \in \{0; 1; 2; \ldots; n-1\}$

- يُمثل العدد a كما يلي:

$$a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2}\ldots r_1r_0}$$

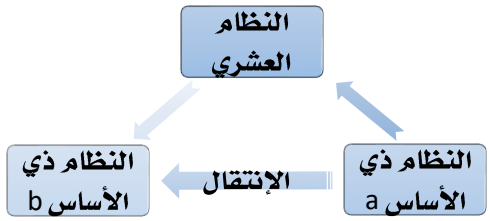
- الكتابة $a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2}\ldots r_1r_0}$ هي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x.

◄ مثال:

- $\overline{922}^{10} = (2) + (2 \times 10) + (9 \times 10^2) = 922$
- $\overline{11000110}^{2} = (1 \times 2) + (1 \times 2^2) + (1 \times 2^6) + (1 \times 2^7) = 198$
- $\overline{B20A}^{2} = \left(\underbrace{A}_{=10}\right) + (2 \times 12^2) + \left(\underbrace{B}_{=11} \times 12^3\right) = 19306$

◄ الانتقال من النظام ذي الأساس α إلى النظام ذي الأساس β:

- من النظام العشري يمكن النتقال إلى أي نظام والعكس صحيح



◄ مثال:

في هذا المثال سنقوم بتحويل $N = \overline{2024}^{10}$ المكتوب في النظام ذو الأساس 10 إلى النظام ذو الأساس 4

2024	4
0	506
2	126
2	31
3	7
3	1
1	0

إذن $N = \overline{2024}^{10} = \overline{133210}^{4}$

08 مبرهنات

① ◄ مبرهنة بيزو:

مبرهنة

a و b عددان صحيحان

- يكون a و b أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا وُجد عددان صحيحان u و v حيث:

$$au + bv = 1$$

◄ مثال:

لدينا: $(-2)(5) + (1)(11) = 1$

ومنه: $5 \wedge 11 = 1$

◄ خـــواص:

a ، b ، c و d أعداد طبيعية غير معدومة.

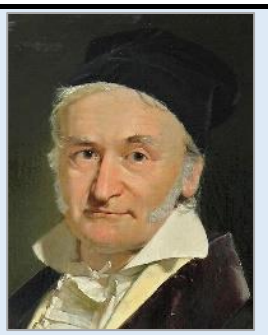
1. إذا كان d القاسم المُشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث: $au + bv = d$
2. إذا كان a أوليا فإنّ a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها
3. إذا كان a أوليا مع عددين صحيحن b و c فإنّ a أولي مع جدائهما $b \times c$

② ◄ مبرهنة غوص:

مبرهنة

a ، b و c ثلاث أعداد صحيحة غير معدومة.

- إذا كان a يقسم الجداء bc وكان a أوليا مع b فإنّ a يقسم c



ما لا تعرفه عن غاوس (غوص):

كان كارل فريدريك غاوس أحد آخر من أحاطوا بالمعرفة الشاملة لعلوم الرياضيات. ويمكن القول بأنه كان من أعظم علماء الرياضيات الذين شهدهم العالم، ومن أعماله البارزة التي نشرت هي كتاب "التحقيقات الحسابية"

◄ خـــواص:

a ، b و p ثلاث أعداد طبيعية غير معدومة مع p أولي

1. إذا كان p يقسم الجداء ab فإنّ p يقسم a أو p يقسم b
2. إذا كان a مضاعفا للعددين b و c وكان b وc أوليين فيما بينهما فإنّ a مضاعف للجداء bc

الأستاذ: قويسم الخليل

2. التمارين

01

تمارين مُتنوعة

شعبـــة رياضيـــات وتقني

ملاحظة!!

كل التمارين المرفقة في هذا الجزء ...

تتوفر على حلول مفصلة ومُمنهجة

التمرين 01 — قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

- عيّن الأعداد الصحيحة n في كل حالة من الحالات التالية:

1. $n-2$ يقسم 3
2. $2n+5$ يقسم 6
3. العدد $n+3$ مضاعف للعدد $3n+2$
4. الكسر $\frac{n+14}{n-3}$ عدد صحيح

التمرين 02 — قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1. عيّن الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $4x^2-y^2-35=0$
2. عيّن الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $5xy-y^2=49$

التمرين 03 — قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

a و n عددان صحيحان حيث a يقسم $n-1$ و n^2+n+3

1. بيّن أنّ a يقسم n^2-2n+1
2. استنتج أنّ a يقسم $3n+2$
3. بيّن إذن أنّ a يقسم 5
4. ما هي القيم الممكنة للعدد a ؟

التمرين 04 — قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1. عيّن الأزواج الطبيعية $(a;b)$ حيث: $ab=30$
2. استنتج الأزواج الطبيعية $(x;y)$ حيث: $xy-5x+3y=45$

التمرين 05 — قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

a و b عددان أوليان فيما بينهما

- بيّن أن العددين $(5a+b)$ و $(9a+2b)$ أوليان فيما بينهما

التمرين 06 — قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

a و b عددان طبيعيان غير معدومين، و d القاسم المشترك الأكبر بين a و b

- عيّن الثنائيات $(a;b)$ في كل حالة مما يلي:

1. $\begin{cases} a\times b=360 \\ d=6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} a^2-b^2=825 \\ d=5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} a+b=26 \\ a-b=d \end{cases}$
4. $\begin{cases} a+b=420 \\ d=84 \end{cases}$

التمرين 07 — قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

يربح عامل أكثر من 600 دج في اليوم

يقبض هذا العامل 20400 دج في مدة α يوم $(\alpha \in \mathbb{N})$

ويقبض 27600 في مدة β يوم $(\beta \in \mathbb{N})$

1. أوجد الراتب اليومي لهذا العامل
2. أوجد قيمة α و β

التمرين 08 — قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1. حلل العدد 2023 إلى جداء عوامل أولية، ثمّ عيّن الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2023
2. نضع $d=PGCD(a;b)$ و $m=PPCM(a;b)$

- عيّن كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $m^2+3d^2=2023$

التمرين 09 — الموافقات

نريد تصفيف تلاميذ ثانوية في الساحة

عندما ننشئ صفوفا ذات 45 تلميذا يبقى 44

وعندما ننشئ صفوفا ذات 50 تلميذا يبقى 49

وعندما ننشئ صفوفا ذات 75 تلميذا يبقى 74

- احسب N عدد تلاميذ الثانوية، علما أنّ محصور بين 1000 و1500

التمرين 10 — المعادلات من الشكل $ax+by=c$

1. عيّن d القاسم المشترك الأكبر للعددين 1626 و 306
2. عيّن ثنائية $(x_0;y_0)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق: $1626x-306y=6$

التمرين 11 — الأعداد الأولية

اختبر أولية الأعداد التالية: 651 ، 109 ، 277 و 371

التمرين 12 — الأعداد الأولية

في كل حالة مما يلي، هل العدد α و β أوليان فيما بينهما؟

1. $\alpha=128$ و $\beta=32$
2. $\alpha=13$ و $\beta=104$
3. $\alpha=7$ و $\beta=191$

التمرين 13 — الموافقات

- حل في $\mathbb{N}$ المعادلات التالية:

1. $8n\equiv 3[5]$
2. $5n\equiv 4[11]$
3. $7n\equiv -2[8]$
4. $12n\equiv 5[4]$
5. $8n\equiv 2[6]$

التمرين 14
المعادلات من الشكل $ax+by=c$

x و y عددان صحيحان، أوجد الثنائيات $(x;y)$ في كل حالة مما يلي:

1. $3x=8y$
2. $24(x-1)=15(y-3)$
3. $16(x-2)=18(y+3)$
4. $12x+9y=7$
5. $17x-4y=29$
6. $96x-132y=60$

التمرين 15
المعادلات من الشكل $ax+by=c$

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E):18x+4y=84$
2. عين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $xy>0$

التمرين 16
الأعداد الأولية

a ، b و n أعداد طبيعية غير معدومة حيث:
$a=2n^3+5n^2+4n+1$ و $b=2n^2+n$

1. بيّن أنّ $(2n+1)$ يقسم a و b
2. بيّن أن n أولي مع $(n+1)^2$ بطريقتين مختلفتين
3. استنتج $PGCD(a;b)$

التمرين 17
الموافقات

1. ادرس تبعا للقيم الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7
2. ادرس تبعا للقيم الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 10

التمرين 18
الموافقات

1. عيّن حسب القيم الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 11
2. عيّن قيم العدد الطبيعي n حيث: $6\times 1962^n+2023^{10n+2}+2021$ يقبل القسمة على 11

التمرين 19
المعادلات من الشكل $ax+by=c$

1. عيّن $PGCD(182;126)$
2. باستعمال خوارزمية اقليدس، عيّن عدد صحيحين α و β يحققان: $182\alpha-126\beta=14$
3. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية: $182x-126y=14$ ، حيث x و y عدان صحيحان

التمرين 20
التعداد

α، β و γ أعداد طبيعية غير معدومة

λ عدد طبيعي، يُكتب في نظام ذي الأساس 5 على الشكل $\overline{30\alpha\beta\gamma}^{5}$ ويُكتب في نظام ذي الأساس 7 على الشكل $\overline{55\alpha\beta}^{7}$

عيّن α، β و γ ، ثم اكتب λ في النظام السداسي

التمرين 21
التعداد

λ عدد طبيعي، يُكتب في نظام ذو الأساس 3 كما يلي: $\overline{xx0xxx1}^{3}$

1. عيّن قيم العدد الطبيعي x بحيث يكون $\lambda\equiv 3[10]$
2. اكتب العدد الطبيعي λ في النظام العشري

التمرين 22
المعادلات من الشكل $ax+by=c$

نعتبر المعادلة $(E)\ldots 20x+3y=301$ حيث x و y عددان صحيحان

1. اوجد العدد الصحيح y_0 حيث: $40+3y_0=301$
2. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)
3. من بين حلول المعادلة (E) ، عيّن الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ التي تحقق: $x^2+y-92=0$

التمرين 23
التعداد

N عدد طبيعي يكتب في نظام ذو الأساس 5 على الشكل: $\overline{310\alpha 3}^{5}$

- عيّن قيمة العدد الطبيعي α حتى يكون N قابلا للقسمة على 7

التمرين 24
الموافقات

1. عيّن الأعداد الصحيحة x حيث: $17\equiv 7x[9]$
2. استنتج في $\mathbb{Z}$ حلول المعادلة $(E):7x-9y=-19$
3. من بين حلول (E)، عيّن الحلول التي تحقق: $x\equiv 0[y]$

التمرين 25
خواص القاسم المشترك الأكبر

n، a و b أعداد طبيعية غير معدومة حيث:
$a=5n^2+7$ و $b=n^2+2$

1. بيّن أن كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم 3
2. بيّن أنّ $a\wedge b=3$ إذا وفقط اذا كان $n^2\equiv 1[3]$
3. استنتج حسب قيم n قيم $a\wedge b$

التمرين 26
خواص القاسم المشترك الأكبر

n عدد طبيعي، نعتبر العددين الصحيحين α و β حيث:
$\alpha=2n^3-14n+2$ و $\beta=n+3$

1. بيّن أنّ $\mathrm{PGCD}(\alpha;\beta)=\mathrm{PGCD}(\beta;10)$
2. ما هي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha;\beta)$؟

3) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n، بحيث يكون $PGCD(\alpha;\beta)=5$

التمرين 27
صحيح أو خطأ

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1) المعادلة $21x+14y=40$ لا تقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة

2) في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون: $\overline{3421}+\overline{1562}=\overline{5413}$

3) باقي القسمة الاقليدية للعدد: $1+3+3^2\ldots+3^{2011}$ على 7 هو 6

التمرين 28
الموافقات

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n=5^{n+1}-3^n$

1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعددين 3^n و 5^n على 8

2) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد v_n على 8

التمرين 29
المعادلات من الشكل $ax+by=c$

نعتبر المعادلة $(E)\ldots 2013x-1962y=54$ حيث x و y عددان صحيحان

1) احسب $PGCD(2013;1962)$

2) استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا

3) بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن: $x\equiv 0[6]$

4) استنتج حلا خاصا $(x_0;y_0)$ حيث: $74<x_0<80$ ثمّ حل المعادلة (E)

التمرين 30
الموافقات

1) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 10^n على 13

2) تحقق أنّ $(10^{2008})^2+10^{2008}+1\equiv 0[13]$

3) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $10^{2n}+10^n+1\equiv 0[13]$

التمرين 31
التعداد

نعتبر العدد الطبيعي n الذي كتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي: $n=\overline{11\alpha 00}$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$

1) عيّن α حتى يكون n قابلا للقسمة 3

2) - عيّن العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5

- استنتج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15

3) نأخذ $\alpha=4$، اكتب العدد n في النظام العشري

التمرين 32
التعداد

- إختر الإجابة الصحيحة مع التبرير:

العدد الطبيعي N يُكتب $\overline{3745}$ في نظام تعداد أساسه 8 ويُكتب $\overline{5\alpha 15}$ في نظام تعداد أساسه 7 من أجل:

أ/ $\alpha=6$

ب/ $\alpha=5$

ج/ $\alpha=4$

التمرين 33
الموافقات

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير:

◄ من أجل $n\in\mathbb{N}$، $n(n^2-1)$ مضاعف للعدد 3

التمرين 34
الموافقات

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير:

- x عدد صحيح،

إذا كان $x\equiv 3[7]$ و $x\equiv 1[3]$

فإنّ $x\equiv 3[21]$

التمرين 35
المعادلات من الشكل $ax+by=c$

1) حل المعادلة: $505x-673y=1$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان

(لاحظ أنّ $2019=3\times 673$ و $2020=4\times 505$)

2) بيّن أنه من أجل كل ثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإنّ x و y من نفس الإشارة.

التمرين 36
الموافقات

عيّن الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث، مع التبرير:

a ، b ، c و d أعداد طبيعية غير معدومة وأصغر من أو تساوي 9 ، $\overline{abcd}$ عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري.

من أجل كل الأعداد a ، b ، c و d: يكون العدد $\overline{abcd}$ يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا كان:

أ/ العدد $(a-b+c-d)$ يقبل القسمة على 11

ب/ العدد $(a+b+c+d)$ يقبل القسمة على 11

ج/ العدد $\overline{cd}$ المكتوب في النظام العشري يقبل القسمة على 11

التمرين 37
المعادلات من الشكل $ax+by=c$

1) حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $7x-2y=1$

2) بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حلا للمعادلة $7x-24y=12$ فإنّ x يكون مضاعفا للعدد 12

3) استنتج كل الثنائيات $(x;y)$ من الاعداد الصحيحة، حلولا للمعادلة $7x-24y=12$

التمرين 38
خواص الـ PGCD

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:

$\begin{cases} u_4=15 \\ m+d=42 \end{cases}$ حيث: $\begin{cases} m=PPCM(u_3;u_5) \\ d=PGCD(u_3;u_5) \end{cases}$

- عيّن الحدين u_3 و u_5 ثم استنتج u_0

التمرين 39
الموافقات

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ نضع:

$$S_n=\frac{7^{n+1}-1}{6}+\frac{(n+1)(3n-2)}{2}$$

1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية لـ 7^n على 9

2) ما هو باقي القسمة الاقليدية على 9 للعدد:

$1442^{2019}+1962^{1954}+1954^{1962}$

3) اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$6S_n-7u_n\equiv 0[9]$

التمرين 40
تمرين تحضيري

1)

أ/ ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية لكل من 3^n و 4^n على 7

ب/ برهن أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$، يكون العدد

$2\times 1998^{6n+4}+3\times 2020^{3n+2}+2023^{1444}$

مضاعفا لـ 7

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المُعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام: $u_n=2\times 3^n+3\times 4^n$

أ/ احسب بدلالة n، المجموع: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

ب/ ما هي قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها S_n قابلا للقسمة على 7؟

التمرين 41
تمرين تحضيري

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $8x+5y=1\ldots(E)$

1) جد حلا خاصا لـ (E)، ثمّ حل في $\mathbb{Z}^2$ هذه المعادلة

2) ليكن N عددا طبيعيا حيث يوجد عددان طبيعيان a و b يحققان: $\begin{cases} N=8a+1 \\ N=5b+2 \end{cases}$

أ/ بيّن أنّ الثنائية $(a;-b)$ حل للمعادلة (E)

ب/ جد باقي القسمة الاقليدية لـ N على 40

3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $8x+5y=100$

4) في القرن الثامن، دفع مجموعة من الأشخاص من الجنسين 100 قطعة نقدية لفندق، حيث دفع كل ذكر 8 قطع نقدية،ودفعت كل أنثى 5 قطع نقدية

- ما هو عدد الذكور وعدد الاناث في هذه المجموعة؟

التمرين 42
تمرين تحضيري

فيما يلي: n عدد طبيعي أكبر تماما من 5

1) a و b عددان طبيعيان حيث:

$a=n-2$ و $b=2n+3$

أ/ ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b؟

ب/ بيّن أنّ العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفا لـ 7

ج/ عين قيم n التي من أجلها يكون $PGCD(a;b)=7$

2) نعتبر العددين الطبيعين p و q

حيث: $p=2n^2-7n-15$ و $q=n^2-7n+10$

أ/ بيّن أن كل من p و q يقبل القسمة على $n-5$

ب/ عيّن تبعا لقيم n وبدلالة n، $\mathrm{PGCD}(p;q)$

التمرين 43
تمرين تحضيري

1)

أ/ ادرس حسب قيم القيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7

ب/ عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $19^{6n+3}-5^{6n+4}+4n^2+1$ قابل للقسمة على 7

2) N عدد طبيعي يكتب $\overline{1\lambda\lambda 0}^{5}$ في نظام ذا الأساس 5 حيث λ عدد طبيعي

أ/ عيّن العدد الطبيعي λ حتى يكون العدد N قابلا للقسمة على 35

ب/ اكتب N في النظام العشري

التمرين 44
تمرين تحضيري

1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 10

2) نضع من اجل كل $n\in\mathbb{N}$: $A_n=1963^{16n+2}+2\times 1999^{2n+1}+2023$

• بيّن أنه من اجل كل $n\in\mathbb{N}$، A_n يقبل القسمة على 10

3) عيّن قيم العدد الطبيعي بحيث:

$$\begin{cases} 7\times 3^{n+1}-1\equiv 0[10] \\ 16\leq n<24 \end{cases}$$

4) λ عدد طبيعي، يُكتب في نظام ذو الأساس 3 كما يلي: $\overline{xx0xxx1}$

أ/ عيّن قيم العدد الطبيعي x بحيث يكون $\lambda\equiv 3[10]$

ب/ اكتب العدد الطبيعي λ في النظام العشري

التمرين 45
تمرين تحضيري

1) عيّن مجموعة الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة لحلول المعادلة (E) حيث: $(E): 8x-5y=3$

2) ليكن m عددا صحيحا حيث الثنائية $(p;q)$ من الأعداد الصحيحة تحقق: $\begin{cases} m=8p+1 \\ m=5q+4 \end{cases}$

• بيّن أنّ الثنائية $(p;q)$ هي حل للمعادلة (E) واستنتج أنّ: $m\equiv 9[40]$

3) ليكن n عددا طبيعيا.

أ/ بيّن أنه من أجل كل k من $\mathbb{N}$ لدينا: $2^{3k}\equiv 1[7]$

ب/ ما هو باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^{1442} على 7 ؟

4)

أ/ حلل العدد 1998 إلى جداء عوامل أولية

ب/ استنتج الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 1998

ج/ عيّن الثنائيات من الأعداد الطبيعية حيث: $\begin{cases} d=\text{PGCD}(a;b) \\ m=\text{PPCM}(a;b) \end{cases}$ مع $m^2-34d^2=1998$

التمرين 46
تمرين تحضيري

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $2023x-1444y=7\ldots(E)$

أ/ اثبت أنّ العددان 2023 و 1444 أوليان فيما بينهما، ثم استنتج أنّ (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

ب/ باستعمال خوارزمية اقليدس، عيّن حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E)، ثمّ حل المعادلة (E)

2) بيّن أنه إذا كان الثنائية $(x;y)$ حل لـ (E) فإنّ y مضاعف للعدد 7

3)

أ/ عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7، ثمّ جد باقي القسمة الاقليدية للعدد $1444^{1444^{1444}}$ على 7

ب/ عيّن قيم n التي من أجلها يكون: $2021^n+2022^n+2023^n+2024^n+2025^n$ مضاعفا للعدد 7

4) (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما. حدها الأول u_0

u_0 ، u_1 ، u_2 بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لـ (u_n) حيث $(u_0;u_2)$ حل للمعادلة (E)

N عدد طبيعي يُكتب $\overline{u_0 0 u_1 0 u_2}$ في نظام التعداد الذي أساسه 8

أ/ عيّن u_0 ، u_1 ، u_2، ثم اكتب N في النظام العشري

ب/ هل العدد N من حدود المتتالية (u_n)

ج/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{n^2+11n+10}{2}$$

التمرين 47
تمرين تحضيري

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $11x-5y=2$

أ/ اثبت أنه اذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $y\equiv 4[11]$

ب/ استنتج حلول المعادلة (E)

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، نضع: $a=5n+2$ و $b=11n+4$

أ/ عيّن القيم الممكنة لـ d حيث: $d=\text{PGCD}(a;b)$

ب/ عيّن قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون $d=2$

ج/ استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما

3) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$

أ/ بيّن أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

ب/ استنتج حسب قيم n العدد D حيث: $D=\text{PGCD}(A;B)$

التمرين 48
تمرين تحضيري

1)

أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7

ب/ ما هو باقي القسمة الاقليدية لـ $2017^{4n+2}+2(2019^{6n+4})-3(2023^{2021})$ على 7

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y: $343x-648y=76\ldots(E)$

أ/ بيّن أنّ المعادلة تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

ب/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y حلول (E)

أ/ ما هي القيم الممكنة للعدد d

ب/ عيّن الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية بحيث يكون $d=76$

4) N عدد طبيعي.

• جد العددين الطبيعيين α و β حيث: $\begin{cases} N=\overline{\beta 1\alpha\beta}^{7} \\ N=\overline{\alpha 1\alpha\alpha\beta}^{5} \end{cases}$،

ثم اكتب N في نظام ذي الأساس 6

التمرين 49 تمرين تحضيري

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E)\dots (x+1)^2=9+5y$

أ/ لتكن الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E). بيّن أنّ: $x\equiv 1[5]$ أو $x\equiv 2[5]$

ب/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

2) بيّن أنه من أجل كل $k\in\mathbb{Z}$،

$$\text{PGCD}(5k^2+4k-1;5k+1)=\text{PGCD}(k-3;8)$$

3) حل في $\mathbb{N}^2$ الجملة: $\begin{cases} \overline{121}^{x}=\overline{59}^{y} \\ \text{PGCD}(x;y)=8 \\ x\equiv 1[5] \end{cases}$

التمرين 50 تمرين تحضيري

t، a و b أعداد طبيعية حيث: $1<t\leq a\leq b$

• عيّن الأعداد t، a و b علما أنه في النظام ذي الأساس t يكون: $\begin{cases} a+b=\overline{46}^{t} \\ a\times b=\overline{545}^{t} \end{cases}$

1) نعتبر المعادلة $(E)\dots 21x-17y=8$ حيث x و y عددين طبيعيين

أ/ عيّن الثنائية $(x_0;y_0)$ حلا خاصة للمعادلة (E)

ب/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

2)

أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 13

ب/ بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(\alpha;\beta)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ: $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 0[13]$

التمرين 51 تمرين شاامل

I) n عدد طبيعي:

1) ادرس حسب قيم n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7

2) $k\in\mathbb{N}$، عيّن باقي القسمة الاقليدية على 7 لكل من الأعداد:

5^{2023} ، 2023^{1444} ، $2021^{2023^{2025}}$ ، 5^{12k+6} ،

19^{18k+4} ، 40^{1962} ، 1962^{509} ، 125^{2k+1}

3) نضع: $A_n=4\times 5^{6n+3}+5^{2966}+2022^{2n+1}+1$

- برهن أنه من أجل كل n طبيعي A_n يقبل القسمة على 7

4) نضع: $B_n=5n\times 5^{6n+1}-5^{6n+2}+3n\times 19^{6n+2}$

أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

$$B_n\equiv 5^{6n+2}\times(4n-1)[7]$$

ب/ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون B_n يقبل القسمة على 7

II)

1) عيّن قيم العدد الطبيعي n حيث:

$$\begin{cases} 5^n+5^{6n+2}-5^{6n}+3n-2\equiv 0[7] \\ 5n\equiv 4[6] \end{cases}$$

2) عيّن قيم العدد الطبيعي n حيث:

$$5^n+6^n+7^n+8^n+9^n\equiv 0[7]$$

III) عيّن قيم العدد الطبيعي n في كل حالة:

1) $5^{6n}+n^2-2n-1\equiv 0[7]$

2) $2\times 5^{6n+2}-5^{6n}+2n^2-n-1\equiv 0[7]$

3) $\begin{cases} N=\overline{1n30201}^{5} \\ N\equiv 0[7] \end{cases}$

IV) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y: $1075x-1505y=645\dots(E)$

1) عيّن قيم العدد الصحيح x ، حيث: $5x\equiv 3[7]$

2) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1075 و1505

3) استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

4) باستعمال خوارزمية اقليدس، عيّن حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E)، ثم حل (E) بطريقتين مختلفتين

5) بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حلا للمعادلة $(F)\dots 5x-7y=14$ فإنّ x يكون مضاعفا للعدد 7، ثمّ استنتج حلول المعادلة (F)

6) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y ، حيث x و y حلول المعادلة (E)

أ/ ما هي القيم الممكنة للعدد d

ب/ عيّن الثنائية $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق:

$$\begin{cases} |x-y|\leq 3 \\ d\neq 1 \end{cases}$$

V)

1) حلل العدد 2150 إلى جداء عوامل أولية

2) استنتج عدد القواسم الطبيعية للعدد 2510 ثم عيّنها

3 نضع $D = PGCD(10750; 15050)$ و $M =$
$PPCM(10750; 15050)$

- احسب D و M

4 يربح عامل أكثر من 1100 د.ج في اليوم، يقبض هذا العامل 10750 د.ج في مدة α يوم، ويقبض 15050 د.ج في مدة β يوم، حيث α و β عددان طبيعيان

5 أوجد الراتب اليومي لهذا العامل

6 أوجد قيمة α و β

VI) نسمي (S) الجملة $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ حيث $n \in \mathbb{N}$

1 بيّن أن العدد 2015 حل للجملة (S)

2 إذا كان n_0 حلا لـ (S)، بيّن أنّ n حل لـ (S) يكافئ
$\begin{cases} n - n_0 \equiv 0[3] \\ n - n_0 \equiv 0[8] \end{cases}$

3 أثبت أنّ n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان $n \equiv 23[24]$، ثم حل الجملة (S) بطريقتين.

4 بمناسبة شهر رمضان المعظم أراد الأستاذ "لعور عبد الكريم" إجراء مسابقة فكرية بين تلاميذه، فإشترى مصاحف كجوائز، وأراد ترتيبهم في علب، فإذا استعمل علبا تتسع لـ 3 مصاحف بقي لديه مُصحفين، وإذا استعمل علبا تتسع لـ 8 مصاحف بقي لديه 7 مصاحف

- إذا علمت أنّ عدد المصاحف التي بحوزته محصور بين 100 و 130 مصحفا، ما هو عدد هذه المصاحف؟

02

البكالوريات السَابقة

لشعبة تقني رياضي

ملاحظة!!

كل التمارين المرفقة في هذا الجزء ...

تتوفر على حلول مفصلة ومُمنهجة

01 بكالوريا 2008

شعبة تقني رياضي | الموضوع الأول

n عدد طبيعي أكبر من 5

1. a و b عددان طبيعيان حيث $a = n - 2$ و $b = 2n + 3$
2. ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b؟
3. بيّن أنّ العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n + 5$ مضاعفا للعدد 7
4. عيّن قيم n التي من أجلها يكون $PGCD(a; b) = 7$
5. نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث:
$p = 2n^2 - 7n - 15$ و $q = n^2 - 7n + 10$
6. بيّن أنّ كل من p و q يقبل القسمة على $n - 5$
7. عيّن تبعا لقيم n وبدلالة n، $PGCD(p; q)$

02 بكالوريا 2008

شعبة تقني رياضي | الموضوع الثاني

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y:
$4x - 9y = 319 \dots (*)$

1. - تأكد أن الثنائية $(82; 1)$ حل لـ $(*)$
- حل المعادلة $(*)$
2. عيّن الثنائيات $(a; b)$ الصحيحة، حلول المعادلة:
$4a^2 - 9b^2 = 319 \dots (**)$
3. استنتج الثنائيات $(x_0; y_0)$ حلول المعادلة $(*)$ بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين

03 بكالوريا 2009

شعبة تقني رياضي | الموضوع الثاني

1. حل المعادلة التفاضلية $y' = \ln(2)\, y$
1. نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق $f(0) = 1$
- عيّن عبارة $f(x)$
2. n عدد طبيعي
أ/ ادرس بواقي القسمة الاقليدية على 7 للعدد 2^n
ب/ استنتج باقي القسمة الاقليدية على 7 للعدد $f(2009) - 4$
3. أ/ احسب بدلالة n، المجموع S_n حيث:
$S_n = f(0) + f(1) + \cdots + f(n)$
ب/ عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_n يقبل القسمة على 7

04 بكالوريا 2011

شعبة تقني رياضي | الموضوع الثاني

من أجل كل عدد طبيعي n، نضع:
$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

1. تحقق أنّ $4 \equiv -3[7]$، ثم بيّن أنّ $A_3 \equiv 6[7]$
2. أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 7
ب/ بيّن أنه إذا كان n فرديا فإنّ $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7، واستنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد A_{2011} على 7
ج/ ما هو باقي القسمة الاقليدية للعدد 1432 على 7؟

05 بكالوريا 2012

شعبة تقني رياضي | الموضوع الأول

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 11
2. ما هو باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11؟
3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $(4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012})$ يقبل القسمة على 11
4. عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $(2011^{2012} + 2n + 2)$ مضاعفا للعدد 11

06 بكالوريا 2012

شعبة تقني رياضي | الموضوع الثاني

نسمي (S) الجملة $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ حيث $x \in \mathbb{Z}$

1. بيّن أن العدد 153 حل للجملة (S)
2. إذا كان x_0 حلا لـ (S)، بيّن أنّ
x حل لـ (S) يكافئ $\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}$
3. حل الجملة (S)
4. يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب، فإذا استعمل علبا تتسع لـ 15 كتابا بقي لديه 3 كتب، وإذا استعمل علبا تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب
- إذا علمت أنّ عدد الكتب التي بحوزته محصور بين 500 و 600 كتابا، ما عدد هذه الكتب؟

07 بكالوريا 2013
شعبة تقني رياضي | الموضوع الثاني

x و y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $11x+7y=1$

1) أ/ عيّن $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة (E) الذي يحقق: $x_0+y_0=-1$

ب/ استنتج حلول المعادلة (E)

2) a و b عددان طبيعيان و S العدد الذي يحقق: $\begin{cases}S=11a+1\\S=7b+2\end{cases}$

أ/ بيّن أنّ $(a;-b)$ حل للمعادلة (E)

ب/ ما هو باقي القسمة الاقليدية للعدد S على 77؟

3) n عدد طبيعي باقي قسمته على 11 هو 1 وباقي قسمته على 7 هو 2

- عيّن أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n<2013$

08 بكالوريا 2015
شعبة تقني رياضي | الموضوع الأول

1) أ/ عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية للعدد 8^n على 13

ب/ استنتج باقي القسمة الاقليدية على 13 للعدد $42\times 138^{2015}+2014^{2037}-3$

2) أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+6)8^{2n}[13]$

ب/ عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv 0[13]$

09 بكالوريا 2016
شعبة تقني رياضي | الموضوع الأول

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $6x-7y=19$

حيث x و y عددان صحيحان

1) جد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) حيث: $x_0=y_0$ ثم حل المعادلة (E)

2) استنتج قيم العدد الصحيح λ والتي تحقق $\begin{cases}\lambda\equiv 24[7]\\\lambda\equiv 5[6]\end{cases}$، ثمّ عيّن باقي قسمة العدد λ على 42

3) عيّن جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث: $|x+y-1|\leq 13$

4)

أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7

ب/ عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n والتي تحقق الجملة: $\begin{cases}n-5^n\equiv 2020[7]\\n\equiv 1437[6]\end{cases}$

10 بكالوريا 2017
شعبة تقني رياضي | الموضوع الثاني

1) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي k، $4^{5k}\equiv 1[11]$

2) استنتج تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 11

3) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1$ يقبل القسمة على 11

4) عيّن قيم العدد الطبيعي n والتي يكون من أجلها العدد $2\times 2017^{5n+2}+n-3$ قابلا للقسمة على 11

11 بكالوريا 2017 الإستثنائية
شعبة تقني رياضي | الموضوع الأول

1) عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 5

2) استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد 1437^{2017} على 5

3) برهن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $48^{4n+3}-2\times 9^{2n+1}+1$ مضاعف للعدد 5

4) عيّن الأعداد الطبيعية n حتى يكون العدد $3^{4n}+27^n-4$ قابلا للقسمة على 5

12 بكالوريا 2019
شعبة تقني رياضي | الموضوع الثاني

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $5x-3y=1$

حيث x و y عددان صحيحان

أ/ تحقق أنّ الثنائية $(6n+2;10n+3)$ حل للمعادلة (E) حيث: n عدد طبيعي

ب/ استنتج أن العددين $6n+2$ و $10n+3$ أوليان فيما بينهما

2) نضع $a=10n+3$ و $b=3n+5$ وليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

أ/ بيّن أنّ $d=1$ أو $d=41$

ب/ بيّن أنه إذا كان $d=41$ فإنّ $n\equiv 12[41]$

3) ليكن العددان الطبيعيان $A=20n^2+36n+9$ و $B=6n^2+19n+15$

أ/ بيّن أنّ العددين A و B يقبلان القسمة على $2n+3$

ب/ جد بدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

13 بكالوريا 2020
شعبة تقني رياضي | الموضوع الأول

نعتبر المعادلتين $(E_1)\dots 693x-216y=738$

و $(E_2)\dots 77x-24y=82$ ، حيث x و y عددان صحيحان

1) جد $PGCD(693;216)$ واستنتج أنّ المعادلتين (E_1) و(E_2) متكافئتان

2) تحقق أن الثنائية $(2;3)$ حل للمعادلة (E_2) ثمّ أوجد حلولها في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

3) جد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E_2) التي تحقق $|y-x|\leq 54$

4) ليكن N عددا طبيعيا يكتب $\overline{\beta 68\alpha}$ في النظام ذي الأساس 9 ويكتب $\overline{1\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذي الأساس 6 حيث α و β عددان طبيعيان

- جد العددين α و β، ثمّ اكتب العدد N في النظام العشري

14 بكالوريا 2020
شعبة تقني رياضي | الموضوع الثاني

1)

أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 5

ب/ استنتج باقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد: $8^{2020}-2\times 3^{1441}-1$

2) من أجل كل عدد طبيعي n، نعتبر العدد الطبيعي a_n حيث: $a_n=3^{n+1}+4$

- عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $a_n\equiv 0[5]$

3) نعتبر العدد الطبيعي b_n حيث: $b_n=7a_n+5$

أ/ عيّن القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و b_n

ب/ بيّن أنّ $a_n\equiv 0[5]$ إذا وفقط إذا كان $b_n\equiv 0[5]$

ج/ استنتج الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون a_n و b_n أوليان فيما بينهما

15 بكالوريا 2021
شعبة تقني رياضي | الموضوع الأول

1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 9

2) عيّن باقي القسمة الاقليدية للعدد 2021^{1442} على 9

3) بيّن أنّ العدد $2021^{1442}+1691^{1954}-8$ مضاعف للعدد 9

4) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $5^{6n}+2021^{6n+1}+1691^{1954}-8$ مضاعف للعدد 9

5) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n=2021^{1442}+1691^{1954}+5n$

- عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $A_n\equiv 0[9]$

16 بكالوريا 2021
شعبة تقني رياضي | الموضوع الثاني

نعتبر المعادلة $(E)\dots 13x-9y=1$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان

1)

أ/ تحقق أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ: $x\equiv 7[9]$

ب/ استنتج حلول المعادلة (E)

2)

أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 5

ب/ نضع: $A_n = 3^{4n} + 3^{4n+1} + 3^{4n+2} - 3$، حيث n عدد طبيعي

- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، A_n يقبل القسمة على 5

3. بفرض أنّ $(x;y)$ حل للمعادلة (E) حيث: x و y عددان طبيعيان

- عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $n + 3^{y-x} + 2023^{2022}$ القسمة على 5

17 بكالوريا 2022

شعبة تقني رياضي | الموضوع الأول

a و b عددان طبيعيان حيث: $a = 2022$ و $b = 124$

1. عيّن باقي القسمة الاقليدية لكل من العددين a و b على 7

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7

2. بيّن أنّ العدد $a^a + b^b + 4$ يقبل القسمة على 7

3. نضع: من أجل كل عدد طبيعي n،

$A_n = 2021^n + 2022^n + 2023^n + 2024^n$

- بيّن أنّ $A_n \equiv 1 + 5^n + 6^n [7]$، ثمّ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $A_n + 1$ مضاعفا للعدد 7

18 بكالوريا 2022

شعبة تقني رياضي | الموضوع الثاني

نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$a = 5n + 2$$
$$b = n + 1$$
$$c = 9n + 2$$
$$d = PGCD(a;b)$$
$$d' = PGCD(b;c)$$

1. عيّن القيم الممكنة لكل من d و d'، ثم استنتج $PGCD(a;b;c)$

2. عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد b قاسما لـ a

3. نعتبر المعادلة: (E): $17x - 4y = 29$ حيث x و y عددان صحيحان

- بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 1 [4]$، ثم حل المعادلة (E)

4. عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $xy < 279$

19 بكالوريا 2023

شعبة تقني رياضي | الموضوع الاول

1.

أ/ عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7

2. استنتج باقي القسمة الاقليدية لـ 1444^{2023} على 7

3. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:

$1962n + 1444^{3n+1} \equiv 0 [7]$

4. نعتبر المعادلة (E) ... $7x - 6y = 4$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

تحقق أنّ الثنائية $(4;4)$ حل للمعادلة (E) ثمّ استنتج مجموعة حلولها

5. عيّن الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (E) والتي تحقق $2^{3x} + 2^y \equiv 3 [7]$

03

البكالوريات السَبابة

لشعبة رياضيات

ملاحظة!!

كل التمارين المرفقة في هذا الجزء ...

تتوفر على حلول مفصلة ومُمنهجة

01 بكالوريا 2008

شعبة رياضيات | الموضوع الأول

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث:

$$3x - 21y = 78$$

1. أ/ بيّن أنّ (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

ب/ - اثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 5[7]$

- استنتج حلول المعادلة (E)

2. أ/ ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7

ب/ عيّن الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق $5^x + 5^y \equiv 3[7]$

02 بكالوريا 2009

شعبة رياضيات | الموضوع الأول

x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي

A عدد طبيعي يُكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل: $A = \overline{5566}$

1. أ/ أنشر العبارة $(x+1)(5x^2+6)$ ثمّ أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أنّ

$$A = (5x^2+6)(2+2y)$$

ب/ احسب x و y إذا علمت أنّ x عدد أولي أصغر من 12، ثمّ اكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري

2. أ/ عيّن الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم 584

ب/ عيّن الأعداد الطبيعية a و b حيث: $a > b$ التي تحقق:

$$\begin{cases} a+b = 32 \\ a^2+b^2 = 584 \end{cases}$$

03 بكالوريا 2010

شعبة رياضيات | الموضوع الأول

1. نعتبر المعادلة $7x + 65y = 2009 \dots (1)$ حيث x و y عددان صحيحان

أ/ بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ y مضاعف للعدد 7

ب/ حل المعادلة (1)

2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 9

3. عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 2^{6n} - 1$

أ/ تحقق أنّ u_n يقبل القسمة على 9

ب/ حل المعادلة $(7u_1)x + (u_2)y = 126567 \dots (2)$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث: x و y عددان صحيحان

ج/ عيّن الثنائية $(x_0;y_0)$ حل (2) حيث: x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع $y_0 \geq 25$

04 بكالوريا 2010

شعبة رياضيات | الموضوع الثاني

1. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $3^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 13

2. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، يقبل كل من العددين $3^{3n+1} - 3$ و $3^{3n+2} - 9$ القسمة على 13

3. عيّن حسب قيم n، باقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 13، واستنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي p:

$$A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$$

أ/ من أجل $p = 3n$، عين باقي القسمة الاقليدية للعدد A_p على 13

ب/ برهن أنه إذا كان $p = 13n + 1$ فإنّ A_p يقبل القسمة على 13

ج/ عين باقي القسمة الاقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p = 3n + 2$

5. يكتب العددان الطبيعيان a و b في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي:

$a = \overline{1001001000}$ و $b = \overline{1000100010000}$

أ/ تحقق أنّ العددين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري

ب/ استنتج باقي القسمة الاقليدية لكل من العددين a و b على 13

05 بكالوريا 2011
شعبة رياضيات | الموضوع الثاني

1) نعتبر المعادلة: $13x - 7y = -1 \dots (E)$
حيث: x و y عددان صحيحان
- حل المعادلة (E)

2) عيّن الأعداد الصحيحة النسبية بحيث:
$$\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$$

3) ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13

4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في نظام ذي التعداد 9 كما يلي: $\overline{\alpha 00 \beta 086}$
حيث: α و β عددان طبيعيان $\alpha \neq 0$
- عيّن α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91

06 بكالوريا 2012
شعبة رياضيات | الموضوع الأول

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية:
$2011x - 1432y = 31 \dots (1)$

أ/ اثبت أنّ العدد 2011 أولي

ب/ باستعمال خوارزمية اقليدس، عيّن حلا خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1)، ثمّ حل المعادلة (1)

2)

أ/ عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7، ثمّ جد باقي القسمة الاقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7

ب/ عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:
$2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$

3) N عدد طبيعي يُكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث: α ، β ، γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta; \gamma)$ حل للمعادلة (1)
عيّن α، β و γ، ثم اكتب N في النظام العشري

07 بكالوريا 2013
شعبة رياضيات | الموضوع الأول

1) n عدد طبيعي، نعتبر العددين الصحيحين α و β حيث:
$\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$

أ/ بيّن أنّ $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = \text{PGCD}(\beta; 10)$
(يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر)

ب/ ما هي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha; \beta)$؟

ج/ عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n، بحيث يكون $PGCD(\alpha; \beta) = 5$

2)

أ/ ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 11

ب/ عيّن مجموعة قيّم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية:
$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$$

08 بكالوريا 2013
شعبة رياضيات | الموضوع الثاني

1)

أ/ عيّن الأعداد الطبيعية n والتي تحقق
$2n + 27 \equiv 0[n + 1]$

ب/ عيّن الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث:
$(b - a)(a + b) = 24$

ج/ استنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$

2) α و β عددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس خمسة على الشكل: $\alpha = \overline{10141}$ و $\beta = \overline{3403}$

أ/ اكتب العددين α و β في النظام العشري

ب/ عيّن الثنائية $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث:
$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$$

3)

أ/ عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و1434، ثمّ استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478

ب/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية:
$2013x - 1434y = 27$

09 بكالوريا 2014
شعبة رياضيات | الموضوع الأول

1) نعتبر المعادلة $(E) \dots 2013x - 1962y = 54$ حيث x و y عددان صحيحان

أ/ احسب $PGCD(2013; 1962)$

ب/ استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا

ج/ بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 0[6]$

د/ استنتج حلا خاصا $(x_0;y_0)$ حيث: $74 < x_0 < 80$ ثمّ حل المعادلة (E)

2) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشتـــــرك الأكبر للعددين x وy حيث: $(x;y)$ حل للمعادلة (E)

أ/ ما هي القيم الممكنة للعدد d؟

ب/ عيّن قيم العددين الطبيعيين a و b حيث: $671a - 564b = 18$ و $PGCD(a;b) = 18$

10 بكالوريا 2015

شعبة رياضيات | الموضوع الأول

1)

أ/ عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7

ب/ استنتج باقي القسمة الاقليدية على 7 للعدد $[1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}]$

2)

أ/ بيّن أن 89 عدد أولي

ب/ عيّن كل القواسم الطبيعية للعدد 7832

ج/ بيّن أنّ العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما

3) x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسماهما المشترك الأكبر هو 2

- عيّن x و y إذا علمت أنّ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$

4) a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b وa أولي مع c

أ/ باستعمال مبرهنة بيزو، برهن أنّ a أولي مع $b \times c$

ب/ باستعمال الاستدلال بالتراجع اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $PGCD(a;b^n) = 1$

(يُرمز PGCD إلى القاسم المشترك الأكبر).

ج/ استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و1954^{1962}

11 بكالوريا 2016

شعبة رياضيات | الموضوع الثاني

1)

أ/ ادرس حسب قم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الاقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11

ب/ برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ مُضاعف للعدد 11

2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $7x - 3y = 8$ حيث x و y عددان طبيعيان

أ/ حل المعادلة (E)

ب/ d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E)

- ما هي القيم الممكنة للعدد d؟

- عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول (E) من أجل $d = 4$

ج/ جد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0[11]$

12 بكالوريا 2017

شعبة رياضيات | الموضوع الأول

1) نعتبر المعادلة (E) ... $104x - 20y = 272$ ، ذات المجهول $(x;y)$ ، حيث x و y عددان صحيحان

أ/ احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 ثمّ بيّن أن المعادلة (E) تقبل حلولا

ب/ بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 3[5]$، ثم استنتج حلول المعادلة (E)

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4، ويُكتب $\overline{1\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 حيث α و β عددان طبيعيان

- عيّن α و β ، ثم اكتب λ في النظام العشري

3) تحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أولي

ثمّ عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $2m - d = 2017$

حيث: $d = PGCD(a;b)$ ، $m = PPCM(a;b)$

13 بكالوريا 2017 الإستثنائية

شعبة رياضيات | الموضوع الأول

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $63x + 5y = 159$ ... (E)

1) تحقق أنّ العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما، ثمّ بيّن أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا

2) برهن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 3[5]$، ثمّ استنتج حلول المعادلة (E)

3) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{5\alpha 0\alpha}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ويكتب $\overline{\beta 10\beta 0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5

- جد العددين الطبيعين α و β ثم اكتب $\lambda + 2$ في النظام العشري

4)

أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 5

ب/ عيّن العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$ القسمة على 5 حيث: $(x;y)$ حلول المعادلة (E) و x عدد طبيعي

14 بكالوريا 2018

شعبة رياضيات | الموضوع الثاني

1) α و β عددان طبيعيان بحيث: $\begin{cases} \alpha + \beta = 4035 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$

- عيّن العددين α و β ثم بيّن أنّ العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما

2) عيّن كل الثنائيات الصحيحة $(x;y)$ التي تحقق المعادلة: $1009x - 2017y = 1$

3) عيّن الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة $\begin{cases} a \equiv 2019[2017] \\ a \equiv 2019[1009] \end{cases}$

4)

أ/ n عد طبيعي، ادرس تبعا لقيم n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9

ب/ L عدد طبيعي يُكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي: $L = \overline{\underbrace{111\ldots1}_{\text{2018 مرة}}}$

- عيّن باقي القسمة الاقليدية للعدد $42L$ على 9

15 بكالوريا 2020

شعبة رياضيات | الموضوع الأول

ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1

نعتبر الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث:

$a = 4n + 1$ ، $b = 6n + 1$ و $c = 3n + 2$

1) اثبت أنّ العددين a و b أوليان فيما بينهما

2) نسمي α القاسم المشترك الأكبر للعددين a و c

- اثبت أن α يقسم 5، ثمّ عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $\alpha = 5$

3) نسمي β القاسم المشترك الأكبر للعددين a و bc

أ/ اثبت أنّ α يقسم β

ب/ اثبت أنّ العددين β و b أوليان فيما بينهما، ثمّ استنتج أنّ $\alpha = \beta$

4) نعتبر العددين الطبيعين A و B حيث:

$A = 4n^2 - 3n - 1$ و $B = 18n^3 - 3n^2 - 13n - 2$

أ/ بيّن أنّ كلا من A و B مضاعف للعدد $(n-1)$

ب/ نضع $d = PGCD(A;B)$، عبّر حسب قيم α عن d بدلالة n. (لاحظ أنّ $bc = 18n^2 + 15n + 2$)

16 بكالوريا 2021

شعبة رياضيات | الموضوع الأول

1) نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$:

$42x - y = 38 \ldots (E)$

حيث x و y عددان صحيحان

- حل المعادلة (E) علما أنّ الثنائية $(1;4)$ حل لها

2) a ، b و c أعداد طبيعية حيث a غير معدوم

العدد الطبيعي N يُكتب $\overline{ab0cb}$ في نظام تعداد أساسه 5 ويُكتب $\overline{a7c5}$ في نظام تعداد أساسه 8

أ/ بيّن أنّ a ، b و c تحقق $113a = 3(c - 42b + 151)$ ثمّ استنتج أنّ $a = 3$

ب/ جد العددين الطبيعيين b و c ثمّ اكتب العدد N في النظام العشري

3)

أ/ ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 6

ب/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $2021^{2n} + 1441^n + 4$ مضاعف للعدد 6

ج/ نضع: $A_n = 2021^{2n} + 1441^n + 2 \times 1442^n$

- جد قيم n التي من أجلها يكون $A_n \equiv 0[6]$

17 بكالوريا 2022

شعبة رياضيات | الموضوع الأول

1)

أ/ عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7

ب/ بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n، $6^{2n} \equiv 1[7]$، ثم استنتج بواقي القسمة الاقليدية للعدد 6^n على 7

2 بيّن أنّ العدد $(2021^{2022} + 1962^{1443})^{1954} - 2$ يقبل القسمة على 7

3 نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $a_n = 2^n + 6^n$ و $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$

أ/ استنتج، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الاقليدية للعدد a_n على 7

ب/ بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n، $S_{n+6} \equiv S_n[7]$

ج/ اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

$S_n \equiv 2^{n+1} + 3 \times 6^{n+1} + 3[7]$

ثم استنتج قيم n بحيث $S_n \equiv 0[7]$

18 بكالوريا 2022

شعبة رياضيات | الموضوع الثاني

n عدد طبيعي،

نضع $A_n = n^3 + 5n^2 + 7n + 9$ و $B_n = n + 2$

1

أ/ بيّن أن $pgcd(A_n; B_n) = pgcd(B_n; 7)$

ب/ استنتج القيم الممكنة لـ $pgcd(A_n; B_n)$

ج/ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون A_n و B_n أوليان فيما بينهما

2 نعتبر المعادلة $(E) \dots 29 = A_2x - B_2y$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ/ بيّن أنه إذا كانت $(x; y)$ حلا لـ (E) فإنّ $x \equiv 3[4]$

ب/ عيّن حلول المعادلة (E)

3

أ/ استنتج حلول المعادلة $(E') \dots 51x - 4y = 45$

ب/ عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') حيث $|y - 12x| \leq 3$

19 بكالوريا 2023

شعبة رياضيات | الموضوع الأول

1 نعتبر المعادلة $16x + 361y = 818$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

2 تحقق أنّ الثنائية $(6; 2)$ حل للمعادلة (E) ثمّ استنتج مجموعة حلولها

3 عيّن كل الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $|x + 23y| \leq 4$

4 P عدد طبيعي يكتب $\overline{5\alpha\beta0}$ في نظام التعداد الذي أساسه 7 ويُكتب $\overline{\beta\alpha87}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9، حيث α و β عددان طبيعيان

• عيّن α و β ثمّ اكتب P في النظام العشري

5 حلل العدد 2023 إلى جداء عوامل أولية، ثمّ عيّن الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2023

6 نضع $d = PGCD(a; b)$ و $m = PPCM(a; b)$

• عيّن كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $m^2 + 3d^2 = 2023$

20 بكالوريا 2023

شعبة رياضيات | الموضوع الثاني

1

أ/ عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 11، ثمّ استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد 1945^{2023} على 11

2 عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة

$$\begin{cases} n \equiv 2023[5] \\ 3n + 9^n \equiv 1444[11] \end{cases}$$

3 (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = \frac{3}{2}$، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 9u_n - 16n + 6$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$v_n = 4u_n - 8n + 2$

4 بيّن أنّ (v_n) هندسية أساسها 9 يُطلب تعيين حدها الأول

5 عيّن عبارة v_n بدلالة n، ثمّ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 2 \times 9^n + 2n - \frac{1}{2}$

6 نضع: من أجل كل عدد طبيعي n،

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

احسب S_n بدلالة n ثمّ استنتج أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n = \frac{1}{4}\left(9^{n+1} + 4n^2 + 2n - 3\right)$

7 بيّن أنه: من أجل كل عدد طبيعي n،

$4T_{5n} - n^2 + n + 5 \equiv 0[11]$

3. حلول التمارين

هذه نسخة الكترونية **مجانية** موجهة لتلاميذ البكالوريا | جميع الشعب العلمية

حيث تتوفر النسخة **المدفوعة** على:

- حلول مفصلة لجميع التمارين الواردة في المجلة

سعر النسخة **المدفوعة هو:** 500دج (50نلف)

وللحصول عليها تواصل معي عبر:

- صفحتي على فيسبوك: facebook.com/alkhalil.math
- التلغرام: https://t.me/khalilGHMath
- الـWhatsApp: +213554060730

@الخليل للرياضيات

◄ ملاحظة هامة:

كل محتوى هذه المجلة من ممتلكات **الأستاذ: قويسم الخليل** ويخضع لحماية قوانين حقوق الطبع والنشر.

يجوز لك تنزيل المحتوى لاستخدامك الشخصي **فقط**.

لا يُسمح بتعديل المحتوى أو استخدامه لأغراض تجارية | شكرا لكم على تفهمكم

من أعمالي أيضا:

مجلة الخليل في:
الدوال العددية الناطقة

مجلة الخليل في:
الدوال الأسيـــــة

مجلة الخليل في:
الدوال اللوغاريتمية

مجلة الخليل في:
المتتاليات العددية

مجلة الخليل في:
الدوال الأصلية والحساب التكاملي

مجلة الخليل في:
الإحتـــــمالات

مجلة الخليل في:
الأعداد والحساب

مجلة الخليل في:
الأعداد المركبة