

المجال

2

الجذور التربيعية

I - تعريف الجذر التربيعي لعدد ناطق موجب:
الجذر التربيعي لعدد ناطق موجب نكتب $\sqrt{a}$ حيث:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a = (\sqrt{a})^2$$

قائمة المربعات النامة:

$$\begin{aligned} \sqrt{0} &= 0; \sqrt{1} = 1; \sqrt{4} = 2; \sqrt{9} = 3; \sqrt{16} = 4 \\ \sqrt{25} &= 5; \sqrt{36} = 6; \sqrt{49} = 7; \sqrt{64} = 8; \sqrt{100} = 10 \\ \sqrt{121} &= 11; \sqrt{144} = 12; \sqrt{225} = 15 \end{aligned}$$

II - الحسابات:

* جذر لمربع: من أجل a أكبر من أو يساوي 0 فإن $\sqrt{a^2} = a$
* جداء العددين: مهما يكن العددين الناطقان الموجبان a و b فإن:
 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
* التبسيط: مثال: $\sqrt{300} = \sqrt{100 \times 3} = \sqrt{100} \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$
* القسمة: مهما يكن العددين الموجبان a و b حيث $b \neq 0$ فإن:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

III - باستعمال طريقة التوزيع:

$$\text{مثال } 1: \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$$

$$\sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3,6 \neq \sqrt{25}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

أي: لا نستطيع أن نسطحها.

$$\text{مثال } 2: 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2+5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

$$\text{مثال } 3: 3\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2} + \sqrt{2 \times 4} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (3+2)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

تمرين نموذجي

لنكن ثلاثة نقاط O، U و I حيث الأطوال:

$$OU = \sqrt{343}, \quad OI = \sqrt{700}, \quad UI = \sqrt{63}$$

هل النقاط O، U و I على استقامة واحدة؟ برر.

الحل:

حتى تكون على استقامة واحدة: $UI + OU = OI$

$$\text{ومنه } \sqrt{63} + \sqrt{343} = \sqrt{700} \text{ أي على استقامة واحدة.}$$

المجال

4

الجداءات الشهيرة

I - مربع مجموع عددين، مربع فرق عددين، الفرق بين مربعين.

مربع مجموع: مهما تكن a و b فإن:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مربع العدد الثاني ضعف جدائهما مربع العدد الأول

II - مربع فرق عددين: مهما يكن a و b فإن:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

III - فرق بين مربعين: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

IV - التحليل (كتابة العبارة على شكل جداء)

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = (b-a)^2$$

باستعمال العامل المشترك: a و b و c

$$a \times b + a \times c = a \times (b+c)$$

عامل مشترك

تمرين نموذجي

لنكن العبارة الجبرية الآتية:

$$E = (3x+5)(2x-1) + 9x^2 - 25$$

1. انشر وبسط العبارة E ؟

2. حلل العبارة $9x^2 - 25$ ثم استنتج تحليلا للعبارة E ؟

3. حل المعادلة: $(3x+5)(5x-6) = 0$

الحل:

$$E = (3x+5)(2x-1) + 9x^2 - 25$$

1. انشر وبسط العبارة E

$$E = (3x+5)(2x-1) + 9x^2 - 25$$

$$= 6x^2 - 3x + 10x - 5 + 9x^2 - 25$$

$$= 15x^2 + 7x - 30$$

2. تحليل العبارة

$$9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x-5)(3x+5)$$

المجال

1

المضاعفات والقواسم

I - مهما يكن العددين a و b الناطقين، حيث: $b \neq 0$.
قاسم a نقول أن a/b عدد ناطق.

نقول:

* b يقسم العدد a .

* a مضاعف للعدد b .

* a يقبل القسمة على b .

* مهما يكن العدد الناطق a حيث: $a \times 1 = 1$

II - القاسم المشترك الأكبر لعددين ناطقين غير معدومين، هو العدد الناطق الغير معدوم، (أكبر قاسم مشترك للعددين a و b في آن واحد). ونكتب $PGCD(a; b)$ أي $PGCD$ دائما يكون أكبر من أو يساوي الواحد. وإذا كان: $PGCD(a; b) = 1$ نقول عن العددين a و b عددين أوليان فيما بينهما ونستنتج أن $PGCD$ لعددين ناطقين a و b يقسم كذلك الفرق بينهما.

لحساب $PGCD$ لعددين ناطقين غير معدومين نستعمل خوارزمية إقليدس (القسمة الإقليدية)، أي نقسم العدد الأكبر على العدد الأصغر منه ثم العدد الأصغر الناتج على باقي القسمة الإقليدية وهكذا حتى نتحصل على الباقي صفر.

III - الكسور الغير قابلة للاختزال:

كسر غير قابل للاختزال لا يمكن اختزاله (لا يقبل) معنى ذلك أن a/b غير قابل للاختزال لأن a و b عددين أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a; b) = 1$.

- للحصول على كسر مختزل نقسم كلا من البسط والمقام على $PGCD$ لها.



تمرين نموذجي

(1) أنقل و أكمل الجدول الآتي ب: (نعم) أو (لا)

5	3	2	
			4410 يقبل القسمة على
			1575 يقبل القسمة على

(2) من خلال الجدول، هل العددين 4410 و 1575 أوليان فيما بينهما؟ (برر جوابك)

(3) احسب $PGCD(4410; 1575)$

الحل:

5	3	2	
نعم	نعم	نعم	4410 يقبل القسمة على
نعم	نعم	لا	1575 يقبل القسمة على

(2) العددين 4410 و 1575 ليس أوليان فيما بينهما (لأنهما يقبلان أكبر من قاسم واحد)

(3) $a = 4410$; $b = 1575$; $a - b = 2835$,
 $PGCD(4410; 1575) = PGCD(1575; 2835)$

$a = 2835$; $b = 1575$; $a - b = 1260$,
 $PGCD(2835; 1575) = PGCD(1575; 1260)$

$a = 1575$; $b = 1260$; $a - b = 315$,
 $PGCD(1575; 1260) = PGCD(1260; 315)$

$a = 1260$; $b = 315$; $a - b = 945$,
 $PGCD(1260; 315) = PGCD(315; 945)$

$a = 945$; $b = 315$; $a - b = 630$,
 $PGCD(945; 315) = PGCD(315; 630)$

$a = 630$; $b = 315$; $a - b = 315$,
 $PGCD(630; 315) = PGCD(315; 315)$

$PGCD(4410; 1575) = 315$.

الزوايا الموجودة داخل دائرة

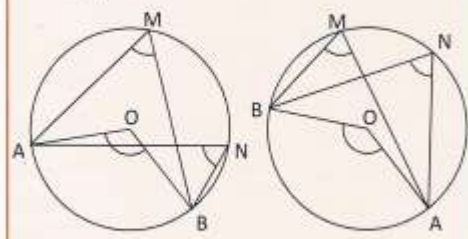
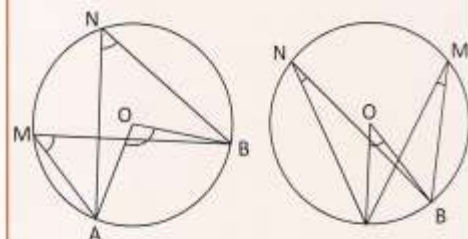
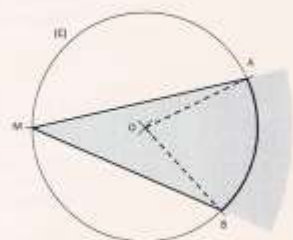
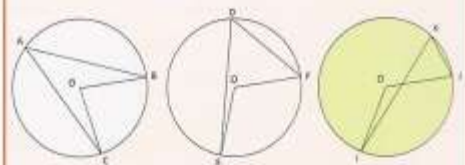
المجال

8

- I - إذا وقع رأس زاوية على محيط الدائرة نسميها زاوية محيطية وتحصر قوس معطى.
II - إذا وقع رأس زاوية على مركزها نسميها زاوية مركزية، وتحصر قوس معطى.

خاصية 1: زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس متساويتان.

خاصية 2: زاويتان أحدهما محيطية والأخرى مركزية تحصران نفس القوس (نقول أن المحيطية نصف المركزية).



الحل:

(1) إنشاء مثلث IJK حيث:

$$IJ = 4,8 \text{ cm}$$

$$JK = 8 \text{ cm}$$

$$KI = 6,4 \text{ cm}$$

(2) برهان أن المثلث IJK قائم:

$$KI^2 = 6,4^2 = 40,96 ; JK^2 = 8^2 = 64$$

$$IJ^2 = 4,8^2 = 23,04 ;$$

$$\text{ومنه: } 64 = 40,96 + 23,04$$

$$\text{أي: } JK^2 = IJ^2 + IK^2$$

فحسب نظرية فيثاغورث، المثلث IJK قائم في I.

(3) حساب قياس الزاوية IJK بالتدوير إلى الدرجة.

بفرض α قياس الزاوية IJK

$$\text{فإن: } \sin \alpha = \frac{IK}{JK} = \frac{6,4}{8} = 0,8$$

$$\text{لدينا: } \sin 53^\circ \approx 0,798 ; \sin 54^\circ \approx 0,809$$

فقيس IJK هو حوالي 53° أو باستعمال الآلة.

تمرين نموذجي 2

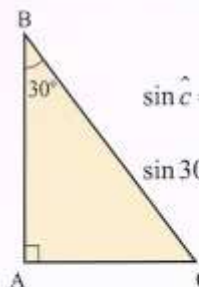
مثلث قائم في A حيث $AB = 3 \text{ cm}$ و $\hat{ACB} = 30^\circ$

1 / أحسب BC

2 / بين أن $AC = 3\sqrt{3}$

3 / أحسب $\cos \hat{ABC}$ و $\sin \hat{ACB}$. ماذا تلاحظ؟

الحل:



$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{BC}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{BC} \Rightarrow BC = 6$$

باستعمال فيثاغورث نجد:

$$AC = 3\sqrt{3}$$

$$\cos \hat{ABC} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \hat{ACB} = \frac{1}{2} ; \cos \hat{ABC} = \sin \hat{ACB}$$



النسب المثلثية

المجال

5

I - هناك ثلاثة علاقات مثلثية أساسية فيها كانت الزاوية α الحادة.

$$\cos \alpha = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}} ; \tan \alpha = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$$

II - العلاقة بين النسب المثلثية

فيها تكن الزاوية α الحادة:

$$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

حالات خاصة:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير موجود

تمرين نموذجي 1

(1) أنشئ مثلثا حيث $JK = 8 \text{ cm}$; $IJ = 4,8 \text{ cm}$

$KI = 6,4 \text{ cm}$.

(2) برهن أن المثلث IJK قائم.

(3) احسب قياس الزاوية IJK بالتدوير إلى الدرجة.

المجال

3

نظرية طاليس

I - تذكروا: في مثلث:

ABC مثلث كفي، M من الضلع $[AB]$ ، N من الضلع $[AC]$.

حيث: $(MN) \parallel (BC)$.

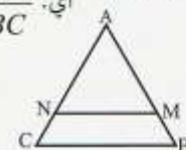
النتيجة: أضلاع مثلث AMN متناسبة مع أضلاع المثلث ABC :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

المعطيات النهائية:

إذا وجد:

A, M, B * في استقامة أي: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



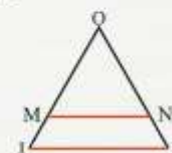
A, N, C * في استقامة

مثال: إذا وجدت النقط O, M, J في استقامة و O, N, I في استقامة كذلك ونفس الترتيب.

$$\frac{OM}{OJ} = \frac{ON}{OI}$$

ولدينا:

أي حسب النظرية العكسية لطاليس نستنتج $(MN) \parallel (IJ)$.



الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة

- ♦ العددان الأوليان فيما بينهما هما العددان قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1 أي $PGCD = 1$.
- ♦ الكسر الغير قابل للاختزال هو الكسر بسطه ومقامه أوليان فيما بينهما.
- ♦ لإيجاد القاسم المشترك الأكبر نتبع أحد الطرق التالية:
 1. نبحث عن جميع القواسم المشتركة ونأخذ أكبرها .
 2. عملية الطرح المتتالية .
 3. القسمة الإقليدية .

الحساب على الجذور

- ♦ حل المعادلة $x^2 = b$ حيث b عدد طبيعي :
 1. إذا كان $b > 0$ فإن للمعادلة $x^2 = b$ حلين مختلفين هما : $\sqrt{b}$ و $-\sqrt{b}$.
 2. إذا كان $b = 0$ فإن للمعادلة $x^2 = b$ حلا واحد هو : 0.
 3. إذا كان $b < 0$ فإن للمعادلة $x^2 = b$ ليس لها حل .

خواص :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

$$\sqrt{a^2 b} = a \sqrt{b}$$

ملاحظات :

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} \text{ لجعل مقام النسبة عددا ناطقا نضرب كلا من البسط والجذر في } \sqrt{b} \text{ في العدد } \sqrt{b}$$

المقام في المرافق أي : نضرب a و $\sqrt{b}$ في العدد $\sqrt{b}$ **الحساب الحرفي**

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

- ♦ $ax + b = 0$ معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد .
- ♦ حل المعادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد هو إيجاد مجموعة حلولها أي الأعداد التي تحقق المساواة.
- ♦ لحل المسألة يجب :
 1. قراءة نص المسألة وفهمها وتحديد المعطيات .
 2. اختيار المجهول .
 3. ترجمة المعطيات وكتابتها في صيغة المعادلة .
 4. القيام بحل المعادلة .

المتراجحات

- ♦ كل عبارة من الشكل : $ax + b > 0$ ، $ax + b < 0$ ، $ax + b \geq 0$ ، $ax + b \leq 0$ تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.

- ♦ حل المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو إيجاد كل القيم الممكنة للمجهول حتى تكون المتباينة صحيحة

الدوال الخطية والتألفية

- ♦ كل دالة تكتب على شكل : $f(x) = ax$ تسمى دالة خطية وتمثلها البياني عبارة عن خط مستقيم يمر بالمبدأ.
- ♦ كل دالة تكتب على شكل : $f(x) = ax + b$ تسمى دالة تألفية وتمثلها البياني عبارة عن خط مستقيم لا يمر بالمبدأ.
- ♦ النسب المئوية :

$$\text{حساب } P\% \text{ معناه : } \frac{P}{100}$$

$$\text{زيادة } x \text{ بـ } P\% \text{ معناه : } x \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)$$

$$\text{انخفاض } x \text{ بـ } P\% \text{ معناه : } x \cdot \left(1 - \frac{P}{100}\right)$$

جملة معادلتين

- ♦ جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y هي

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ جملة من الشكل :}$$

- ♦ حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y

هو إيجاد الثنائية (x, y) التي تحقق المعادلتين في أن واحد.

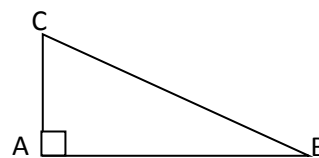
- ♦ لحل الجملة جبريا نتبع أحد الطرق:

طريقة التعويض.

طريقة الجمع.

- ♦ طريقة الجمع و التعويض.

- ♦ يمكن حل الجملة بيانيا وذلك بإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين (إحداثياتها).

حساب المثلثات

- ♦ جيب تمام وجيب وظل زاوية حادة :

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} \text{ أي المقابل على المجاور.}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{CA}{BC} \text{ أي المقابل على الوتر.}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{BA}{BC} \text{ أي المجاور على الوتر.}$$

خواص :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

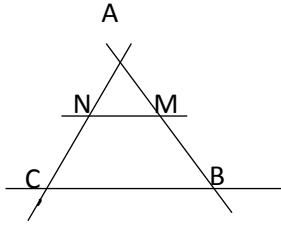
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ فإن } A \text{ مثلث قائم في } A \text{ (خاصية فيثاغورس).}$$

خاصية طالس وعكسها D, D' مستقيمان متقاطعان في النقطة

♦ إذا كان (MN) // (BC) فإن : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

♦ إذا كان $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ فإن (MN) // (BC) .



المحيط والمساحة

ملاحظة	المساحة (S)	المحيط (P)	
المربع C طول ضلع	$S = C \times C$	$P = 4C$	المربع
المستطيل L طول و l عرض	$S = L \times l$	$P = 2(L + l)$	المستطيل
المثلث B قاعدة و h ارتفاع المثلث	$S = \frac{B \times h}{2}$	$P = B + H + l$	المثلث
شبه المنحرف B القاعدة الكبرى و b القاعدة الصغرى	$S = \frac{(B + b) \times h}{2}$		شبه المنحرف
القرص R نصف القطر	$S = \pi R^2$	$P = 2\pi R$	القرص

الحجم والمساحة الجانبية

ملاحظة	المساحة (S)	الحجم (V)	
المكعب C طول ضلع	$S = 6C^2$	$V = C^3$	المكعب
متوازي المستطيلات P محيط القاعدة	$S = P \times h$	$V = L \times l \times h$	متوازي المستطيلات
الموشور القائم B مساحة القاعدة	$S = P \times h$	$V = B \times h$	الموشور القائم
الكرة	$S = \pi R^2$	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$	الكرة
القرص R نصف القطر	$S = \pi R^2$	$P = 2\pi R$	القرص

الهرم	$V = \frac{1}{3} B \times h$	
المخروط	$V = \frac{1}{3} R^2 \times h$	

المعالم

♦ في معلم، نعتبر النقطتين $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$

❖ إحداثيات شعاع: $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

❖ إحداثيات منتصف قطعة : M منتصف القطعة [AB] يعني : $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$

❖ طول قطعة مستقيم : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

تنظيم معطيات

♦ التكرار المجمع المتزايد : في سلسلة إحصائية مرتبة ترتيباً تصاعدياً، التكرار المجمع المتزايد لقيمة يحصل عليه بجمع تكرار هذه القيمة وتكرار القيم السابقة لها.

♦ التكرار المجمع المتناقص : في سلسلة إحصائية مرتبة ترتيباً تصاعدياً، التكرار المجمع المتناقص لقيمة يحصل عليه بجمع تكرار هذه القيمة وتكرار القيم الأكبر منها.

♦ التكرار النسبي المجمع المتزايد والمتناقص :

❖ التكرار النسبي المجمع المتزايد = التكرار المجمع المتزايد على التكرار الكلي .

❖ التكرار النسبي المجمع المتناقص = التكرار المجمع المتناقص على التكرار الكلي .

♦ الوسط الحسابي لسلسلة : $\bar{X}$

❖ الوسط الحسابي لسلسلة إحصائية هو مجموع قيم هذه السلسلة على عدد قيمها.

❖ الوسط الحسابي المتوازن لسلسلة إحصائية هو مجموع جداءات قيمها بتكراراتها على مجموع معاملات التكرارات.

♦ الوسيط :

❖ إذا كان عدد قيم السلسلة فردي، الوسيط هو القيمة التي تتوسط السلسلة بعد ترتيبها.

❖ إذا كان عدد قيم السلسلة زوجي، الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيمتين اللتان تقعان في الرتبتان :

$$\frac{N}{2} + 1 \text{ و } \frac{N}{2} \text{ حيث } N \text{ عدد قيم السلسلة.}$$

السلسلة.

❖ إذا كانت السلسلة مجمعة في فئات نبحت عن الفئة التي تنتمي إليها القيمة الوسطية.

♦ المدى: مدى سلسلة إحصائية هو الفرق بين أكبر قيمة و أصغر قيمة لها .