لإيجاد القاسم الأكبر المشترك PGCD للعددين a و b

نتبع الخطوات التالية (حيث $a > b$) :

❖ خوارزمية إقليدس :

1) نجز عملية القسم الإقليدية لـ a على b نسمي الباقي r_1 و الحاصل q_1 .

2) نجز عملية القسمة الإقليدية لـ b على r_1 نسمي الباقي r_2 و الحاصل q_2 . وهكذا يكون PGCD لـ b و a آخر باقي غير معدوم .

مثال : أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1078 و 322 باستعمال خوارزمية اقليدس

	a	b	الباقي
1	1078	322	112
2	322	112	98
3	112	98	14
4	98	14	0

$$1078 = 3 \times 322 + 112$$
$$322 = 2 \times 112 + 98$$
$$112 = 1 \times 98 + 14$$
$$98 = 14 \times 7 + 0$$

$$\boldsymbol{PGCD(1078; 322) = 14}$$

لإثبات أن عددان هما أوليان فيما بينهما ، نتبع الخطوات التالية

1) نحسب PGCD لهذين العددين .

2) إذا كان PGCD يساوي 1 ، فنقول عن العددين أنهما اوليان فيما بينهما .

مثال : اثبث أن العددان 19 و 27 أوليان فيما بينهما

	a	b	الباقي
1	27	19	8
2	19	8	3
3	8	3	2
4	3	2	1
5	2	1	0

$$27 = 19 \times 1 + 8$$
$$19 = 8 \times 2 + 3$$
$$8 = 3 \times 2 + 2$$
$$3 = 2 \times 1 + 1$$
$$2 = 1 \times 2 + 00$$

$$\boldsymbol{PGCD(27; 19) = 1}$$

للحصول على كسر غير قابل للإختزال مباشرة بعد عملية اختزال واحدة ، نتبع الخطوات التالية :

1) نحسب PGCD لكل من البسط و المقام

2) نقسم كلا من البسط و المقام على PGCD

3) نتحقق كلا من البسط و المقام لكسر المختزل انهما عددان اوليان فيما بينهما .

مثال : اختزل الكسر $\frac{60}{45}$ ليصبح كسر غير قابل للإختزال

بعد اتباع الخطوات السابقة نجد أن : $PGCD(60\,;45) = 15$

و منه : $\frac{60}{45} = \frac{4\times15}{3\times15} = \frac{4}{3}$ و بما أن : $PGCD(4\,;3) = 1$

فإن : $\frac{4}{3}$ غير قابل للإختزال .

تذكير بالمكتسبات القبلية

$$\frac{a}{k} - \frac{b}{k} = \frac{a-b}{k} \qquad \frac{a}{k} + \frac{b}{k} = \frac{a+b}{k}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad-bc}{cd} \qquad \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

مثال 01 : أحسب العبارة التالية ثم اختزل ان أمكنك ذلك

$$\boldsymbol{A = \frac{2}{7} - \frac{3}{7} \times \frac{8}{21} = \frac{6}{49}} \quad ; \quad \boldsymbol{B = \left(\frac{7}{6} - \frac{3}{4}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{1}{3}}$$

مثال 02 : أعط الكتابة العلمية لـ A و B

$$\boldsymbol{A = 5,2 \times 10^{-3} + 6,4 \times 10^{-2} + 0,0034}$$
$$\boldsymbol{A = 7,26 \times 10^{-2}}$$

$$\boldsymbol{B = \frac{5 \times 10^2 + 3 \times 10^3}{1,4 \times 10^{-4}} = 2,50 \times 10^7}$$

خواص جذور التربيعية

$\sqrt{a^2} = a$	$(\sqrt{a})^2 = a$
$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$	$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$\sqrt{ab^2} = \sqrt{a} \times \sqrt{b^2} = b\sqrt{a}$$

لحل المعادلات من الشكل $x^2 = a$ ، نتبع مايلي:

1) إذا كان $a > 0$ فإن المعادلة لها حلان : $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$
2) إذا كان $a = 0$ فإن المعادلة لها حل وحيد هو 0
3) إذا كان $a < 0$ فإن المعادلة ليس لها حل

مثال : حل المعادلة $x^2 = 7$ و $x^2 = -4$

بما أن $7 > 0$ فإن المعادلة لها حلان هما : $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$

بما أن $-4 < 0$ فإن المعادلة ليس لها حل

لتبسيط العدد غير الناطق $\sqrt{a}$ ، نتبع الخطوات التالية :

1) نكتب العدد a على شكل جداء مربع تام أي: $a = b^2 \times c$
2) نستعمل خواص الجذور التربيعية المذكورة أعلاه ، لكتابته على شكل $c\sqrt{b}$

مثال : كتابة على الشكل $a\sqrt{b}$ العدد $\sqrt{50}$ حيث : a و b عددان طبيعيان و b أصغر عدد ممكن

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{5^2 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

لتبسيط مجموعة جذور، نتبع مايلي:

1) نكتب إن أمكن كل جذر على الشكل $a\sqrt{b}$
2) نستخرج $\sqrt{b}$ كعامل مشترك بإستخدام الخاصية التوزيعية

مثال : بسط العبارة التالية $\sqrt{50} + \sqrt{98}$

لدينا : $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

ومنه : $\sqrt{50} + \sqrt{98} = 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = \sqrt{2}\,(7+5)$

$= 12\sqrt{2}$

لجعل مقام النسبة $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ عددا ناطقا

1) نقوم بضرب كلا من البسط و المقام النسبة في $\sqrt{b}$
2) نقوم بعد ذلك بتبسيط الكسر ان أمكن ذلك

مثال : اكتب على شكل كسر مقامه عدد ناطق $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

تذكير بالمكتسبات القبلية

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$(a^n)^m = a^{(n\times m)}$
$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$(ab)^n = a^n \times b^n$
$a^0 = 1$	$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$1^n = 1$	$a^1 = a$

مثال: أكتب الناتج على أبسط شكل :

$\sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5} = 6\sqrt{5}$; $A = \sqrt{125} + \sqrt{45} = 8\sqrt{5}$

$\dfrac{\sqrt{44}}{2} = \dfrac{\sqrt{4\times 11}}{2} = \dfrac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$ | $\dfrac{\sqrt{44}}{2} = \sqrt{\dfrac{44}{4}} = \sqrt{11}$

خواص مستعملة لنشر العبارات الجبرية

$k(a+b)=ka+kb$	$k(a-b)=ka-kb$
$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$	
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	

لنشر و تبسيط العبارات الجبرية ، نتبع الخطوات التالية :

1) ننشر العبارة الجبرية بإستخدام الخواص المذكوره أعلاه
2) نقوم بتبسيط العبارة الجبرية إلى أبسط شكل ممكن

مثال : نشر و تبسط العبارات التالية :

$3(2+5x)=3\times 2+3\times 5x=6+15x$

$(x+4)(x+3)=x^2+4x+3x+12$
$=x^2+7x+12$

$(3x+1)^2=(3x)^2+6x+1$
$=9x^2+6x+1$

$(2x-3)^2=(2x)^2-(2\times 2x\times 3)+3^2$
$=\ 4x^2-12x+9$

$\left(\frac{4}{5}-2x\right)\left(\frac{4}{5}+2x\right)=\left(\frac{4}{5}\right)^2-(2x)^2$
$=\frac{16}{25}-4x^2$

$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}\right)^2$
$=2-2\sqrt{6}+3=5-2\sqrt{6}$

$(-2x+0{,}5)^2=(-2x)^2+2\times(-2x)\times 0{,}5+(0{,}5)^2$
$=4x^2-2x+0{,}25$

لتحليل العبارات الجبرية ، نتبع الخطوات التالية :

1) نبحث عن العامل المشترك لكل حدود العبارة الجبرية
2) إن لم يكن العامل المشترك ظاهرا ، نجرب إحدى المتطابقات الشهيرة .

مثال : تحليل العبارات التالية

$4x+12=4x+4\times 3=4(x+3)$

$(x+2)(2x+1)-x(x+2)$
$(x+2)(2x+1-x)=(x+2)(x+1)$

$x^2+16x+64$ من الشكل $a^2+2ab+b^2$
و بالمطابقة نجد : $a^2=x^2$ و $b^2=64$
ومنه : $x^2+16x+64=(x+8)^2$

$4x^2-28x+49-5(2x-7)$
بالمطابقة نجد : $a^2=4x^2$ و $b^2=49$
ومنه : $(2x-7)^2-5(2x-7)$
$(2x-7)(2x-7-5)$
$(2x-7)(2x-12)$

$x^2-9+(2x+6)$
لدينا : $x^2-9=(x+3)(x-3)$
و أيضا : $(2x+6)=2(x+3)$
ومنه : $(x+3)(x-3)+2(x+3)$
$(x+3)(x-3+2)$
$(x+3)(x-1)$

خواص المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1) كل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد x يمكن تحويلها إلى معادلة من الشكل $ax = b$

2) إذا كان $a \neq 0$ حل المعادلة $ax = b$ هو : $x = \frac{b}{a}$

لحل المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1) نحول المعادلة إلى الشكل $ax = b$ بجعل المجاهيل ﴿ التي تشمل x ﴾ على يسار المساواة و الأعداد على يمين المساواة .

2) بعد ذلك نقوم بتبسيط ثم نحل المعادلة لإيجاد قيمة x

مثال : حل المعادلة $5x + 2 = 2x + 3$

نطرح (2) من طرفي المساواة

$$5x = 2x + 1$$

نطرح $(2x)$ من طرفي المساواة

$$5x - 2x = 1$$
$$3x = 1$$

نضرب طرفي المساواة في $\frac{1}{3}$

$$x = \frac{1}{3}$$

لحل المعادلة من الشكل $(ax + b)(cx + d) = 0$:

1) نحل المعادلة الأولى $ax_1 + b = 0$

2) بعدها نحل المعادلة الثانية $cx_2 + d = 0$

3) للمعادلة حلين هما : x_1 و x_2

مثال : حل المعادلة $(2x - 7)(8x - 9) = 0$

نحل المعادلة $2x_1 - 7 = 0$ ، و منه : $x_1 = \frac{7}{2}$

نحل المعادلة $8x_2 - 9 = 0$ ، ومنه : $x_2 = \frac{9}{8}$

ومنه حلول المعادلة هما : $\frac{7}{2}$ و $\frac{9}{8}$

لحل المعادلة تؤول إلى الشكل $(ax + b)(cx + d) = 0$:

1) نقوم بتحليل العبارة إلى جداء عاملين

2) نحل المعادلة الأولى $ax_1 + b = 0$

3) بعدها نحل المعادلة الثانية $cx_2 + d = 0$

4) للمعادلة حلين هما : x_1 و x_2

مثال : حل المعادلة $(1 - 2x)(4x - 3) - 3(4x - 3) = 0$

لدينا : $(4x - 3)(1 - 2x - 3) = (4x - 3)(-2x - 2)$

ومنه نحل المعادلة التالية : $(4x - 3)(-2x - 2) = 0$

إذن : $4x_1 - 3 = 0$ ، نجد أن : $x_1 = \frac{3}{4}$

أو : $-2x_2 - 2 = 0$ ، نجد أن : $x_2 = -1$

و منه حلول المعادلة هما : $\frac{3}{4}$ و -1

لترييض مشكلة و حل معادلة ، نتبع الخطوات التالية

1) نختار المجهول

2) نضع المعادلة المناسبة التي تعبر عن المشكلة

3) نحل المعادلة ثم نحقق من الحل

4) نجيب عن السؤال

مثال : حل المسألة التالية

عمر شعيب قبل سبع سنوات هو نصف عمره بعد أربع سنوات . حدد عمر شعيب

لدينا : $2(x - 7) = x + 4$

$$2x - 14 = x + 4$$
$$2x - x = 4 + 14$$
$$x = 18$$

خواص المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1) لا يتغير إتجاه متراجحة ، عند إضافة (أو طرح) نفس العدد من طرفي المتراجحة .
2) لا يتغير اتجاه متراجحة ، عند ضرب (أو قسمة) طرفي المتباينة بنفس العدد الموجب تماما .
3) يتغير اتجاه متراجحة ، عند ضرب (أو قسمة) طرفي المتباينة بنفس العدد السالب تماما .

لحل المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1) نحول المتراجحة إلى الشكل $ax \geq b$ بجعل المجاهيل ﴿ التي تشمل x ﴾ على يسار المتباينة و الأعداد على يمين المتباينة .
2) بعد التبسيط ، نقسم طرفي المتراجحة على العدد a مع مراعاة إشارته و اتجاه المتراجحة

مثال : حل المتراجحة $-5x + 2 \geq 2x + 3$

نطرح (2) من طرفي المتباينة ، فنتحصل على :

$$-5x \geq 2x + 1$$

نطرح $(2x)$ من طرفي المتباينة ، فنتحصل على :

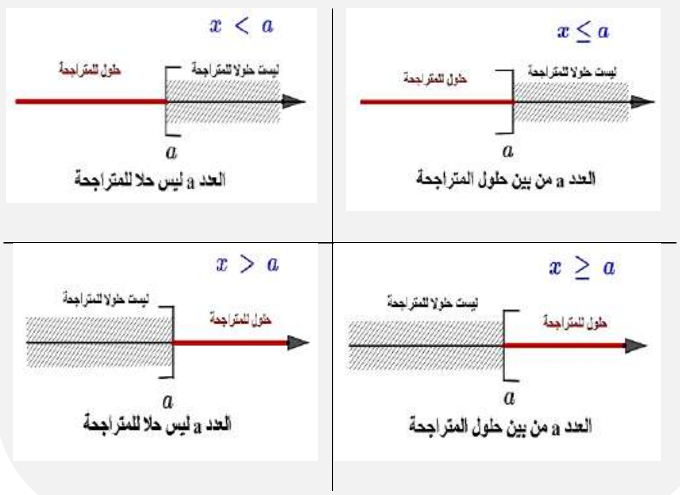
$$-5x - 2x \geq 1$$
$$-7x \geq 1$$

نضرب طرفي المتباينة في $-\frac{1}{7}$ مع تغيير إتجاه المتراجحة ، فنجد :

$$x \leq -\frac{1}{7}$$

لتمثيل حلول متراجحة بيانيا ، نتبع مايلي :

1) نحل المتراجحة كما هو مذكور سابقا .
2) في مستقيم مدرج نلون نصف المستقيم الممثل لمجموعة حلول المتراجحة ، و نشطب نصف المستقيم الآخر .
3) نفصل بين نصفي المستقيمين بمعكوفة] ، فإذا كانت فاصلة النقطة من ضمن حلول المتراجحة توجه المعكوفة لجهة الجزء الملون و إلا توجه لجزء مشطوب .



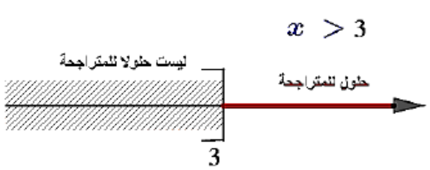
مثال : حل و تمثيل حلول المتراجحة $6x + 5 > 23$

نطرح (5) من طرفي المتباينة ، فنتحصل على :

$$6x > 18$$

نضرب طرفي المتباينة في $\frac{1}{6}$ ، فنجد :

$$x > 3$$



العدد 3 ليس حلا للمتراجحة

التعابير الإحصائية

1) الإحصاء هو دراسة ظاهرة أو معطيات بطريقة علمية ، ترجمتها و تفسيرها .

2) لغة الإحصاء ضرورية للتعامل مع هذا المفهوم فهذه اللغة تمثل في معرفة بعض التعابير و المفردات الإحصائية الأساسية .

مثال : للإلتحاق بمتوسطة حي واد النيل البوني بولاية عنابة

- 209 تلميذ يستعملون النقل العمومي
- 284 تلميذ يأتون راجلين
- 92 تلميذ يأتون في سيارات أوليائهم

3) نسمي مجتمعا إحصائيا مجموع الأفراد الذين تخصهم الدراسة الإحصائية .

في المثال السابق يشكل تلاميذ متوسطة حي واد النيل البوني عنابة المجتمع الإحصائي ، أفراده تلاميذ هذه الإكمالية و الدراسة الإحصائية تتمثل في كيفية التحاق التلاميذ بالمتوسطة

4) تسمى التكرار الكلي للسلسلة عدد عناصر هذه السلسلة .

التكرار الكلي : $209 + 284 + 92 = 585$

585 عناصر هذا المجتمع و الذي يتمثل في تلاميذ المتوسطة

5) نسمي متغيرا إحصائيا أو ميزة إحصائية الشيئ الذي تخصه الدراسة الإحصائية و الذي يشمل عدة أنواع مختلفة ، حيث يأخذ كل فرد من المجتمع المدروس نوعا واحد فقط منها .

بالنسبة للمثال السابق المتغير الإحصائي هو طبيعة النقل

6) نسمي التكرار المرفق بنوع معين للمتغير الإحصائي عدد مرات ظهور هذا النوع .

تكرار التلاميذ الذين يستعملون النقل العمومي هو 209

7) تسمى التواتر « التكرار النسبي » المرفق بنوع معين للمتغير الإحصائي : حاصل قسمة تكرار هذا النوع على التكرار الكلي

تواتر التلاميذ الذي يستعملون النقل العمومي هو $\frac{209}{585}$

و يعبر عن هذه النتيجة بعدد عشري أو بنسبة مئوية

8) نقول عن ميزة أنها كمية عندما تكون ممثلة بعدد .
و نقول عن ميزة غير كمية أنها نوعية : الجنس ، اللون فهذا طبع إحصائي نوعي .

مثلا : العمر ، المسافة ، المدة ، العلامة هي ميزات كمية

9) التكرار المجمع الصاعد لقيمة (أو لفئة) هو مجموع تكرار هذه القيمة (أو الفئة) و تكرارات القيم (أو الفئات)

10) التكرار المجمع النازل : لقيمة (أو لفئة) هو مجموع تكرار هذه القيمة (أو الفئة) و تكرارات القيم (أو الفئات)

مثال : لدينا سلسلة إحصائية تتعلق بأطوال الأنهار ، لنعين التكرار المجمع الصاعد و النازل

الأطوال	[80 ;100[	[100 ;120[	[120 ;140[	[140;160[	المجموع
التكرار	12	10	12	6	40
التكرار المجمع لصاعد	12	22	34	40	
التكرار المجمع النازل	40	28	18	6	

11) التواتر المجع الصاعد : لقيمة (أو فئة) هو مجموع تواتر هذه القيمة (أو الفئة) و تواترات القيم (أو الفئات)

12) التواتر المجمع النازل : لقيمة (أو لفئة) هو مجموع تواتر هذه القيمة (أو الفئة) و تواتر القيم (أو الفئات)

مثال : نبقى مع المثال السابق

الأطوال	[80 ;100[	[100 ;120[	[120 ;140[	[140;160[	المجموع
التكرار	12	10	12	6	40
التواتر	$\frac{12}{40}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{12}{40}$	$\frac{6}{40}$	
التواتر المجمع الصاعد	$\frac{12}{40}$	$\frac{22}{40}$	$\frac{34}{40}$	$\frac{40}{40}$	
التواتر المجمع النازل	$\frac{40}{40}$	$\frac{28}{40}$	$\frac{18}{40}$	$\frac{6}{40}$	

ملاحظات

1) عندما يكون عدد القيم كبيرا نلجأ إلى حصرها ضمن مجالات تدعى فئات (كما ورد في المثال السابق)

2) مركز الفئة : هو العدد $\frac{a+b}{2}$

3) طول الفئة : هو العدد الموجب $b-a$

13) نسمي الوسط الحسابي لسلسلة إحصائية حاصل قسمة مجموع قيم السلسلة المتوازنة بالتكرارات الموافقة لها على الترتيب التكرار الكلي .

مثال01 : حساب وسط حسابي لسلسلة علامات التلاميذ في فرض الرياضيات

العلامات	7	8	9	10	11	المجموع
التكرارات	6	3	5	1	2	17

الوسط الحسابي لهذا الطبع الإحصائي المتقطع هو :

$$m=\frac{6\times 7+3\times 8+5\times 9+1\times 10+2\times 11}{17}$$

$$m\approx 8{,}41$$

مثال 02 : إذا بوبنا العلامات في فئات ، نحصل على السلسلة الإحصائية الآتية :

العلامات	[7 ;10[	[10 ;13[	[13 ;16[	المجموع
التكرارات	14	5	6	25
مركز الفئة	8,5	11,5	14,5	

$$m=\frac{14\times 8{,}5+5\times 11{,}5+6\times 14{,}5}{25}$$

$$m=10{,}54$$

ملاحظات

عندما يتطلب الأمر بطبع إحصائي مستمر ، نحسب الوسط الحسابي بتعويض كل فئة $[a;b[$ بحساب مركز فئتهم ثم نحسب الوسط الحسابي .

سبب الإنتقال من الوسط إلى الوسيط لسلسلة إحصائية لئن بعض حالات سلاسل إحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا و ان الوسط الحسابي لا يقسم السلسلة إلى جزأين لهما نفس عدد العناصر ، و هذا الأمر يمكن تحقيقه بحساب الوسيط

14) عندما تكون سلسلة إحصائية مرتبة ، الوسيط هي القيمة التي تجزئ هذه السلسلة إلى جزأين لهما نفس التكرار .

15) عدد القيم الأصغر من الوسيط يساوي عدد القيم الأكبر منه و نرمز لوسيط السلسلة الإحصائية بالرمز : Med .

16) لحساب الوسيط لسلسة إحصائية نرتبها ترتيبا تصاعديا أو تنازليا إذا لم تكن مرتبة ثم نراعي فردية أو زوجية التكرار الكلي .

17) إذا كان N التكرار الكلي فرديا فإن قيمة رتبة $\frac{N+1}{2}$ تمثل الوسيط Médiane .

18) إذا كان N التكرار الكلي زوجيا ، فإن نصف مجموع قمتي رتبتين $\frac{N}{2}$ و $\frac{N}{2}+1$ تمثل الوسيط Médiane .

مثال 01 : عين وسيط السلسلة 4,4,5,6,6,7,8,10,3

التكرار الكلي للسلسلة هو عدد فردي و يساوي 9

نرتب السلسلة ترتيبا تصاعديا :

3,4,4,5,6,6,7,8,10

ومنه رتبة الوسيط هي : $\frac{9+1}{2}=5$

أي ان $Med=6$

مثال 02 : عين وسيط السلسلة 9,3,4,7,8,7,5,2

التكرار الكلي للسلسلة هو عدد زوجي و يساوي 8

نرتب السلسلة ترتيبا تنازليا :

9,8,7,7,5,4,3,2

ومنه وسيط هو نصف مجموع القيم التي رتبتها : $(\frac{8}{2};\frac{8}{2}+1)$

أي ان $Med=\frac{7+5}{2}=6$

لإيجاد الحل الجبري لجملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين ، نختار إحدى الطريقتين :

1) طريقة الحل بالتعويض : تهدف هذه الطريقة إلى استخراج أحد المجهولين من إحدى المعادلتين ثم التعويض في الأخرى .
2) طريقة الحل بالجمع : تهدف هذه الطريقة إلى جعل معاملي x أو y متعاكسين ثم جمع طرف مع طرف .

مثال : حل الجملة الآتية $\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ 4x+y=2 \end{cases}$

أولا : طريقة الحل بالتعويض

المعادلة رقم 2 ، تسمح بكتابة : $y=2-4x$

نعوض هذه القيمة في المعادلة رقم 1 فنجد :

$$3x+2(2-4x)=-1$$
$$3x+4-8x=-1$$

لإيجاد قيمة x ، نتبع مراحل حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد ، فنتحصل على :

$$x=1$$

نعوض $x=1$ في $y=2-4x$ فنجد :

$$y=-2$$

ومنه ثنائية الحل للجملة المعادلتين هي : $(1\ ;\ -2)$

ثانيا : طريقة الحل بالجمع

نضرب طرفي المعادلة رقم 2 في العدد (-2) ، فنتحصل على :

$$\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ -8x-2y=-4 \end{cases}$$

نجمع المعادلتين طرف مع طرف ، فنجد :

$$3x+2y-8x-2y=-1-4$$

نقوم بنفس الطريقة بجعل هذه المرة معاملي x متعاكسين :

نضرب طرفي المعادلة رقم 1 في العدد (-4)

و طرفي المعادلة رقم 2 في العدد (+3) فنتحصل على :

$$\begin{cases} -12x-8y=4 \\ 12x+3y=6 \end{cases}$$

نجمع المعادلتين طرف مع طرف ، فنجد :

$$y=-2$$

ملاحظات

1) نجد نفس الثنائية بإستعمال طريقة الحل بالتعويض أو طريقة الحل بالجمع ، إذن الطريقة هي عملية إختيارية .
2) يمكن دمج بين الطريقتين حيث يمكننا استعمال طريقة الجمع لإيجاد أحد المجهولين ثم التعويض في إحداهما لإيجاد المجهول الآخر . ﴿ يمكننا القول العكس صحيح ﴾
3) لإختيار طريقة الحل الأفضل نلاحظ معاملي x أو y
- إذا كان أحد معاملي x أو y يساوي 1 : فالأحسن نختار طريقة الحل بالتعويض .
- إذا كان أحد معاملي x أو y لا يساوي 1 : فالأحسن نختار طريقة الحل بالجمع .

لحل مسألة بتوظيف جملة معادليتن ، نتبع الخطوات التالية :

1) نختار المجهولين و ليكن x و y أو a و b
2) نقوم بترييض المسألة بالتعبير عنها بمعادلتين .
3) نحل جملة المعادلتين ، بإختيارنا لإحدى الطريقتين السابقتين .
4) نتحقق من النتيجة ثم نجيب عن الأسئلة .

مثال : قبل 11 سنة كان عمر نجيب ضعف عمر شعيب بعد 4 سنوات سيصبح عمر نجيب $\frac{9}{7}$ عمر شعيب

نختار x يمثل عمر نجيب و y يمثل عمر شعيب

ومنه نحصل على الجملة التالية : $\begin{cases} x-11=2(y-11) \\ x+4=\frac{9}{7}(y+4) \end{cases}$

بعد حل المعادلة بطريقة التعويض نجد أن :

العمر الحالي لـ نجيب هو : 23 سنة

و العمر الحالي لـ شعيب هو 17 سنة

تعريف و ترميز الدالة الخطية

1) عندما نرفق كل عدد حقيقي x بعدد حقيقي وحيد ax .
نقول أننا عرفنا دالة خطية حيث معامل تناسبها a

2) نرمز للدالة الخطية التي معاملها a بالرمز : $x \longmapsto ax$
و نسميها بحرف f ، h أو k و نكتب : $f : x \longmapsto ax$
و نكتب أيضا : $f(x) = ax$

إثبات أن الدالة خطية إنطلاقا من جدول قيم ، يجب علينا :

1) نثبت أن الجدول هو جدول قيم تناسبية

مثال : أثبت أن قيم الجدول الذي تمثل دالة الخطية

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	4	2	0	-2	-4	-6

نلاحظ أن هذا الجدول هو جدول تناسبية لأن :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{6}{-3} = \frac{4}{-2} = \cdots = \frac{-6}{3} = -2$$

لحساب صورة عدد بواسطة دالة الخطية ، نتبع مايلي:

1) نعوض قيمة x في عبارة الدالة الخطية

مثال : أحسب صورة العدد 5 بالدالة $f(x) = 10x$

صورة العدد 5 بالدالة f هي : $f(5) = 10 \times 5 = 50$
$f : 5 \longmapsto 50$

لتعيين عدد صورته بدالة خطية معلومة ، نتبع مايلي:

1) نحل المعادلة $f(x) = ax$ و إيجاد المجهول x
حيث : $x = \frac{f(x)}{a}$

مثال : عين عدد صورته بالدالة الخطية $f(x) = 5x$ هي 10

لدينا : $f(x) = 5x$ و $f(x) = 10$
أي : $5x = 10$ ، نجد $x = 2$
العدد الذي صورته بالدالة f : 10 هو العدد 2

لتعيين دالة خطية انطلاقا من عدد غير معدوم و صورته

1) نحاول إيجاد معامل الدالة الخطية a

مثال : f دالة خطية حيث : $f(2) = 3$
عين الدالة الخطية

بما أن f دالة خطية فإن f تكتب : $f(x) = ax$
$f(2) = ax$ و $f(2) = 3$
معناه $2a = 3$ ومنه $a = \frac{3}{2}$
إذن : $f(x) = \frac{3}{2}x$

لتمثيل الدالة الخطية بيانيا ، نتبع مايلي:

1) نضع $y = f(x)$ حيث تصبح الدالة الخطية $y = ax$
2) نختار قيمتين لـ x و نعوض في عبارة الدالة الخطية لإيجاد قيمة y .
3) نستنتج إحداثيي النقطتين $(x\,;y)$ أو $(x\,;f(x))$
4) نمثلها في معلم و نصل بينهما بخط مستقيم يشمل المبدأ .
5) نتحصل في الأخير على بيان الدالة الخطية .

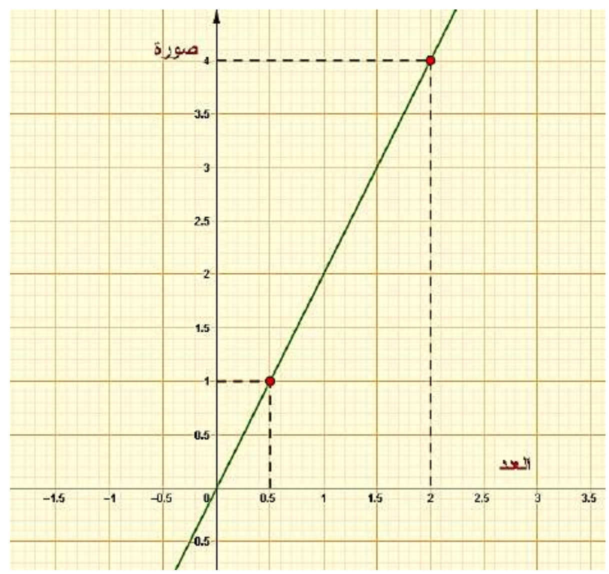
ملاحظات

1) $y = ax$ هي معادلة مستقيم الذي يمثل بيانيا دالة خطية .
2) هندسيا a معامل الدالة الخطية تصبح تسميته معامل التوجيه أو ميل المستقيم .
3) التمثيل البياني لدالة خطية في معلم مبدؤه O هو مستقيم يشمل مبدأ المعلم و النقطة A ذات الإحداثيات $(1;a)$ حيث معامل الدالة الخطية .

لقراءة التمثيل البياني لدالة خطية ، نتبع الخطوات التالية :

1) نقرأ قيم x على محور الفواصل .
2) نقرأ قيم y على محور التراتيب .

مثال : المستقيم (d) يمثل دالة خطية f
إقرأ صورة العدد 2
إقرأ العدد الذي صورته هي 1



صورة 2 هي 4 أي نكتب : $f(2) = 4$

0,5 هو العدد الذي صورته هي 1 أي نكتب : $f(1) = 0,5$

حساب معامل الدالة الخطية انطلاقا من تمثيلها البياني

1) نختار نقطة من المستقيم الممثل للدالة الخطية
2) نكتب إحداثيتي النقطة على الشكل $f(x) = y$
3) ومنه بعد تعويض كل من x و y في معادلة المستقيم ، نستطيع إيجاد معامل الدالة الخطية

مثال : ايجدا معامل الدالة الخطية من المثال السابق

وجدنا سابقا أن $f(2) = 4$ ، المستقيم معادلته $y = ax$

بتعويض : $x = 2$ و $y = 4$ ، نجد : $2a = 4$

ومنه : $a = 2$ ، أي أن : $f(x) = 2x$

إثبات أن نقطة تنتمي إلى مستقيم الممثل للدالة الخطية

1) نبحث عن العبارة الجبرية للدالة الخطية التي تمثيلها المستقيم ، كما هو موضح في الأمثلة السابقة .
2) بعدها نتحقق من أن النقطة تحقق هذه الدالة .

مثال : أثبت أن النقطة $A(3;4)$ تنتمي الى المستقيم الممثل لـ f

مما سبق لدينا : $f(x) = 2x$ أي : $y = 2x$

و منه بالتعويض $x = 3$ نحصل على : $2 \times 3 = 6$

و منه نستنتج أن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم

بمعنى آخر : الفاصلة 3 تعطينا الترتيبية 6
بمستقيم الممثل لدالة الخطية f وليس 4

ملاحظات

لبرهنة أن مجموعة من النقاط في استقامية واحدة .
يكفي أن نبين أن كل نقطة من هذه النقاط تنتمي إلى نفس المستقيم الممثل للدالة الخطية .
و ذلك عبر المراحل المذكورة سابقا

تذكير بالمكتسبات القبلية

حساب النسبة P% المقدار y من المقدار x	$y = \frac{P}{100} \times x$
زيادة x بـ P%	$y = \left(1 + \frac{P}{100}\right) \times x$
خفض x بـ P%	$y = \left(1 - \frac{P}{100}\right) \times x$
حساب الكتلة الحجمية لعينة	$\rho = \frac{m}{v}$
حساب السرعة المتوسطة	$v = \frac{d}{t}$
حساب الطاقة الكهربائية	$E = P \times t$

تعريف و ترميز الدالة التآلفية

1) عندما نرفق كل عدد حقيقي x بعدد حقيقي وحيد $ax+b$.
نقول أننا عرفنا دالة تآلفية حيث معامل توجيهها a .
2) نرمز للدالة التآلفية التي معاملها a بالرمز : $x \longmapsto ax+b$
و نسميها بحرف f ، h أو k و نكتب : $f : x \longmapsto ax+b$
و نكتب أيضا : $f(x) = ax+b$
3) الدالة التآلفية لا تمثل وضعية تناسبية

لحساب صورة عدد بواسطة دالة التآلفية ، نتبع مايلي:

1) نعوض قيمة x في عبارة الدالة التآلفية

مثال : أحسب صورة العدد 5 بالدالة $f(x) = 10x+2$

صورة العدد 5 بالدالة f هي : $f(5) = 10 \times 5 + 2 = 52$
$f : 5 \longmapsto 52$

لتعيين عدد صورته بدالة تآلفية معلومة ، نتبع مايلي:

1) نحل المعادلة $f(x) = ax+b$ و إيجاد المجهول x
حيث : $x = \frac{f(x)-b}{a}$

مثال : عين عدد صورته بالدالة التالفية $f(x) = 5x-2$ هي 8

لدينا : $f(x) = 5x-2$ و $f(x) = 8$
أي : $5x-2 = 8$ ، نجد $x = \frac{8+2}{5} = 2$
العدد الذي صورته بالدالة f : 8 هو العدد 2

لتعيين دالة تآلفية انطلاقا من عددين و صورتيهما

الطريقة الأولى : حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

1) نحاول إيجاد معامل a و العدد b .

مثال : f دالة تالفية حيث : $f(6) = 1$ و $f(-2) = -3$
عين الدالة التالفية f

بما أن f دالة تآلفية فإن f تكتب : $f(x) = ax+b$

$f(6) = 6a+b$ و $f(6) = 1$

$f(-2) = -2a+b$ و $f(-2) = -3$

إذن : $\begin{cases} 6a+b = 1 \\ -2a+b = -3 \end{cases}$

بعد تطبيق طريقة الحل بالجمع نحصل على :

$a = \frac{1}{2}$ و $b = -2$

إذن الدالة التآلفية هي : $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

الطريقة الثانية : بإستخدام تناسب التغيرات

1) نحاول إيجاد معامل a و العدد b ، و ذلك بحساب معامل التوجيه المستقيم a أولا .
2) بعد ذلك بتعويض قيمة a في الدالة نحسب العدد b .

مثال : نفس المثال السابق

لدينا

$$a = \frac{f(6)-f(-2)}{6-(-2)} = \frac{1-(-3)}{8} = \frac{1}{2}$$

ومنه بتعويض a في $6a+b = 1$ نجد :

$$b = -2$$

إذن الدالة التآلفية هي : $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

لتمثيل الدالة التآلفية بيانيا ، نتبع مايلي :

1) نضع $y = f(x)$ حيث تصبح الدالة الخطية $y = ax + b$
2) نختار قيمتين لـ x و نعوض في عبارة الدالة التآلفية لإيجاد قيمة y .
3) نستنتج إحداثيي النقطتين $(x\,;y)$ أو $(x\,;f(x))$
4) نمثلها في معلم و نصل بينهما بخط مستقيم لا يشمل المبدأ .
5) نحصل في الأخير على بيان الدالة التآلفية .

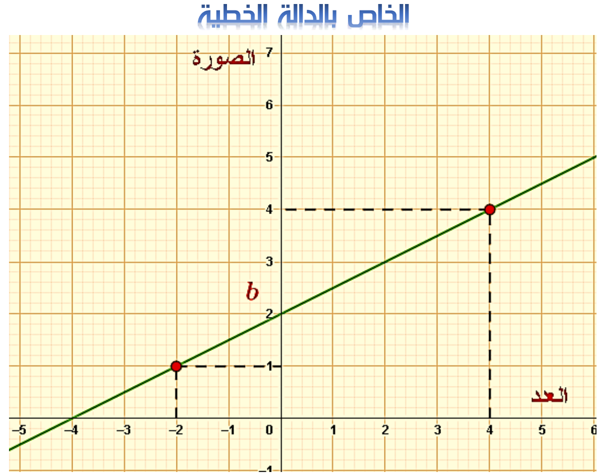
ملاحظات

1) $y = ax + b$ هي معادلة مستقيم الذي يمثل بيانيا دالة تآلفية
2) هندسيا a معامل الدالة التآلفية تصبح تسميته معامل التوجيه أو ميل المستقيم .
3) التمثيل البياني لدالة تآلفية في معلم مبدؤه O هو مستقيم لا يشمل مبدأ المعلم و النقطة A ذات الإحداثيات $(0;b)$.
4) b هي ترتيبة نقطة تقاطع المستقيم مع محور التراتيب
يدعى العدد b هندسيا بـ : الترتيبة عند المبدأ

لقراءة التمثيل البياني لدالة تآلفية ، نتبع الخطوات التالية :

1) نقرأ قيم x على محور الفواصل .
2) نقرأ قيم y على محور التراتيب .

مثال : نتبع نفس طريقة قراءة التي تم تطرق اليها في ملخص الخاص بالدالة الخطية



تعيين العاملين للدالة التآلفية انطلاقا من تمثيلها البياني

1) نختار نقطتين من المستقيم الممثل للدالة التآلفية .
2) نكتب إحداثيتي النقطتين على الشكل $f(x) = y$.
3) ومنه بعد تعويض كل من x و y في معادلة المستقيم ، نستطيع إيجاد معامل a و العدد b .

مثال : توظيف المثال السابق

بقراءة السابقة لتمثيل البياني هي : $f(4) = 4$ و $f(-2) = 1$

نعلم أن للمستقيم (d) معادلة و هي من الشكل : $y = ax + b$

بإختيار طريقة حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

$f(4) = 4$ تعني أن : $-2a + b = 1$

$f(-2) = 1$ تعني أن : $4a + b = 4$

ومنه بعد إختيار طريقة حل بالجمع نجد :

$a = \frac{1}{2}$ و $b = 2$

نعوض بقيمتي a و b فنجد عبارة الدالة التآلفية :

$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

إثبات أن نقطة تنتمي إلى مستقيم الممثل للدالة التآلفية

1) نبحث عن العبارة الجبرية للدالة التآلفية التي تمثيلها المستقيم ، كما هو موضح في الأمثلة السابقة .
2) بعدها نحقق من أن النقطة تحقق هذه الدالة .

مثال : أثبت أن النقطة $A(3;4)$ تنتمي الى المستقيم الممثل لـ f

مما سبق لدينا : $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ أي : $y = \frac{1}{2}x + 2$

و منه بالتعويض $x = 3$ نحصل على : $\frac{1}{2} \times 3 + 2 = 3{,}5$

و منه نستنتج أن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم

بمعنى آخر : الفاصلة 3 تعطينا الترتيبة 3,5 بمستقيم الممثل لدالة التآلفية f وليس 4

ملاحظات

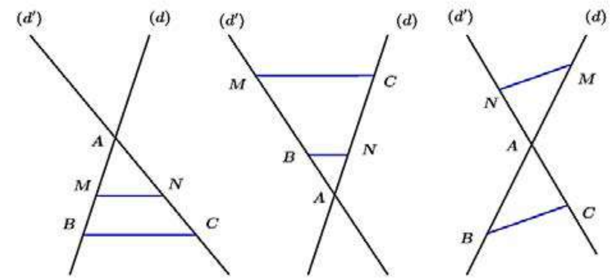
لبرهنة أن مجموعة من النقاط في استقامية واحدة .
يكفي أن نبين أن كل نقطة من هذه النقاط تنتمي إلى نفس المستقيم الممثل للدالة التآلفية .
و ذلك عبر المراحل المذكورة سابقا

خاصية طاليس المباشرة

(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A ، B و M نقطتان من (d) مختلفتان عن A ، C و N نقطتان من (d’) مختلفتان عن A.

إذا كان $(BC) // (MN)$ فإن :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$



خاصية طاليس العكسية

(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A .

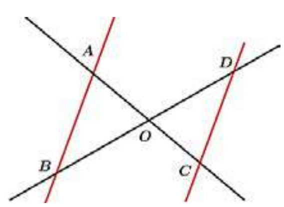
B و M نقطتان من (d) مختلفتان عن A .

C و N نقطتان من (d') مختلفتان عن A .

إذا كان : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ و كانت النقاط M ، B ، A في استقامة واحدة و نفس الترتيب مع النقط N ، C ، A

فإن : $(MN)//(BC)$

مثال 01 : إليك الشكل المقابل حيث :



$(CD) // (AB)$

$OA = 4\ cm\ ;\ OD = 8{,}4\ cm$

$OC = 6\ cm\ ;\ AB = 3\ cm$

أحسب الطولين : OB و CD

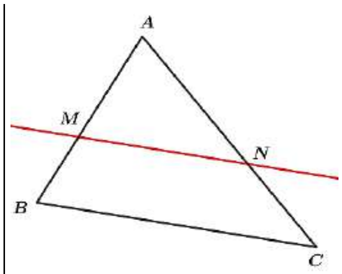
من المعطيات لدينا (DB) و (AC) مستقيمان متقاطعان في O

و المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان

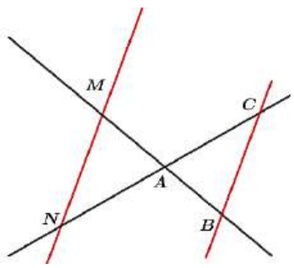
إذن حسب خاصية طاليس نكتب مايلي : $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$

أي بعد التعويض نجد : $OB = 5{,}6\ cm$ و $CD = 4{,}5\ cm$

مثال 02 : اثبت أن المستقيمان (MN) و (BC) متوازيان



$AM = 11{,}9\ cm$
$AB = 35\ cm$
$AN = 18{,}2\ cm$
$AC = 52\ cm$



$AM = 5{,}4\ cm$
$AB = 9\ cm$
$AN = 7{,}5\ cm$
$AC = 12{,}5\ cm$

في الشكل الأول

$$\frac{AM}{AB}=\frac{5{,}4}{9}=0{,}6 \quad \text{و} \quad \frac{AN}{AC}=\frac{7{,}5}{12{,}5}=0{,}6$$

حسب خاصية طاليس العكسية ، المستقيمين متوازين

في الشكل الثاني

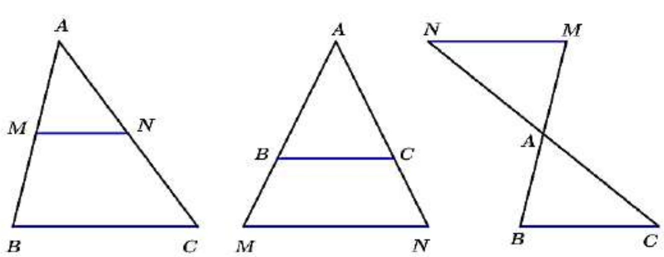
$$\frac{AN}{AC}=\frac{18{,}2}{52}=0{,}35 \quad \text{و} \quad \frac{AM}{AB}=\frac{11{,}9}{35}=0{,}34$$

حسب خاصية طاليس العكسية ، المستقيمين غير متوازيين

خاصية طاليس على المثلث

ليكن ABC مثلث ، M نقطة من الحامل (AB) N نقطة من الحامل (AC) ، إذا كان $(MN) // (BC)$ فإن :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$



خاصية العكسية لطاليس على المثلث

ABC مثلث إذا كانت M نقطة من [AB]

و كانت N نقطة من [AC] و $\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}$

فإن : $(MN) // (BC)$

في مثلث قائم

1) Cos زاوية حادة يساوي حاصل قسمة طول الضلع المجاور للزاوية على طول الوتر .
2) Sin زاوية حادة يساوي حاصل قسمة طول الضلع المقابل للزاوية على طول الوتر .
3) Tan زاوية حادة يساوي حاصل قسمة طول الضلع المقابل للزاوية على طول الضلع المجاور للزاوية .

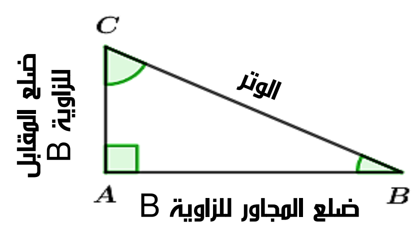
ملاحظات

Cos و Sin زاوية محصورة بين 0 و 1

Tan زاوية حادة و هو عدد موجب

مثال : من أجل المثلث ABC القائم في A

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} \;;\; \sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} \;;\; \tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$



علاقات حساب في المثلثات القائمة

في مثلث قائم ، x تمثل قيس الزاوية الحادة

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{و} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

مثال : علما أن : $\cos x = \frac{3}{5}$ ، أحسب $\sin x$ و $\tan x$

بإستعمال العلاقة $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

لدينا : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

أي : $\sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$ و منه : $\sin^2 x = \frac{16}{25}$

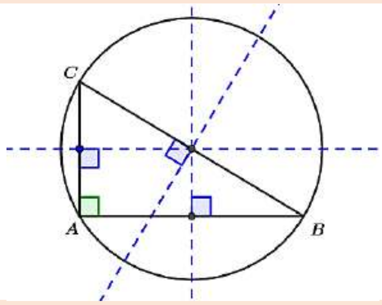
أي : $\sin x = \frac{4}{5}$

بإستعمال العلاقة : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

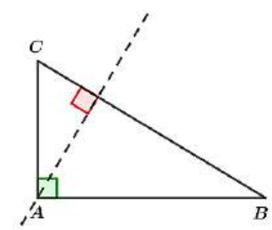
ومنه : $\tan x = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{3}$

تذكير بالمكتسبات القبلية

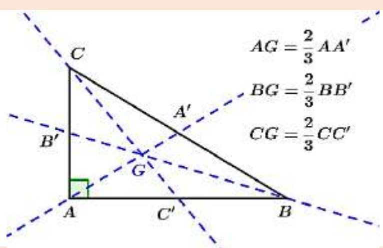
1) مجموع قيسي الزاويتين الحادتين في مثلث القائم يساوي $90°$
2) محاور مثلث القائم هي محاور أضلاعه حيث تتقاطع في منتصف الوتر الذي يمثل مركز الدائرة المحيطة .



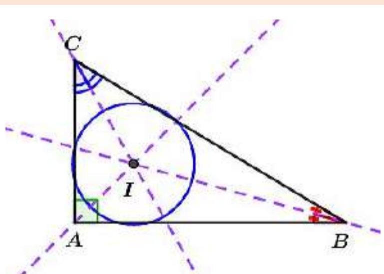
3) الإرتفاع في المثلث القائم هو المستقيم الذي يشمل رأس الزاوية القائمة و يعامد الوتر .



4) المتوسط في المثلث هو المستقيم الذي يشمل رأس و منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس .

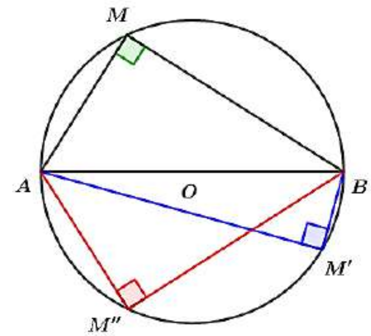


5) المنصف الداخلي لمثلث هو منصف احدى زواياه الداخلية .
نقطة تقاطع المنصفات الداخلية لزوايا مثلث هي مركز الدائرة الداخلية له .



6) المثلث القائم و الدائرة

- إذا كانت M نقطة و تنتمي للدائرة التي قطرها $[AB]$ فإن المثلث AMB قائم في M
- إذا كان المثلث AMB قائم ، فإن M نقطة تنتمي للدائرة التي قطرها $[AB]$ و مركزها منتصف [AB]



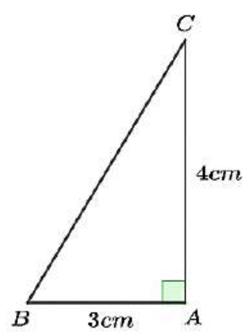
7) خاصية فيثاغورس : إذا كان المثلث ABC قائم في A فإن :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

مثال : ABC مثلث قائم في A ، حيث :

$AC = 4\ cm$ و $AB = 3\ cm$

أحسب BC طول الوتر [BC]



لدينا المثلث ABC قائم في A و حسب خاصية فيثاغورس نكتب المساواة التالية :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$BC^2 = 3^2 + 4^2$$

$BC^2 = 25$ و منه $BC = 5\ cm$

8) خاصية العكسية لفيثاغورس : إذا كان ABC مثلث حيث $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فإن المثلث ABC قائم في A

مثال : ABC مثلث ، حيث :

$BC = 7\ cm$ و $AC = 4\ cm$ و $AB = 5\ cm$

تحقق من أن المثلث ABC مثلث قائم

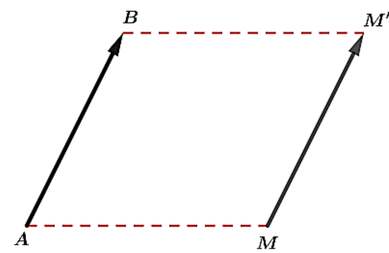
بما أن BC اكبر طول أذا نكتب مايلي : $BC^2 = AC^2 + AB^2$

و منه بعد تحقق من صحة المساواة نستنتج أن المثلث ABC ليس بمثلث قائم

خواص الأشعة و الإنسحاب

1) M' صورة M بالإنسحاب الذي يحول A إلى B معناه :
$ABM'M$ متوازي الأضلاع

2) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ ، معناه الإنسحاب الذي يحول M إلى M' .
أي أن لهما نفس : المنحى و الإتجاه و الطول ﴿ الطويلة ﴾



منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت I منتصف القطعة [AB] فإن : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
العكس صحيح

الأشعة و متوازي الأضلاع

إذا كان لـ [AD] و [BC] نفس المنتصف فإن :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ ﴿ العكس صحيح ﴾

لإثبات أن شعاعين متساوين ، نتبع إحدى الخطوات التالية :

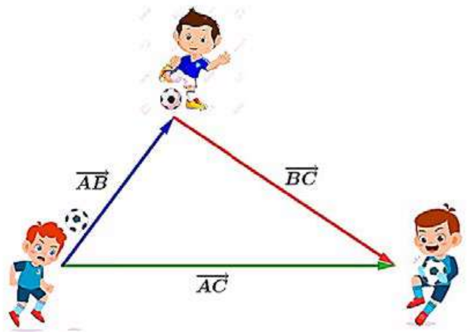
1) إثبات أن القطعتين المستقيميتين لهما نفس المنتصف
2) إثبات أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع

مثال : BDS مثلث و I منتصف القطعة [SD]
H نظيرة النقطة B بالنسبة الى النقطة I

﴿في هذا المثال، يكفي تبيان أن MNSR متوازي الأضلاع ﴾
من المعطيات لدينا : H نظيرة B بالنسبة إلى I ، يعني : $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IH}$
و بما أن I منتصف [SD] ، يعني : $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{ID}$
و منه قطري الرباعي يتناصفان في I ، إذن الرباعي BDHS
متوازي الأضلاع و منه نستنتج أن : $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{SB}$

مركب انسحابين

إذا تحول الشكل 1 إلى الشكل 2 بالإنسحاب ذي الشعاع $\overrightarrow{AB}$
و تحول الشكل 2 إلى الشكل 3 بالإنسحاب ذي الشعاع $\overrightarrow{BC}$.
فإن الشكل 1 يحول إلى الشكل 3 بالإنسحاب ذي الشعاع $\overrightarrow{AC}$.

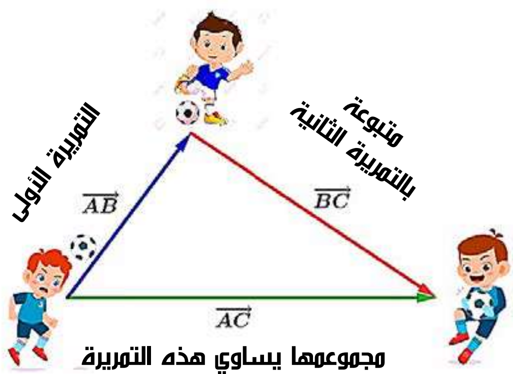


مجموع شعاعين

بإستعمال علاقة شال

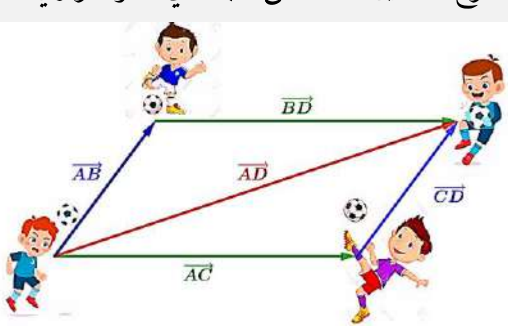
تركيب الإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ متبوعا بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ هو الإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$

من الرسم السابق نكتب مايلي : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



بإستعمال علاقة متوازي الأضلاع

إذا كان ABDC متوازي الأضلاع فإن : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$
محصلة مجموع شعاعين لهما نفس المبدأ هي قطر متوازي الأضلاع



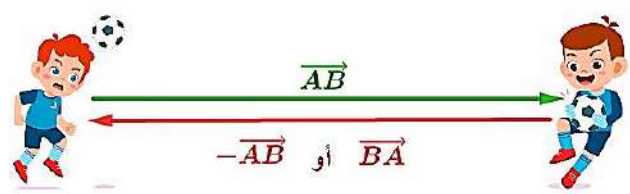
الشعاعان المتعاكسان

يكون الشعاعان متعاكسين إذا كان مجموعهما شعاع معدوما

لهما نفس المنحى ، نفس الطول و اتجاهين متعاكسين

إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متعاكسان ونكتب : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

ونقول أن الشعاع $\overrightarrow{BA}$ هو معاكس الشعاع $\overrightarrow{AB}$



مجموع شعاعين متعاكسين يساوي شعاع معدوم

نرمز له : $\vec{O}$ ، هو الشعاع الذي بدايته هي نهايته

المثال السابق : حسب علاقة شال

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{O}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{O}$$

تذكير بالمكتسبات القبلية

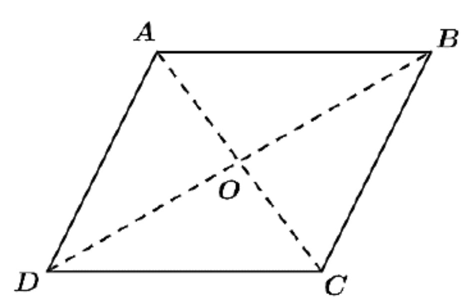
ABCD رباعي :

- إذا كان (AB) // (DC) و (AD) // (BC) فإن :

  الرباعي ABCD متوازي أضلاع .

- إذا تقاطع القطران [AB] و [BD] في منتصفهما فإن :

  الرباعي ABCD متوازي أضلاع .



إذا كان $AB = CD$ و $AD = BC$ فإن :

الرباعي ABCD متوازي أضلاع

إذا كان $AB = CD$ و (AB) // (DC) فإن :

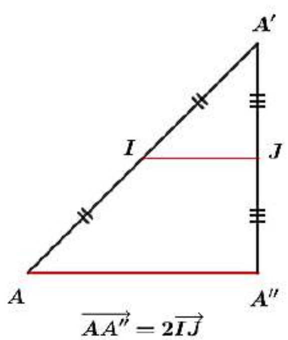
الرباعي ABCD متوازي أضلاع

خواص الإنسحاب

- يحفظ الأطوال ، المساحات ، الزوايا و استقامية النقط.
- صورة مستقيم هي مستقيم يوازيه .
- صورة قطعة مستقيم هي قطعة مستقيم تقايسها و توازيه .
- صورة دائرة هي دائرة لها نفس القطر .

إضافة من الجيل الأول تركيب تناظرين مركزيين

I ، J نقطتين من المستوي
إجراء التناظر الذي مركزه I ،
متبوعا بإجراء التناظر الذي
مركزه J يؤول إلى إجراء
الإنسحاب الذي شعاعه
$(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ})$ ، الشعاع $+ \overrightarrow{IJ}$
$(\overrightarrow{IJ}$ نرمز إليه بـ $2\overrightarrow{IJ}$ معناه :
A' نظيرة A بالنسبة إلى I
A" نظيرة A' بالنسبة إلى J



فيكون لدينا : $\overrightarrow{A'A''} = 2\overrightarrow{A'J}$ و $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{IA'}$

$$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''}$$
$$\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{IA'} + 2\overrightarrow{A'J}$$
$$\overrightarrow{AA''} = 2(\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'J})$$
$$\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{IJ}$$

يمكن الوصول لهذه النتيجة بإستعمال خاصية مستقيم المنتصفين في المثلث

لحساب مركبتي شعاع $\overrightarrow{AB}$ في معلم منسوب إلى مستو

إذا كانت إحداثيا النقطتين $A(x_A\,;y_A)$ و $B(x_B\,;y_B)$

في المعلم $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$ فإن مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$$

مثال : لدينا $A(-3\,;4)$ و $B(5\,;3)$

احسب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-(-3)\\ 3-4\end{pmatrix}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\ -1\end{pmatrix}$$

ملاحظة

مركبتي الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هما إحداثيتي النقطة M في المعلم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

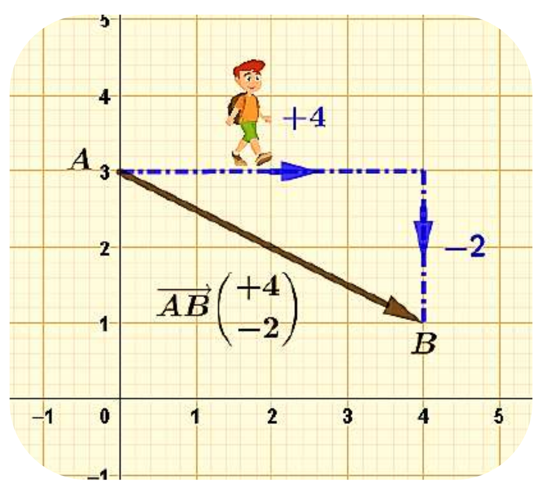
حيث النقطة O هي مبدأ هذا المعلم

القراءة البيانية لمركبتي شعاع ، نتبع الخطوات التالية :

1) ننتقل أفقيا بالتوازي مع محور الفواصل ، من بداية الشعاع إلى نهايته ، و عدد الوحدات المقروءة تمثل مركبة الأولى .

2) ننتقل عموديا بالتوازي مع محور التراتيب ، من بداية الشعاع إلى نهايته ، و عدد الوحدات المقروءة تمثل مركبة الثانية .

3) تُعطى الإشارة (+) أو (-) لكل من مركبة 1 و مركبة 2 إذا تم الإنتقال في الإتجاه موجب أو السالب للمعلم



تساوي الشعاعين

1) يتساوى شعاعان إذا كان لهما نفس مركبتي في المعلم

مثال : نعتبر النقط $A(1;2)$ ، $B(2;4)$ ، $C(1;-3)$

أوجد حسابيا احداثيا النقطة C' صورة C بالانسحاب ذي الشعاع $\overrightarrow{AB}$

C' صورة C بالإنسحاب ذي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ، أي $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}$

نضع $C'(x;y)$ أي : $\overrightarrow{CC'}\binom{x-1}{y+3}$ و $\overrightarrow{AB}\binom{1}{2}$

ومنه نحصل على الجملة التالية : $\begin{cases}x-1=1\\ y+3=2\end{cases}$

بعد حل الجملة نجد إحداثيا النقطة : $C'(2;-1)$

مجموع شعاعين

إذا كان $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$ و $\overrightarrow{CD}\binom{x_D-x_C}{y_D-y_C}$

فإن مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ هما :

$$\begin{pmatrix}x_B-x_A+x_D-x_C\\ y_B-y_A+y_D-y_C\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_D-x_C\\ y_D-y_C\end{pmatrix}$$

تابع للمثال السابق : أحسب احداثياتي النقطة D

علمًا أن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

نضع $D(x;y)$ ثم نكتب مركبتي كل من الأشعة الثلاثة

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\ -5\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x-1\\ y-2\end{pmatrix}$$

و منه بالتعويض في العبارة $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ نجد :

$$\begin{pmatrix}1+0\\ 2+(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1\\ y-2\end{pmatrix}$$

ومنه نحصل على الجملة التالية : $\begin{cases}x-1=1\\ y-2=-3\end{cases}$

بعد حل الجملة نجد إحداثيا النقطة : $D(2;-5)$

تعيين إحداثيتي النقطة منتصف قطعة مستقيمة

A و B نقطتان إحداثياهما $(x_A\,;y_A)$ و $(x_B\,;y_B)$ في المعلم

M منتصف القطعة [AB] ، حيث إحداثيا M في المعلم $(O;i;j)$

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\quad;\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

مثال : لدينا $A(-3;4)$ و $B(5;3)$
أحسب احداثيا M منتصف [AB]

بما أن M منتصف [AB] ، فإن :

$$x_M=\frac{(-3)+5}{2}=1 \text{ و } y_M=\frac{4+3}{2}=3{,}5$$

إذا إحداثيا النقطة M هما : $(1\,;3{,}5)$

لإثبات أن النقطة M هي منتصف القطعة مستقيمة [AB] ،

نتبع إحدى الطرق التالية :

1) نبين أن : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$
2) نحسب إحداثيا النقطة M منتصف القطعة مستقيمة .
3) نتحقق من أن $AB=AM+MB$ ، بعد حساب المسافات

مثال : M نقطة من القطعة [AB]
حيث : $A(-3;4)$ ، $B(5;3)$ و $M(1;3{,}5)$
أثبت أن M منتصف هذه القطعة

نختار الطريقة الأولى ، أي نبين أن : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}1-(-3)\\3{,}5-4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}4\\-0{,}5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}5-1\\3-3{,}5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}4\\-0{,}5\end{pmatrix}$$

ومنه نستنتج أن النقطة M منتصف [AB]

إذا اتبعنا الطريقة الثانية ، سنعيد نفس مراحل المتبعة في المثال السابق لحساب إحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيمة

المسافة بين نقطتين من المستوي في معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

إذا كانت $(x_A\,;y_A)$ ، $(x_B\,;y_B)$ إحداثيا النقطتان A و B

في معلم متعامد و متجانس فإن المسافة AB تعطى بالعلاقة :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

أو يمكن أن نكتب هكذا :

$$AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$$

مثال $A(-1\,;2)$ و $B(-3\,;5)$ ، احسب AB

$$AB^2=\left((-3)-(-1)\right)^2+(5-2)^2$$
$$AB^2=4^2+3^2$$
$$AB=\sqrt{25}=5\,cm$$

تذكير بالمكتسبات القبلية

إحداثيا نقطة في المستوي

يمكن تحديد موضع نقطة من المستوي بواسطة الثنائية $(x;y)$ عددان نسميهما إحداثيا هذه النقطة في المعلم $(O\,;i\,;j)$

x : تسمى بالفاصلة ، y تسمى بالترتيبة

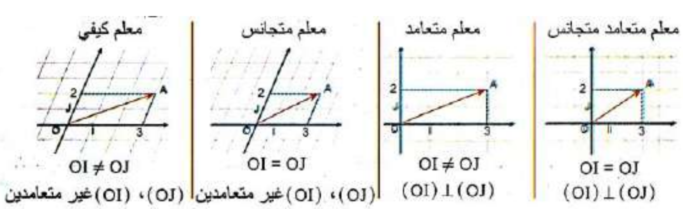
أنواع المعالم

الشكل 1 : معلم كيفي

الشكل 2 : معلم متعامد و غير متجانس

الشكل 3 : معلم متجانس و غير متعامد

الشكل 4 : معلم متعـامد و متجـانس



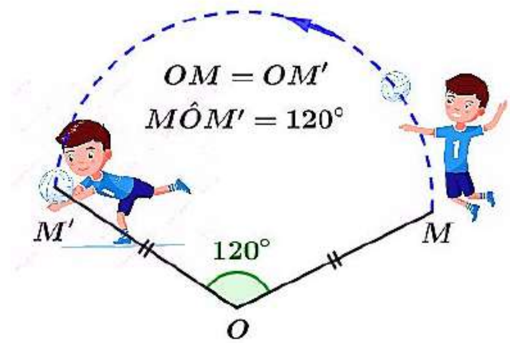
مفاهيم تجريبية للدوران

إذا قمنا بدوران حول نقطة O بزاوية قيسها α .

فإن الشكل 1 يتموقع على الشكل 2 .

نقول أن الشكل 1 هو صورة الشكل 2 بالدوران الذي مركزه O

و الزاوية التي قيسها α في إتجاه المختار .



خواص الدوران

الدوران يحفظ

الأطوال ، الإستقامية ، الزوايا و المساحات

صور أشكال بواسطة دوران

- صورة مستقيم هي مستقيم
- صورة قطعة مستقيمة هي قطعة مستقيمة تقايسها
- صورة نصف مستقيم هو نصف مستقيم
- صورة الدائرة التي مركزها I هي الدائرة التي لها نفس نصف القطر و مركزها I' صورة النقطة I .

ملاحظات

صورة مستقيمان متعامدان هما مستقيمان متعامدان

صورة مستقيمان متوازيان هما مستقيمان متوازيان

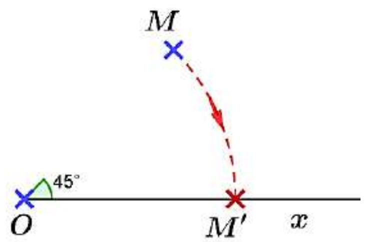
صورة مثلث قائم هو مثلث قائم

كيفية إنشاء صور أشكال بسيطة بالدوران

إنشاء النقطة M' صورة M بالدوران الذي مركزه O

1) إنشاء نصف المستقيم $[Ox)$ ، مع الإنتباه لجهة الدوران

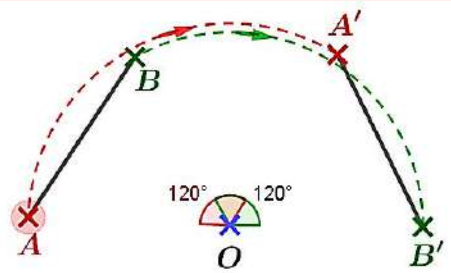
2) إنشاء النقطة M' على $[Ox)$ حيث $OM' = OM$



إنشاء صورة القطعة المستقيمة [AB] بالدوران الذي مركزه O

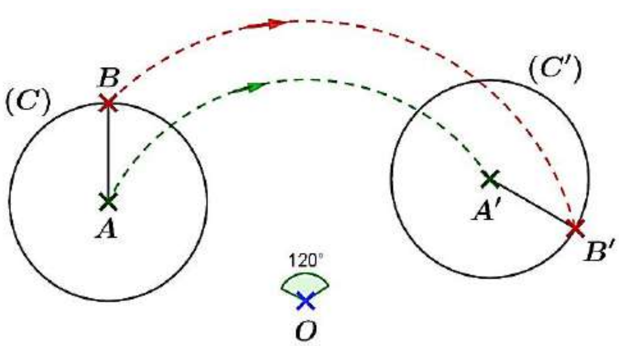
1) إنشاء الصورتين A' و B' للنقطتين A و B بهذا الدوران

و تكون $[AB]$ هي : $[A'B']$



إنشاء إنشاء صورة دائرة مركزها A بالدوران الذي مركزه O

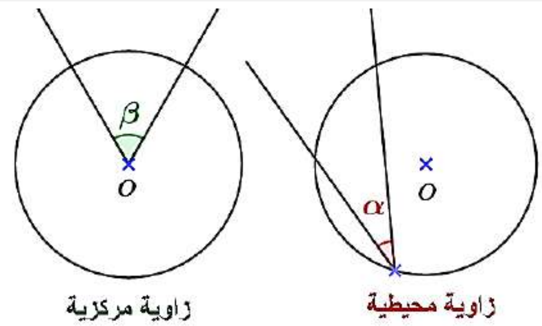
1) إنشاء الصورة A' للنقطة A بهذا الدوران و تكون صورة الدائرة المعطاة هي الدائرة التي مركزها A' و لها نفس نصف القطر الدائرة الأولى



الزاوية المحيطة و الزاوية المركزية

1) الزاوية المحيطية في دائرة : هي الزاوية المشكلة من وترين للدائرة يلتقيان في نقطة منها .

2) الزاوية المركزية في دائرة : هي الزاوية التي رأسها هو مركز هذه الدائرة .

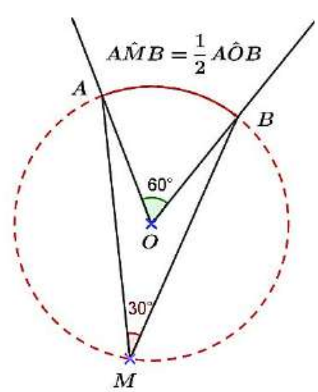


خاصية قيس الزاوية المحيطية

قيس الزاوية المحيطة في دائرة يساوي نصف قيس الزاوية المركزية التي تحصر معها نفس القوس

نقول أن الزاوية $A\hat{O}B$ هي الزاوية المركزية المشتركة مع الزاوية المحيطة $A\hat{M}B$ يعني أنهما يحصران نفس القوس $\overset{\frown}{AB}$

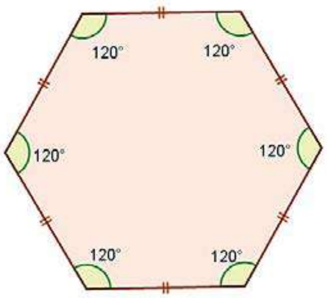
$$A\hat{M}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B$$



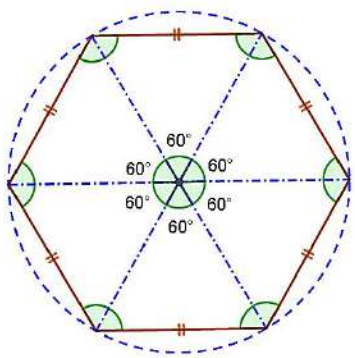
الزاويتان المركزيتان اللتين تحصران نفس القوس متقايستان

المضلعات المنتظمة

المضلع المنتظم هو مضلع أضلاعه متقايسة و زاوياه لها نفس القيس .



توجد دائرة مارة على جميع رؤوس المضلع المنتظم نقول أن هذه : الدائرة المحيطة بالمضلع المنتظم و مركزها هو مركز المضلع المنتظم



حساب قيس الزاوية $A\hat{O}B$ لمضلع منتظم مركزه O ، A ، B رأسان متتاليان للمضلع و عدد أضلاعه n

نقسم الزاوية $360°$ على n بمعنى : $A\hat{O}B = \frac{360°}{n}$

حساب قيس الزاوية $A\hat{B}C$ لمضلع منتظم مركزه A ، B ، C هي رؤوس للمضلع

1) نعين الزاوية المركزية $A\hat{O}C$ التي ترسم نفس القوس التي ترسمه الزاوية المحيطية $A\hat{B}C$

2) نستعمل خاصية قيس الزاوية المحيطية $A\hat{B}C = \frac{1}{2}A\hat{O}C$

تعريف بالكرة و الجلة

الكرة التي مركزها O و نصف قطرها R ، هي مجموعة النقط M بحيث : $OM = R$

الجلة التي مركزها O و نصف قطرها R ، و هي مجموعة النقط M بحيث : $OM \leq R$

كرة السلة
فارغة من الداخل

الجلة
مملوءة من الداخل

مساحة الكرة و حجم الجلة

مساحة الكرة	حجم الجلة
$A = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

مقطع لكرة بمستوي

مقطع كرة بمستوي هو دائرة

ملاحظة

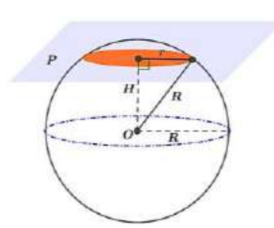
[NS] قطر كرة مركزها O ، P هو المستوي العمودي على [NS] في H نقول ان : OH هي المسافة بين O و P المستوي .

الحالة 01 : $0 < OH < R$

1) الدائرة الناتجة من قطع الكرة بمستوي P مركزها H . من أجل كل نقطة من هذه الدائرة ، المثلث قائم في تلك النقطة

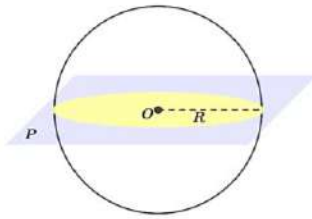
2) في الدائرة نصف قطرها r .

يعطى بالقاعدة : $r = \sqrt{R^2 - OH^2}$



الحالة 02 : $OH = 0$

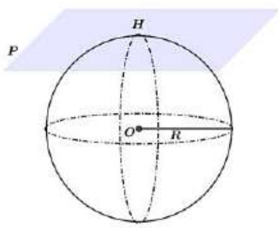
الدائرة الناتجة من قطع الكرة بمستوي P ، لها للكرة نفس المركز O و نفس نصف القطر R للكرة نقول أنها : أكبر دائرة للكرة



الحالة 03 : $OH = R$

الدائرة الناتجة عن قطع الكرة بالمستوي P لها مركز S أو N و نصف قطر يساوي الصفر .

نقول أن : المستوي P مماس للكرة في S أو N



ملاحظة

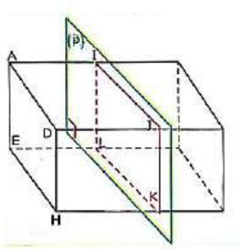
إذا كان $OI > R$ فإن المستوي P لا يقطع الكرة

مقطع لمتوازي المستطيلات

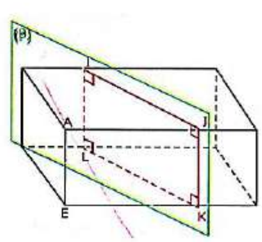
مقطع متوازي مستطيلات بمستوي :

1) يوازي أحد أوجهه هو مستطيل له نفس بعدي الوجه الموازي .

2) يوازي أحد أحرفه هو مستطيل طوله أو عرضه يساوي طول ذلك الحرف .



مقطع موازي لأحد الوجه
(وجه الجانبي)



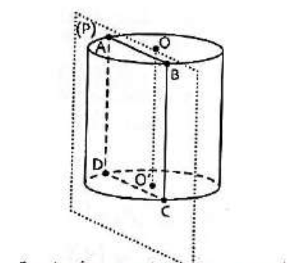
مقطع موازي لأحد الأحرف

مقطع لأسطوانة دورانية

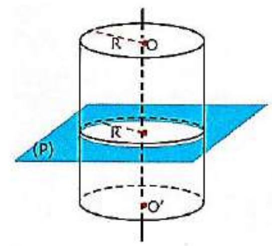
مقطع أسطوانة نصف قطرها R بمستوي

1) عمودي على المحور : هو دائرة نصف قطرها R مركزها ينتمي إلى المحور . ﴿ مواز و مطابق لقاعدته ﴾

2) موازي للمحور : هو مستطيل طوله أو عرضه يساوي إرتفاع الأسطوانة .



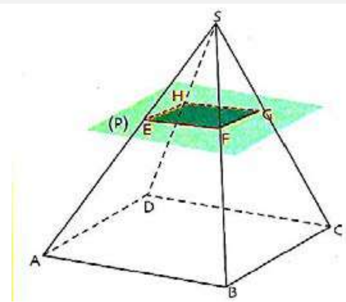
المستوي موازي لمحور الأسطوانة



المستوي عمودي على محور الأسطوانة

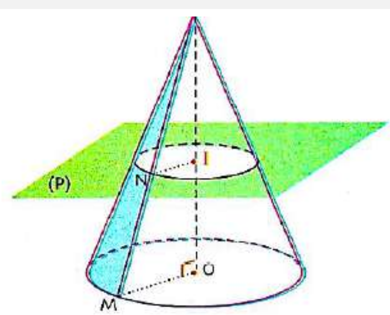
مقطع لهرم

مقطع هرم بمستوي موازي لقاعدته هو تصغير لقاعدته أضلاعها موازي لأضلاع قاعدة الهرم



مقطع لمخروط دوراني

مقطع مخروط دوراني بمستوي موازي لقاعدته هو دائرة مصغرة لقاعدته ، مركزها ينتمي إلى إرتفاع المخروط



تكبير أو التصغير بالنسبة K

1) تكبير مجسم معناه : ضرب كل أبعاده بالنسبة K بحيث :

$$K > 1$$

2) تصغير مجسم معناه : ضرب كل أبعاده بالنسبة K بحيث :

$$0 < K < 1$$

3) تكبير و تصغير مجسمات لا يغيران طبيعتها .

4) أثناء التكبير أو التصغير أبعاد المجسم بالنسبة K فإن :

مساحته تضرب بالنسبة K^2 و حجمه يضرب بالنسبة K^3

تذكير بالمكتسبات القبلية

متوازي المستطيلات

المساحة	الحجم
$S = 2(a \times b + a \times h + b \times h)$	$V = a \times b \times h$

مكعب

المساحة	الحجم
$S = 6 \times a$	$V = a^3$

أسطوانة الدوران

المساحة	الحجم
$S = 2 \times \pi \times R\ (h + R)$	$V = \pi \times R^2 \times h$

الهرم

المساحة	الحجم
$S = B \times \left(\text{عدد أوجه} \times \frac{a \times c}{2}\right)$	$V = B \times h$

B مساحة القاعدة

المخروط الدوران

المساحة	الحجم
$S = \pi \times R \times h + \pi \times R^2$	$V = \frac{1}{3} \times h \times \pi \times R^2$