الرابعة متوسط

$e = mc^2$

الرياضيات

المراجعة الشاملة

الجزء الرابع: وضعيات إدماجية

الأستاذ عباسي للرياضيات

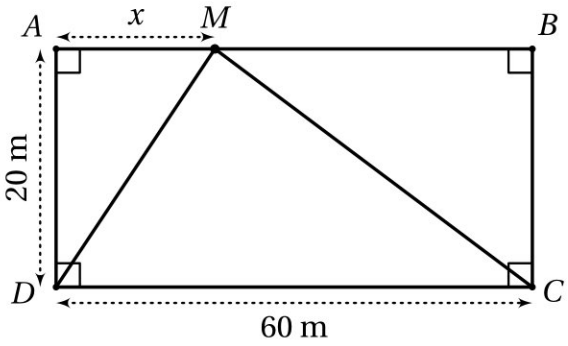
في هذه المسألة، الجزءان مستقلان عن بعضهما.

الجزء الأول :

1. السيد ياسين رجل أعمال، استثمر في قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها $160\,\text{m}$ و طولها a يساوي ثلاثة أمثال عرضها b ، حيث حولها إلى حديقة ألعاب و تسلية.

   بين أن $a = 60\,\text{m}$ و $b = 20\,\text{m}$.

2. قسم السيد ياسين حديقة الألعاب و التسلية كما في الشكل المقابل، حيث الطول AM لم يقرره بعد ؛ خصص الجزء AMD للأطفال الأقل من 6 سنوات، الجزء MBC للفئة ما بين 6 و 12 سنة، بينما الجزء MCD خصصه لفئة المراهقين.

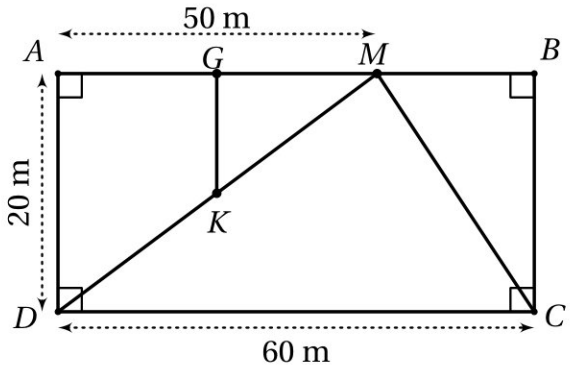


ساعد السيد ياسين على تحديد مواضع النقطة M (أي قيم x) التي من أجلها تكون مساحة الجزء AMD لا تفوق ثلث مجموع مساحتي الجزأين MBC و MCD.

الجزء الثاني :

لاحظ السيد ياسين إقبالا كبيرا للفئة الأقل من 6 سنوات على الحديقة، فقرر أن يكون $AM = 50\,\text{m}$

و الشكل المقابل يوضح كيف قسم السيد ياسين الجزء AMD بوضع حاجز $[GK]$ بين ركن الألعاب $AGKD$ و الركن MGK لاستراحة الأطفال حيث $AG = 35\,\text{m}$.

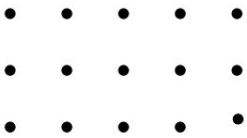


1. احسب طول الحاجز $[GK]$.
2. احسب قيس الزاوية $\widehat{AMD}$ بالتدوير إلى الوحدة.

التمرين رقم 2

الحل موجود في الصفحة 14

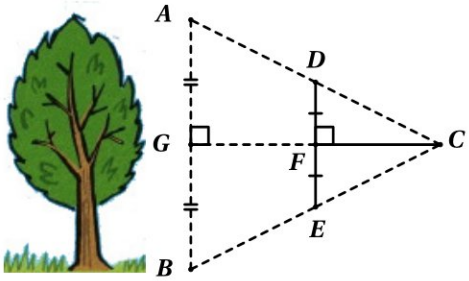
حرصا منه على المساهمة في المحافظة على الغطاء النباتي، خصص العم مقران جزءا من مزرعته لغرس أشجار مختلفة. هذا الجزء مستطيل الشكل بعداه $45\,\text{m}$ و $65\,\text{m}$ و قد غرس أشجارا في خطوط متوازية بحيث توجد شجرة في كل ركن من أركان هذا الجزء و المسافة التي تفصل شجرتين متتاليتين ثابتة و تساوي عددا طبيعيا من الأمتار.



مخطط توضيحي لوضعية الأشجار

1. جِد عدد الأشجار علما أن المسافة بين كل شجرتين متتاليتين أكبر ما يمكن.

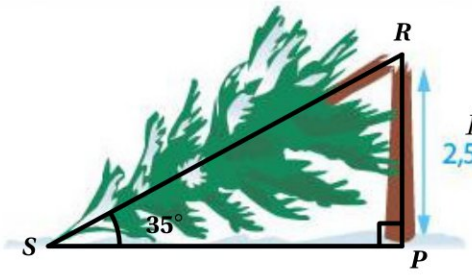
أثناء تفقده لأشجاره، لاحظ العم مقران وجود شجرة منكسرة و قد رافقته حفيدته ثيللي التي اعتقدت أنها أطول شجرة في المزرعة. من أجل تبديد شكوكها، فكرت ثيللي في حساب علو هذه الشجرة قبل انكسارها و مقارنته بعلو أطول شجرة لا تزال قائمة باستعمال أدوات بسيطة فأخذت القياسات التالية.



2. (ا) ساعد ثيللي في حساب علو الشجرة القائمة (الطول AB) علما أن :

$CF = 20\,\text{cm}$ ؛ $DF = 10\,\text{cm}$ ؛ $CG = 5,4\,\text{m}$.

(لاحظ أن $AB = 2AG$).



(ب) احسب طول الشجرة المنكسرة ($PR = 2,5\,\text{m}$ ؛ $\widehat{PSR} = 35°$).

– هل ثيللي محقة ؟

3. ما هو حجم الحطب الذي يحصل عليه العم مقران من جذع الشجرة المنكسرة باعتباره أسطوانة دوران نصف قطر قاعدتها $r = 0,25\,\text{m}$ و ارتفاعها $h = 5,5\,\text{m}$ ؟ (تذكير : $\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$)

التمرين رقم 3

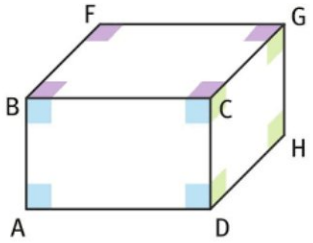
الحل موجود في الصفحة 15

لتعليب منتوجهم، يستعمل أحد مصانع العطور علبا مكعبة الشكل حيث يكون الوزن الصافي للعلبة المعبأة هو $312,5\,\text{g}$.

الجزء الأول :

يتم وضع العلب في صناديق على شكل متوازي المستطيلات أبعاد كل منها هي $0,45\,\text{m}$ ، $0,60\,\text{m}$ ، $0,90\,\text{m}$ بحيث تملأ هذه العلب الصناديق و لا يتبقى أي فراغ.

1. ما هي القيم الممكنة لطول حرف العلبة الواحدة علما أنه عدد طبيعي من السنتيمترات ؟
2. جِد طول حرف العلبة الواحدة حتى يكون عدد العلب أقل ما يمكن.
3. استنتج عدد العلب في كل صندوق.

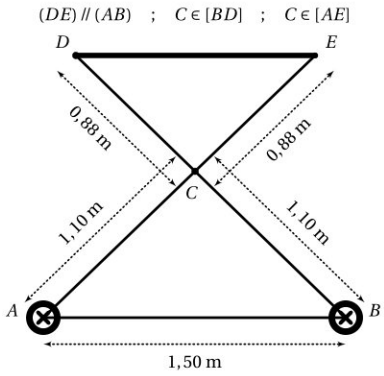


الجزء الثاني :

لتحسين ظروف العمل، قررت إدارة المصنع شراء عربات تسمح للعمال بشحن الصناديق دون أي عناء حيث يمكن تكييف ارتفاعها حسب الحاجة.

الوزن الأقصى الذي تتحمله العربة الواحدة هو $45\,\text{kg}$.

1. احسب طول طاولة العربة.
2. احسب العدد الأقصى للصناديق التي يمكن نقلها على العربة الواحدة.



الجزء الثالث :

للترويج بمنتوجهم، يرفق العمال كل صندوق ببطاقات إشهارية مطوية على شكل أنبوب طوله $1,15\,\text{m}$.

هل يستطيع العمال إدخال هذا الأنبوب في الصندوق ؟ اشرح ذلك علما أن قطر الأنبوب و سمك الصندوق مهملان.

التمرين رقم 4

الحل موجود في الصفحة 15

العدد الذهبي (Le nombre d'or - Golden Mean)

العدد الذهبي نسبة (عدد أصم) لها تطبيقات عديدة في فنون الزخرفة المعمارية (مثلا هرم خوفو) و الرسم كما نجدها في الطبيعة (مثلا زهرة عباد الشمس، قوقعة الحلزون، جسم الإنسان، ... إلخ).

الجزء الأول :

نرمز إلى العدد الذهبي بالرمز φ (و هو حرف يوناني يُقرأ «في» phi) و قيمته المضبوطة هي $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. أعطِ قيمة مقربة إلى $0,001$ للعدد الذهبي.
2. احسب و اكتب على أبسط شكل العدد φ^2.
3. احسب و اكتب على أبسط شكل العدد $\varphi + 1$.
4. استنتج أن العدد φ حل للمعادلة $x^2 - x - 1 = 0$.

جزء اختياري :

ا) بين أن $\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

ب) بين أن $\varphi^3 = 2\varphi + 1$.

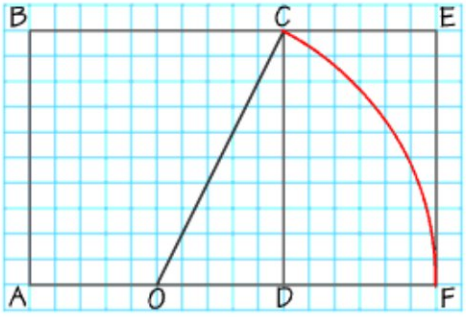
ج) بين أن $\varphi^4 = 3\varphi + 2$.

د) بين أن $\varphi^5 = 5\varphi + 3$.

الجزء الثاني :

نسمي مستطيلا ذهبيا كل مستطيل طوله L و عرضه l بحيث $\dfrac{L}{l} = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

لإنشاء مستطيل ذهبي، نتبع الخطوات التالية :



- نرسم مربعا $ABCD$ طول ضلعه $6\,\text{cm}$ (مثلا).
- نعين النقطة O ، منتصف الضلع $[AD]$.
- نعين النقطة F على نصف المستقيم (AD) بحيث $OC = OF$.
- نعين النقطة E بحيث يكون الرباعي $DFEC$ مستطيلا.

سنبرهن أن المستطيل $ABEF$ مستطيل ذهبي.

1. احسب الطول OD.
2. بين أن $OC = \sqrt{45}\,\text{cm}$.
3. اكتب الطول OC على الشكل $a\sqrt{b}$.
4. احسب الطول AF.
5. بين أن $\dfrac{AF}{AB} = \varphi$. ماذا تستنتج بالنسبة للمستطيل $ABEF$ ؟
6. برهن أن المستطيل $CDFE$ مستطيل ذهبي.

التمرين رقم 5

الحل موجود في الصفحة 15

سنحاول فيما يلي إيجاد القيم المضبوطة للنسب المثلثية لبعض الزوايا الشهيرة.

الجزء الأول :

1. ارسم مربعا $ABCD$ طول ضلعه $1\,\text{dm}$.
2. بين أن $AC = \sqrt{2}\ \text{dm}$.
3. بين أن $\widehat{BAC} = 45°$.
4. احسب القيم المضبوطة لكل من $\cos 45°$ ، $\sin 45°$ و $\tan 45°$.

الجزء الثاني :

نُذَكِّر أنه في المثلث المتقايس الأضلاع، محور كل ضلع هو أيضا منصف الزاوية المقابلة لهذا الضلع، الارتفاع المتعلق بهذا الضلع و المتوسط المتعلق بهذا الضلع.

ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه a و $[AH]$ ارتفاع فيه.

1. ما هو قيس الزاوية $\widehat{B}$ ؟
2. ما هو قيس الزاوية $\widehat{BAH}$ ؟
3. عبر عن الطول BH بدلالة a.
4. بين أن $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
5. احسب القيم المضبوطة للنسب المثلثية لكل من الزاويتين $30°$ و $60°$.

الجزء الثالث :

نقبل أن : $\cos 0° = 1$ ، $\sin 0° = 0$ ، $\tan 0° = 0$ ، $\cos 90° = 0$ ، $\sin 90° = 1$.

أتمم الجدول التالي :

الزاوية x	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$
$0°$			
$30°$			
$45°$			
$60°$			
$90°$			غير موجود

التمرين رقم 6

الحل موجود في الصفحة 15

المسافة بين مدينتين A و B هي $900\,\text{km}$. على الساعة الثامنة صباحا، ينطلق أحمد من المدينة A بسرعة متوسطة تساوي $60\,\text{km/h}$ نحو المدينة B و في نفس اللحظة ينطلق إلياس من المدينة B نحو المدينة A بسرعة متوسطة تساوي $90\,\text{km/h}$.

نسمي x الوقت المنقضي (بالساعات) منذ لحظة الانطلاق (عند الانطلاق $x = 0$).

بعد ساعة واحدة (أي $x = 1$)، يكون أحمد على بُعد $60\,\text{km}$ من المدينة A و يكون إلياس على بُعد $810\,\text{km}$ من المدينة A.

1. جِد المسافة التي تفصل أحمد عن المدينة A من أجل :
   (ا) $x = 4$.
   (ب) $x = 10$.
2. جِد المسافة التي تفصل إلياس عن المدينة A من أجل :
   (ا) $x = 4$.
   (ب) $x = 10$.
3. (ا) عبر بدلالة x عن المسافة التي تفصل أحمد عن المدينة A.
   (ب) عبر بدلالة x عن المسافة التي تفصل إلياس عن المدينة A.
4. نعتبر الدالتين $f : x \longmapsto 60x$ و $g : x \longmapsto 900 - 90x$.
   انقل ثم أتمم الجدولين التاليين :

x	0	1	4	10
$f(x)$				

x	0	1	4	10
$g(x)$				

5. مثل بيانيا الدالتين f و g في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد حيث :
   - على محور الفواصل : $1\,\text{cm}$ يمثل ساعة واحدة.
   - على محور التراتيب : $1\,\text{cm}$ يمثل $100\,\text{km}$.
6. حدد، بقراءة بيانية (مع ترك الآثار على الشكل) :
   (ا) المدة التي يتلاقى بعدها أحمد بإلياس.
   (ب) المسافة التي تفصلهما عن المدينة A عند الالتقاء.
7. أجب على السؤال (6) بالحساب.

التمرين رقم 7

الحل موجود في الصفحة 16

في نهاية العام الدراسي، نظمت إحدى المتوسطات رحلة مدرسية إلى الجنوب لفائدة التلاميذ الناجحين في شهادة التعليم المتوسط.

1. دفعت ليلى تكاليف الرحلة على النحو التالي : ثلث المبلغ دفعته جمعية أولياء التلاميذ، خمس المبلغ المتبقي دفعته ليلى بما ادخرته و باقي المبلغ دفعه والداها.
   عبر بكسر عن المبلغ الذي دفعته ليلى بمدخراتها.
2. الرحلة كانت ليلا حيث انطلقت الحافلة التي نقلتهم من المتوسطة على الساعة 22 h 30 و وصلت على الساعة 7 h 42 بعد أن قطعت مسافة كلية تساوي 690 km.
   (ا) ما هي مدة الرحلة ؟
   (ب) احسب السرعة المتوسطة التي سارت بها الحافلة.
3. قررت المجموعة المكونة من 56 تلميذا و مؤطرا زيارة أحد المتاحف حيث ثمن تذكرة الدخول هو 120 DA للفرد الواحد مع الاستفادة من تخفيض 1200 DA على المبلغ الكلي أو 35% على ثمن التذكرة الواحدة.
   ساعدهم على اختيار العرض الأفضل.

التمرين رقم 8

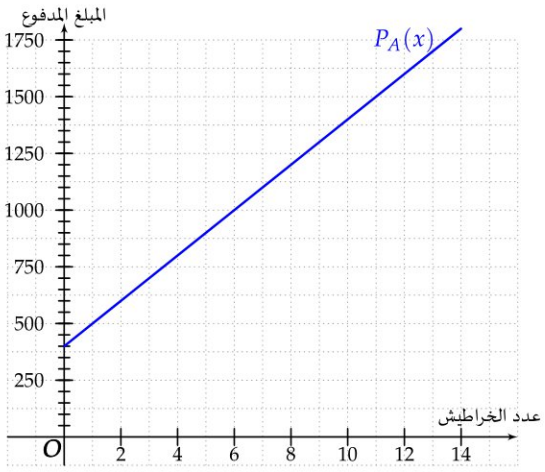
الحل موجود في الصفحة 17

ثمن خرطوشة طابعة في أحد المحلات هو 150 DA و في أحد مواقع الأنترنت ثمنها 100 DA مع دفع تكاليف التوصيل المقدرة بِ 400 DA مهما كان عدد الخراطيش المشتراة.

1. انقل و أتمم الجدول التالي :

عدد الخراطيش	2	5	11	14
المبلغ المدفوع في المحل (DA)		750		
المبلغ المدفوع في موقع الأنترنت (DA)		900		

2. نسمي x عدد الخراطيش.
   (ا) عبر بدلالة x عن المبلغ P_A المدفوع عند الشراء في المحل.
   (ب) عبر بدلالة x عن المبلغ P_B المدفوع عند الشراء عبر الأنترنت.



3. في المعلم المقابل، رسمنا المستقيم (d') ، التمثيل البياني للدالة $x \longmapsto 100x + 400$.
   ارسم في نفس المعلم المستقيم (d) ، التمثيل البياني للدالة $x \longmapsto 150x$.
4. حدد بقراءة بيانية مع ترك الآثار :
   (ا) الصيغة المناسبة لشراء 6 خراطيش.
   (ب) الصيغة المناسبة لشراء أكبر عدد من الخراطيش بمبلغ 800 DA.

(ج) بدءاً من أي عدد من الخراطيش يكون ثمن الشراء عبر الأنترنت أصغر من أو يساوي ثمن الشراء في المحل.

التمرين رقم 9

الحل موجود في الصفحة 17

في إطار التضامن و التكافل مع العائلات، نضمت جمعية «كافل اليتيم» رحلة سياحية إلى مرتفعات تيكجدة لفائدة أبناء جنوبنا الكبير قصد ممارسة بعض الرياضات الشتوية التي من بينها التزحلق على الثلج.

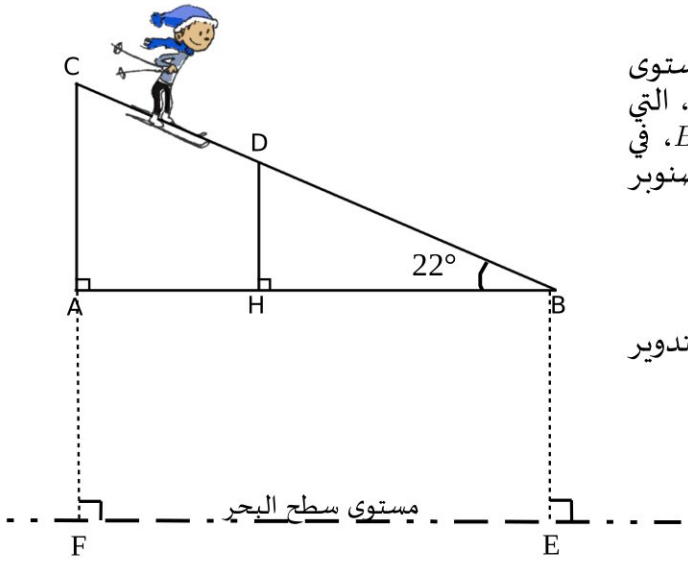
الجزء الأول :

كان عدد الأطفال المستفيدين من هذه الرحلة 54 طفلا، رافقهم 12 مؤطرا ، حيث تم تشكيل أكبر عدد ممكن من الفرق المتماثلة من حيث عدد الأطفال و عدد المؤطرين.

1. ما هو عدد المجموعات التي تم تشكيلها ؟
2. ما هي تركيبة كل مجموعة (عدد الأطفال و عدد المؤطرين) ؟

الجزء الثاني :

وحدة الطول هي المتر.



ينطلق المتزحلقون من النقطة C ، التي ترتفع عن مستوى سطح البحر بِـ $CF = 1450\,\text{m}$، باتجاه النقطة B ، التي ترتفع عن مستوى سطح البحر بِـ $BE = 1000\,\text{m}$، في مسار مستقيم و يمرون في النقطة D على شجرة صنوبر تبعد عن نقطة الانطلاق بِـ $CD = 400\,\text{m}$.

1. بين أن $CA = 450\,\text{m}$.
2. احسب طول مسار التزحلق (الطول CB) بالتدوير إلى الوحدة.
3. احسب الطول DH بالتدوير إلى الوحدة.

الجزء الثالث :

اللافتة المقابلة تمثل انحدار جزء من الطريق المؤدي إلى منتجع (مكان) التزحلق.

أيهما أشد انحدارا، مسار التزحلق أم هذا الجزء من الطريق ؟ علل.

التمرين رقم 10

الحل موجود في الصفحة 18

⚠ الأجزاء الثلاثة مستقلة عن بعضها

تقترح شركة مختصة في تصنيع أغلفة الهواتف الذكية، تزيينها بأشكال و ألوان حسب ذوق الزبون (المشتري).

الجزء الأول

يريد منير شراء غلاف مستطيل الشكل لهاتفه النقال، مساحته $160\,\text{cm}^2$ حيث عرضه b يساوي خُمسَيْ طوله a.

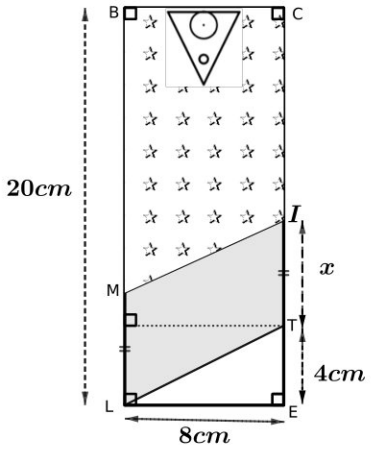
☜ جِد بُعدَي هذا المستطيل.

الجزء الثاني

نعتبر في هذا الجزء أن $a = 20\,\text{cm}$ و $b = 8\,\text{cm}$.

يريد منير تزيين غلاف هاتفه الذكي كما في الشكل المقابل حيث الرباعي $MITL$ متوازي الأضلاع و الطول IT لم يقرره بعد ($IT = x\,\text{cm}$).

الجزء المخصص لإظهار الكاميرا و الفلاش هو مثلث مساحته $S_1 = 2\,\text{cm}^2$.

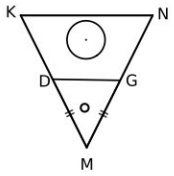


1. بين أن مساحة الجزء $MIEL$ هي $S_2 = 8x + 16$.
2. بين أن مساحة الجزء $BCIM$ المزين بالنجوم (بدون S_1 أي بدون المثلث) هي $S_3 = 142 - 8x$.
3. ساعد منير على تحديد قيم x التي تكون من أجلها المساحة S_3 تفوق المساحة S_2.

الجزء الثالث

الشكل المقابل يمثل الجزء المخصص لإظهار الكاميرا و الفلاش (غير مرسوم بالقياسات الحقيقية) حيث :

$(DG) // (KN)$ ، $MG = MD = 0,8\,\text{cm}$ ، $MN = 2,4\,\text{cm}$ ، $KN = 1,8\,\text{cm}$.



☜ احسب الطول DG.

تذكير ببعض القوانين :

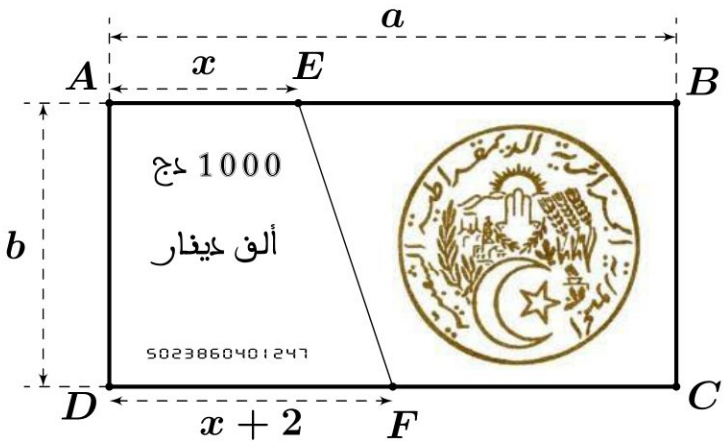
- مساحة شبه المنحرف : $\dfrac{\text{الارتفاع} \times (\text{القاعدة الصغرى} + \text{القاعدة الكبرى})}{2}$.
- مساحة متوازي الأضلاع : القاعدة $\times$ الارتفاع.

التمرين رقم 11

الحل موجود في الصفحة 19

وحدة الطول هي السنتيمتر.

لتجديد الأوراق النقدية من فئة 1000 DA ، اقترح أحد الرسامين الشكل المقابل.



الجزء الأول:

الورقة النقدية عبارة عن مستطيل مساحته $S = 128\,\text{cm}^2$ و عرضه b يساوي نصف طوله a.

– بين أن بعدَيْ هذه الورقة النقدية هما $16\,\text{cm}$ و $8\,\text{cm}$.

الجزء الثاني:

وجه الورقة النقدية يتألف من جزءين :

الجزء $AEFD$: مخصص لكتابة قيمة الورقة النقدية بالحروف و الأرقام، بالإضافة إلى رموز تسمح بالتحقق من موثوقيتها (أي التأكد من أن الورقة النقدية غير مزورة).
الجزء $BCFE$: مخصص لرسومات (شعارات و رموز وطنية).
نضع $AE = x$ و $DF = x + 2$ حيث x عدد حقيقي و $0 \leqslant x \leqslant 8$.

1. عبر بدلالة x عن S_1 ، مساحة الجزء $AEFD$ علما أنها تُعطى بالعبارة $S_1 = \dfrac{(AE + DF) \times AD}{2}$.
2. استنتج S_2 ، مساحة الجزء $BCFE$.
3. نعتبر الدالتين f و g حيث : $f(x) = 8x + 8$ ؛ $g(x) = 120 - 8x$.
   (ا) مثل، في معلم متعامد، الدالتين f و g باعتماد السلم التالي :
   - على محور الفواصل : 1 cm يمثل 1 cm.
   - على محور التراتيب : 1 cm يمثل $8\,\text{cm}^2$.

   (ب) حُل المتراجحة $f(x) < g(x)$ و فسر النتيجة.
   (ج) جِد، بقراءة بيانية، قيمة x التي من أجلها يكون $S_2 = S_1$.

الجزء الثالث:
من أجل حماية الأوراق النقدية من التزوير، يُسجل على كل ورقة نقدية عدد تسلسلي N مؤلف من 13 رقما، و إذا كانت الورقة النقدية غير مزورة فإن القاسم المشترك الأكبر لمجموع أرقام N و العدد 2019 هو 3.
– تأكد من موثوقية ورقة نقدية عددها التسلسلي هو : $N = 5023860401247$.

التمرين رقم 12

الحل موجود في الصفحة 20

تقترح شركة تراموای الجزائر التسعيرات التالية :
التسعيرة **A**: دفع 50 DA للتذكرة الواحدة.
التسعيرة **B**: دفع 200 DA كاشتراك شهري ثم 40 DA للتذكرة الواحدة.
التسعيرة **C**: دفع 3000 DA كاشتراك شهري و عدد الرحلات غير محدود.
1. ما هو عدد الرحلات التي يمكنك القيام بها بمبلغ 2000 DA بالتسعيرتين A و B ؟
2. باعتبار x عدد الرحلات في الشهر و بالاستعانة بتمثيل بياني، أعط أفضل التسعيرات A ، B ، C حسب عدد الرحلات في الشهر. (يمكنك أخذ 1 cm على محور الفواصل يمثل 10 رحلات و 1 cm على محور التراتيب يمثل 250 DA).

التمرين رقم 13

الحل موجود في الصفحة 20

(ش.ت.م Aix Marseille 1999 / 2018 — بتصرف)
عبدالله، محمد و أمين عمال في مؤسسة لصناعة ألعاب الأطفال، رواتبهم الشهرية على النحو التالي :

- عبدالله راتبه 20000 DA إضافة إلى 200 DA لكل لعبة يقوم بصنعها.
- محمد راتبه 30000 DA إضافة إلى 100 DA لكل لعبة يقوم بصنعها.
- أمين راتبه ثابت و يُقدر بِـ 44000 DA.

1. أتمم الجدول التالي :

عدد اللعب	راتب عبدالله	راتب محمد	راتب أمين
130 لعبة			
100 لعبة			

2. ليكن x عدد اللعب المصنوعة في مدة شهر.
عبر بدلالة x عن y_1 ، راتب عبدالله ؛ y_2 ، راتب محمد و y_3 ، راتب أمين.

3. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ حيث نختار الوحدات التالية :
   - على محور الفواصل : 1 cm يمثل 50 لعبة.
   - على محور التراتيب : 1 cm يمثل 5000 DA.

   ارسم المستقيمات (d_1) ، (d_2) و (d_3) ؛ التمثيلات البيانية للدوال $f(x) = 200x + 20000$، $g(x) = 100x + 30000$ و $h(x) = 44000$ على الترتيب.

4. تحصل محمد في شهر فيفري على مبلغ 35000 DA. حدد بقراءة بيانية :
   (ا) عدد اللعب التي قام بصنعها.
   (ب) راتب عبدالله إذا قام بصنع نفس العدد من اللعب.

5. تحصل عبدالله في شهر مارس على مبلغ 50000 DA. حدد بقراءة بيانية :
   (ا) عدد اللعب التي قام بصنعها.
   (ب) راتب محمد إذا قام بصنع نفس العدد من اللعب.

6. حل المتراجحة $f(x) \leqslant g(x)$ ثم فسر النتيجة.

7. بالاستعانة بالتمثيلات البيانية السابقة، أجب على الأسئلة التالية :
   (ا) بدءاً من أي عدد من اللعب المصنوعة في الشهر يكون راتب محمد أكبر من أو يساوي راتب أمين ؟
   (ب) بدءاً من أي عدد من اللعب المصنوعة في الشهر يكون راتب محمد أكبر من أو يساوي راتب أمين و راتب عبدالله ؟
   (ج) هل يمكن أن يتقاضى العمال الثلاثة نفس الراتب ؟ علل.

التمرين رقم 14

الحل موجود في الصفحة 20

(Brevet des Collèges – Caen 1995)

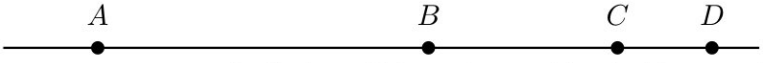
الجزء الأول:
المستوي منسوب إلى معلم متعامد.
على محور الفواصل : الوحدة هي 2 cm. على محور التراتيب : كل 1 cm يمثل 20 وحدة.

1. مثل بيانيا، في هذا المعلم، المستقيمات التالية :
   - $(D_1) : y = -90x + 270$ (بالأزرق).
   - $(D_2) : y = -40x + 150$ (بالأحمر).
   - $(D_3) : y = -10x + 50$ (بالأسود).

2. اقرأ إحداثيتي النقطة M، نقطة تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2).

الجزء الثاني:
توجه ثلاثة أشخاص إلى مدينة D لمشاهدة سباق سيارات حيث انطلقوا من مقر سكناهم في نفس اللحظة :
- انطلق حسام بسيارته من مدينة A بسرعة متوسطة تساوي 90 km/h.
- انطلق فريد بدراجته النارية من مدينة B بسرعة متوسطة تساوي 40 km/h.
- انطلق جمال بدراجته من مدينة C بسرعة متوسطة تساوي 10 km/h.

المسافة بين المدينتين A و B هي 120 km ، بين B و C هي 100 km و بين C و D هي 50 km.



نسمي x عدد الساعات المنقضية منذ الانطلاق و y المسافة المتبقية (بِـ km) للوصول إلى المدينة D.

1. (ا) عبر بدلالة x عن المسافة التي يقطعها حسام.

(ب) استنتج أن المسافة المتبقية لحسام للوصول إلى المدينة D هي $H(x) = 270 - 90x$.

2. عبر بدلالة x عن المسافة $F(x)$ التي تفصل فريد عن المدينة D.
3. عبر بدلالة x عن المسافة $J(x)$ التي تفصل جمال عن المدينة D
4. ما هي دلالة إحداثيتي النقطة M من السؤال الثاني من الجزء الأول ؟
5. حدد، بقراءة بيانية، المسافة التي تفصل حسام عن المدينة D عندما يتجاوز جمال (عند الالتقاء).
6. حدد، بالحساب، ساعة التقاء فريد بجمال و المسافة التي تفصلهما عن المدينة D.

التمرين رقم 15

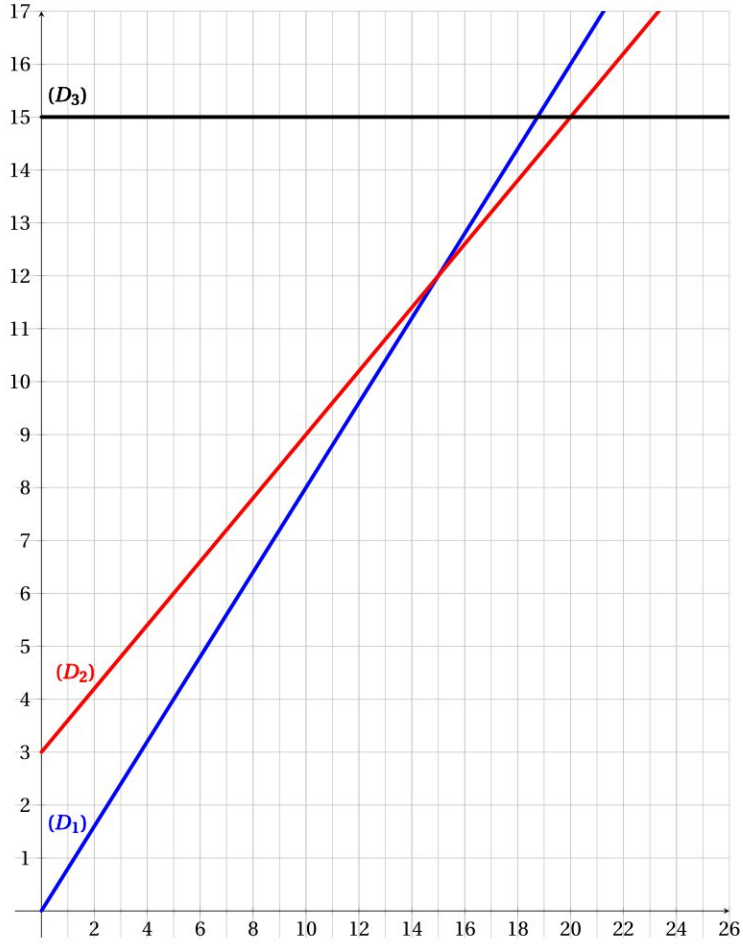
الحل موجود في الصفحة 20

(بتصرف — Brevet des Collèges – Polynésie 1999)

الجزء الأول:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O; I, J)$ حيث الوحدة على محور الفواصل هي $5\,\text{mm}$ و على محور التراتيب هي $1\,\text{cm}$.

(D_1) ، (D_2) و (D_3) مستقيمات تمثيلاتها البيانية معطاة في الشكل أدناه.



1. تعرف على نوع الدالة التي يمثلها كل مستقيم.
2. جِد صورة 10 و سابقة 12 بكل دالة.
3. حدد، بقراءة بيانية، معادلة كل من (D_1) ، (D_2) و (D_3).
4. اقرأ إحداثيتي النقطة A، نقطة تقاطع (D_2) و (D_3). تحقق من النتيجة بالحساب.
5. اقرأ إحداثيتي النقطة B، نقطة تقاطع (D_1) و (D_2). تحقق من النتيجة بالحساب.

الجزء الثاني:

تقترح مؤسسة لنقل البضائع ثلاث صيغ للدفع :

الصيغة (أ): 800 DA للرحلة الواحدة.

الصيغة (ب): 600 DA للرحلة الواحدة مع دفع اشتراك قدره 3000 DA.

الصيغة (ج) دفع اشتراك قدره 15000 DA و عدد الرحلات غير محدود.

1. انقل الجدول التالي ثم أتممه :

	المبلغ المدفوع		
عدد الرحلات	بالصيغة (أ)	بالصيغة (ب)	بالصيغة (ج)
5			
18			
25			

2. نسمي x عدد الرحلات و p المبلغ المدفوع بكل صيغة.
عبر بدلالة x عن المبلغ المدفوع بكل صيغة.

3. نسمي y المبلغ المدفوع معبرا عنه بآلاف الدنانير.
جِد عبارة y بدلالة x لكل صيغة من الصيغ الثلاث.

4. بالاستعانة بالتمثيل البياني من الجزء الأول، حدد الصيغة المناسبة من أجل 16 رحلة مع ترك الآثار على الشكل. تحقق من النتيجة بالحساب.

5. متى تكون الصيغة (أ) هي الأفضل ؟ علل بيانيا.

6. متى ندفع نفس المبلغ بالصيغتين (ب) و (ج) ؟ فسر النتيجة بيانيا.

حل التمرين رقم 1

للعودة إلى التمرين 1

الجزء الأول

1. لدينا : $a = 3b$ و $2(a+b) = 60$ منه $2 \times 4b = 160$ أي $8b = 160$ منه $b = 160 \div 8$ إذن $\boxed{b = 20\,\text{m}}$
و بالتالي $a = 3 \times 20$ أي $\boxed{a = 60\,\text{m}}$.

2. مساحة الجزء AMD هي $\boxed{10x\ (\text{m}^2)}$.

$$S_1 = \frac{AM \times AD}{2} = \frac{x \times 20}{2} = 10x$$

مساحة الجزء MBC هي $\boxed{600 - 10x\ (\text{m}^2)}$. $600 - 10x$

$$S_2 = \frac{BM \times BC}{2} = \frac{(60-x) \times 20}{2} = 10(60-x) =$$

مساحة الجزء MCD هي $\boxed{600\ (\text{m}^2)}$.

$$S_3 = \frac{CD \times AD}{2} = \frac{60 \times 20}{2} = 600$$

مساحة AMD لا تفوق ثُلث مجموع مساحتي MBC و MCD معناه $S_1 \leqslant \frac{1}{3}(S_2 + S_3)$ أي $10x \leqslant \frac{1}{3}(600 - 10x + 600)$

منه $30x \leqslant 1200 - 10x$ منه $30x + 10x \leqslant 1200$ أي $40x \leqslant 12000$ منه $x \leqslant \frac{1200}{40}$ أي $x \leqslant 30$.

و بما أن $x > 0$ (لأنه طول) فإن $\boxed{0 < x \leqslant 30\,\text{m}}$.

الجزء الثاني

1. بما أن $(GK) \perp (AM)$ و $(AD) \perp (AM)$ فإن $(GK) \,//\, (AD)$.
في المثلث AMD لدينا : $G \in (MA)$ و $K \in (MD)$ بحيث $(GK) \,//\, (AD)$ فحسب خاصية طاليس

$$\frac{MG}{MA} = \frac{MK}{MD} = \frac{GK}{AD}$$

منه $\frac{50-35}{50} = \frac{GK}{20}$ أي $\frac{15}{50} = \frac{GK}{20}$ منه $GK = \frac{20 \times 15}{50} = 6$ إذن طول الحاجز هو $\boxed{GK = 6\,\text{m}}$.

2. المثلث AMD قائم في A إذن

$$\tan \widehat{AMD} = \frac{AD}{AM} = \frac{20}{50} = 0,4$$

منه $\widehat{AMD} = \boxed{0,4}\ \boxed{2\,\text{ndf}}\ \boxed{\tan} \approx 21,8°$.

إذن $\boxed{\widehat{AMD} = 22°}$ بالتدوير إلى الوحدة.

حل التمرين رقم 2

للعودة إلى التمرين 2

1. حساب عدد الأشجار : نبدأ بتعيين المسافة التي تفصل كل شجرتين متتاليتين.
المسافة بين شجرتين متتاليتين قاسم للعدد 45 و قاسم للعدد 65 أي قاسم مشترك للعددين 45 و 65.
و بما أن هذه المسافة أكبر ما يمكن فإنها تساوي $\text{pgcd}(45;65)$.

لحسابه، نطبق خوارزمية إقليدس :
آخر باقي غير معدوم هو 5 و بالتالي $\text{pgcd}(45;65) = 5$.

$$65 = 45 \times 1 + 20$$
$$45 = 20 \times 2 + \boxed{5}$$
$$20 = 5 \times 4 + 0$$

إذن المسافة التي تفصل كل شجرتين متتاليتين هي $5\,\text{m}$.

- عدد الأشجار طولا هو 13 شجرة. $65 \div 5 = 13$
- عدد الأشجار عرضا هو 9 أشجار. $45 \div 5 = 9$
- عدد الأشجار الكلي هو $\boxed{117\ \text{شجرة}}$. $13 \times 9 = 117$

2. (ا) حساب علو الشجرة القائمة : التحويل: $\boxed{5,4\,\text{m} = 540\,\text{cm}}$

بما أن $(DF) \perp (GC)$ و $(AG) \perp (GC)$ فإن $(DF) \,//\, (AG)$ (إذا عامد مستقيمان نفس المستقيم فهما متوازيان).

في المثلث AGC لدينا : $D \in (CA)$ و $F \in (CG)$ بحيث $(DF) \,//\, (AG)$ فحسب خاصية طاليس :

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CF}{CG} = \frac{DF}{AG}$$

أي $\dfrac{CD}{CA} = \dfrac{20}{540} = \dfrac{10}{AG}$ منه $AG = \dfrac{540 \times 10}{20} = 270$ إذن $AG = 270\,\text{cm} = 2,7\,\text{m}$.

و بالتالي $AB = 2AG = 2 \times 2,7\,\text{cm} = 5,4\,\text{m}$. إذن علو الشجرة القائمة هو $\boxed{5,4\,\text{m}}$.

(ب) حساب طول الشجرة المنكسرة : $h = PR + RS = 2,5 + RS$.

- حساب الطول RS : في المثلث RSP القائم في P لدينا : $\sin \widehat{PSR} = \dfrac{PR}{RS}$ أي $\sin 35° = \dfrac{2,5}{RS}$

منه $RS = \dfrac{2,5}{\sin 35°} \approx \dfrac{2,5}{0,574} \approx 4,36$ و بالتالي : $h = 2,5 + RS = 2,5 + 4,36 = 6,86$.

إذن طول الشجرة المنكسرة هو $\boxed{6,86\,\text{m}}$ بالتدوير إلى الجزء من 100.

- بما أن $6,86 > 5,4$ فإن ثيللي محقة أي الشجرة المنكسرة هي أطول شجرة في المزرعة.

3. حساب حجم الحطب الذي يتحصل عليه العم مقران من جذع الشجرة المنكسرة :

$$\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h = \pi r^2 \times h \approx 3,14 \times (0,25)^2 \times 5,5 \approx 1,079$$

إذن حجم الحطب الذي يتحصل عليه العم مقران من جذع الشجرة المنكسرة هو حوالي $\boxed{1,079\,\text{m}^3}$.

حل التمرين رقم 3

للعودة إلى التمرين 3

حل التمرين رقم 4

للعودة إلى التمرين 4

حل التمرين رقم 5

للعودة إلى التمرين 5

حل التمرين رقم 6

للعودة إلى التمرين 6

1. (ا) بعد 4 ساعات، يكون أحمد على بعد 240 km من المدينة A. $d = v \times t = 60\,\text{km/h} \times 4\,\text{h} = 240\,\text{km}$.

(ب) بعد 10 ساعات، يكون أحمد على بعد 600 km من المدينة A. $d = v \times t = 60\,\text{km/h} \times 10\,\text{h} = 600\,\text{km}$.

2. (ا) بعد 4 ساعات يكون إلياس قد قطع مسافة $90 \times 4 = 360\,\text{km}$ و بالتالي يكون على بُعد $900 - 360 = 540\,\text{km}$ من المدينة A.

(ب) بعد 10 ساعات يكون إلياس قد قطع مسافة $90 \times 10 = 900\,\text{km}$ و بالتالي يكون على بُعد $900 - 900 = 0\,\text{km}$ من المدينة A (أي بعد 10 ساعات يكون إلياس قد وصل إلى المدينة A).

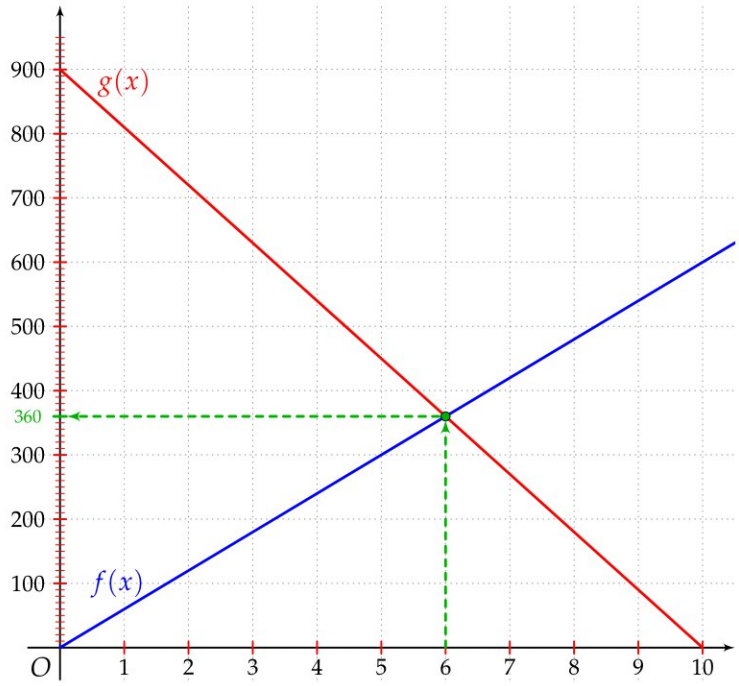
3. (ا) المسافة التي تفصل أحمد عن المدينة A هي $\boxed{d_1(x) = 60x}$ $d_1 = v_1 \times t = 60 \times x = 60x$

(ب) المسافة التي يقطعها إلياس خلال x ساعة هي $90x$ و بالتالي فالمسافة التي تفصله عن المدينة A هي $\boxed{d_2(x) = 900 - 90x}$.

4. من المعطيات و الأسئلة السابقة :

x	0	1	4	10
$f(x)$	0	60	240	600

x	0	1	4	10
$g(x)$	900	810	540	0



5. لتمثيل الدالتين f و g ، نستعين بالسؤال السابق.

تمثيل الدالة f عبارة عن مستقيم يشمل المبدأ (لأنها دالة خطية) و النقطة التي إحداثياها $(10, 600)$

و تمثيل الدالة g عبارة عن مستقيم يمر من النقطتين $(0, 900)$ و $(10, 0)$.

6. (ا) زمن الالتقاء هو فاصلة نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين السابقين.

على الشكل، نقرأ فاصلة نقطة التقاطع $x = 6$.

إذاً يلتقي أحمد بإلياس بعد $6\,\text{h}$ من الانطلاق.

(ب) المسافة التي تفصلهما عن المدينة A هي ترتيبة نقطة التقاطع. على الشكل، نقرأ ترتيبة نقطة التقاطع $y = 360$.

إذاً عند الالتقاء، يكون أحمد و إلياس على بعد $360\,\text{km}$ من المدينة A.

7. (ا) عند الالتقاء يكون $f(x) = g(x)$ أي $60x = 900 - 90x$ منه $60x + 90x = 900$ أي $150x = 900$

منه $x = \dfrac{900}{150} = 6$.

يلتقي أحمد و إلياس بعد $6\,\text{h}$ من الانطلاق.

(ب) المسافة التي تفصلهما عن المدينة A عند الالتقاء هي $f(6) = 60 \times 6 = 360$.

عند الالتقاء، يكون أحمد و إلياس على بُعد $360\,\text{km}$ من المدينة A.

حل التمرين رقم 7 للعودة إلى التمرين 7

1. إذا دفعت جمعية أولياء التلاميذ $\dfrac{1}{3}$ المبلغ الكلي فإن المبلغ المتبقي هو $1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3-1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

و خمس هذا المبلغ المتبقي هو $\dfrac{1}{5} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1 \times 2}{5 \times 3} = \dfrac{2}{15}$. إذاً دفعت ليلى $\boxed{\dfrac{2}{15}}$ من تكاليف الرحلة.

ملاحظة : يمكن الإجابة على السؤال بسلسلة عمليات واحدة : $\dfrac{1}{5} \times \left(1 - \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1 \times 2}{5 \times 3} = \dfrac{2}{15}$.

2. (ا) مدة الرحلة هي : $9\,\text{h}12\,\text{min}$ (من $22\,\text{h}30$ إلى $24\,\text{h}00 \leftarrow 1\,\text{h}30$ و $1\,\text{h}30 + 7\,\text{h}42 = 9\,\text{h}12$).

$$\begin{array}{rccc} & {\scriptstyle 1} & & \\ & 01 & \text{h} & 30 \\ + & 07 & \text{h} & 42 \\ \hline = & 09 & \text{h} & 12 \end{array}$$

(ب) المسافة الكلية هي $d = 690\,\text{km}$ و الزمن المستغرق لقطع هذه المسافة هو $t = 9\,\text{h}12 = 9\,\text{h} + \dfrac{12}{60}\,\text{h} = 9\,\text{h} + 0,2\,\text{h} = 9,2\,\text{h}$

و بالتالي فالسرعة المتوسطة التي سارت بها الحافلة هي $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{690\,\text{km}}{9,2\,\text{h}} = \boxed{75\,\text{km/h}}$.

3. • إذا اختاروا التخفيض بِ $1200\,\text{DA}$ فإنهم سيدفعون : $\boxed{5520\,\text{DA}}$ $56 \times 120 - 1200 = 6720 - 1200 = 5520$

• و إذا اختاروا تخفيض 35% من ثمن التذكرة الواحدة فإنهم سيدفعون : $\boxed{4368\,\text{DA}}$.

$$56 \times \left(1 - \frac{35}{100}\right) \times 120 = 56 \times (1 - 0,35) \times 120 = 56 \times 0,65 \times 120 = 4368$$

العرض الأفضل هو الثاني (تخفيض بنسبة 35% على ثمن التذكرة الواحدة).

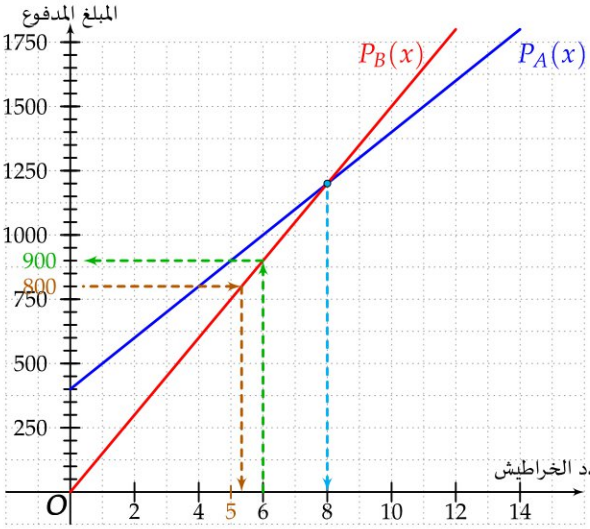
طريقة أخرى : نسبة التخفيض في الحالة الأولى هي $\frac{1200}{6720} \times 100 \approx 18\%$ و هي أقل من نسبة التخفيض في الحالة الثانية.

حل التمرين رقم 8

للعودة إلى التمرين 8

1.

عدد الخراطيش	2	5	11	14
المبلغ في المحل (DA)	$2 \times 150 = 300$	750	$11 \times 150 = 1650$	$14 \times 150 = 2100$
المبلغ في الأنترنت (DA)	$2 \times 100 + 400 = 600$	900	$11 \times 100 + 400 = 1500$	$14 \times 100 + 400 = 1800$



2. (أ) $P_A(x) = 150 \times x = 150x$.

(ب) $P_B(x) = 100 \times x = 100x + 400 = 100x + 400$.

3. المستقيم (d) يشمل المبدأ O و النقطة $(5; 750)$ مثلا (السؤال الأول).

4. (أ) من أجل 6 خراطيش، يستحسن الشراء في المحل.

(ب) بمبلغ 800 يمكن شراء 5 خراطيش على الأكثر (و هذا في المحل).

(ج) بدءاً من 8 خراطيش، يكون ثمن الشراء عبر الأنترنت أصغر من أو يساوي ثمن الشراء في المحل.

حل التمرين رقم 9

للعودة إلى التمرين 9

الجزء الأول :

1. عدد الفرق قاسم مشترك للعددين 54 و 12 و هو أكبر ما يمكن إذاً عدد الفرق هو $\text{pgcd}(54; 12) = 6$.

$$54 = 12 \times 4 + 6$$
$$12 = 6 \times 2 + 0$$

2. عدد الأطفال في كل مجموعة هو $54 \div 6 = 9$ و عدد المؤطرين هو $12 \div 6 = 2$.

تتشكل كل مجموعة من 6 أطفال و مؤطرَيْن اثنين.

الجزء الثاني :

1. لدينا : $\boxed{450\,\text{m}}$ $= 1450\,\text{m} - 1000\,\text{m} = CF - BE = CF - AF = CA$.

2. في المثلث ABC القائم في A لدينا : $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{CB}$ أي $\frac{450}{CB} = \sin 22°$ منه $CB = \frac{450}{\sin 22°} \approx 1200$

$$\frac{450}{0,375} = 1200$$

إذاً طول مسار التزحلق هو $\boxed{CB = 1200\,\text{m}}$ بالتدوير إلى الوحدة.

3. $BD = BC - CD = 1200\,\text{m} - 400\,\text{m} = 800\,\text{m}$.

بما أن $(DH) \perp (AB)$ و $(CA) \perp (AB)$ فإن $(DH) // (CA)$ (إذا عامد مستقيمان نفس المستقيم فهما متوازيان).

في المثلث ABC لدينا : $H \in (AB)$ و $D \in (CB)$ بحيث $(DH) // (CA)$ فحسب خاصية طاليس :

$$\frac{BH}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{DH}{AC} \text{ أي } \frac{BH}{BA} = \frac{800}{1200} = \frac{DH}{450} \text{ منه } DH = \frac{450 \times 800}{1200} = 300$$

إذاً $\boxed{DH = 300\,\text{m}}$ بالتدوير إلى الوحدة.

طريقة أخرى : في المثلث DBH القائم في H لدينا : $\sin \widehat{DBH} = \frac{DH}{DB}$ منه

$$DH = DB \times \sin \widehat{DBH} = 800\,\text{m} \times \sin 22° \approx 800\,\text{m} \times 0,375 = 300\,\text{m}$$

الجزء الثالث :

إذا كان α قيس زاوية انحدار هذا الجزء من الطريق فإن $\tan\alpha = 30\% = \frac{30}{100} = 0,3$ منه $\alpha \approx 17°$

$0,3$ 2ndf cos.

بما أن $\alpha < 22°$ فإن مسار التزحلق أشد انحدارا من هذا الجزء من الطريق.

حل التمرين رقم 10 — للعودة إلى التمرين 10

الجزء الأول

مساحة الغلاف (المستطيل) هي $S = a \times b = 160\,\text{cm}^2$. لكن $b = \frac{2}{5}a$ منه $a \times \frac{2}{5}a = 160$ أي $\frac{2}{5}a^2 = 160$ منه

$a = \sqrt{400}\,\text{cm} = 20\,\text{cm}$ منه $a^2 = \frac{160}{\frac{2}{5}} = 160 \times \frac{5}{2} = \frac{160 \times 5}{2} = 400$ و بالتالي $b = \frac{2}{5}a = \frac{2}{5} \times 20\,\text{cm} = \frac{2 \times 20}{5}\,\text{cm} = 8\,\text{cm}$.

إذاً طول الغلاف هو $a = 20\,\text{cm}$ و عرضه هو $b = 8\,\text{cm}$.

الجزء الثاني

1. مساحة الجزء $MIEL$ هي : $S_2 = S_{LTE} + S_{MITL} = \frac{LE \times TE}{2} + LE \times IT = \frac{8 \times 4}{2} + 8 \times x = 16 + 8x\ (\text{cm}^2)$

طريقة أخرى : $S_2 = \frac{(LM + IE) \times LE}{2} = \frac{(x + 4 + x) \times 8}{2} = (2x + 4) \times 4 = 8x + 16\ (\text{cm}^2)$

2. مساحة الجزء $BCIM$ هي :

$S_3 = S - (S_1 + S_2) = 160 - (2 + 8x + 16) = 160 - (8x + 18) = 160 - 8x - 18 = 142 - 8x\ (\text{cm}^2)$

3. S_3 تفوق S_2 معناه $S_3 > S_2$ أي $142 - 8x > 8x + 16$ منه $-8x - 8x > 16 - 142$ أي $-16x > -126$

منه $x < \frac{-126}{-16}$ أي $x < 7,875$. و بما أن x عدد موجب (لأنه طول) فإن $0 \leqslant x < 7,875$.

ملاحظة : يجب أن يكون $x \leqslant CT$ أي $x \leqslant 16$ و هذا محقق.

الجزء الثالث

في المثلث KMN لدينا : $D \in (KM)$ و $G \in (NM)$ بحيث $(DG) // (KN)$ فحسب خاصية طاليس :

$$\frac{MD}{MK} = \frac{MG}{MN} = \frac{DG}{KN} \text{ أي } \boxed{\frac{0,8}{2,4} = \frac{DG}{1,8}} \text{ منه } \frac{0,8}{MK} = \frac{0,8 \times 1,8}{2,4} = 0,6 \text{ منه } DG.$$

إذاً : $DG = 0,6\,\text{cm}$.

الجزء الأول: لنبين أن بعدي الورقة النقدية هما 16 cm و 8 cm :
لدينا : $S = 128$ أي $a \times b = 128$.
علما أن العرض b يساوي نصف الطول a فإن : $a = 2b$ منه $2b \times b = 128$ أي $2b^2 = 128$ منه $b^2 = \dfrac{128}{2}$ أي $b^2 = 64$ منه $\boxed{8\,\text{cm}}$ $= b = \sqrt{64}\,\text{cm}$ و بالتالي $a = 2b = 2 \times 8\,\text{cm} = \boxed{16\,\text{cm}}$.

الجزء الثاني:

1. التعبير بدلالة x عن مساحة الجزء $AEFD$:

$$S_1 = \frac{(AE + DF) \times AD}{2} = \frac{(x + x + 2) \times 8}{2} = (2x + 2) \times \frac{8}{2} = 4\,(2x + 2) = 8x + 8$$

إذن $\boxed{S_1 = 8x + 8 \quad (\text{cm}^2)}$.

2. استنتاج مساحة الجزء $BCFE$:

$$S_2 = S - S_1 = 128 - (8x + 8) = 128 - 8x - 8 = 120 - 8x$$

إذن $\boxed{S_2 = 120 - 8x \quad (\text{cm}^2)}$.

3. (ا) تمثيل الدالتين f و g :

	$f(x) = 8x + 8$	
x	1	7
y	16	64

f دالة تآلفية إذن تمثيلها البياني هو المستقيم الذي يشمل النقطتين $(1;16)$ و $(7;64)$.

	$g(x) = 120 - 8x$	
x	0	7
y	120	64

g دالة تآلفية إذن تمثيلها البياني هو المستقيم الذي يشمل النقطتين $(0;120)$ و $(7;64)$.

(ب) حل المتراجحة $f(x) < g(x)$:

$f(x) < g(x)$ معناه $8x + 8 < 120 - 8x$ منه $8x + 8x < 120 - 8$ أي $16x < 112$ منه $x < \dfrac{112}{16}$
أي $x < 7$.
و بالتالي : كل قيم x الأصغر تماما من 7 حلول للمتراجحة $f(x) < g(x)$.
تفسير النتيجة: عندما يكون الطول AE أصغر تماما من 7 cm (و أكبر من 0)، يكون الجزء $AEFD$ أصغر مساحة من الجزء $BCFE$.

(ج) إيجاد قيمة x بحيث $S_1 = S_2$ بقراءة بيانية :
بما أن فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين الممثلين للدالتين f و g هي 7 فإن $\boxed{x = 7}$.

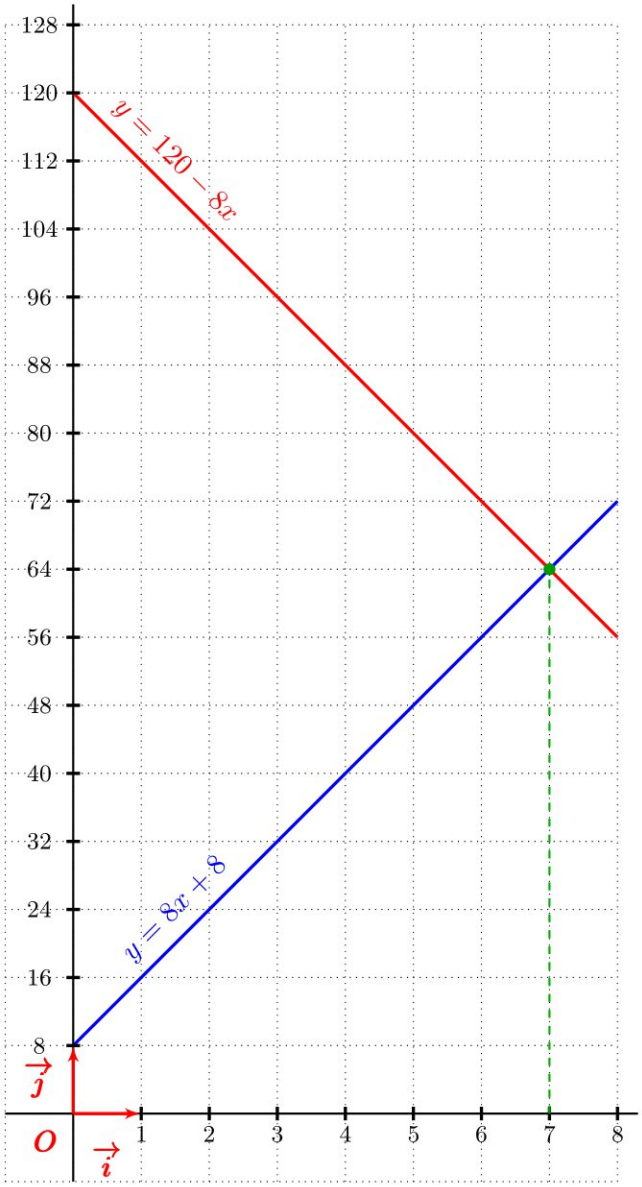
الجزء الثالث

التأكد من موثوقية ورقة نقدية عددها التسلسلي هو $N = 5023860401247$:

مجموع أرقام العدد N هو 42.
لنحسب $\text{pgcd}\,(2019;42)$:

$2019 = 42 \times 48 + \boxed{3}$
$42 = 3 \times 14 + 0$

آخر باقٍ غير معدوم هو 3 إذن $\text{pgcd}\,(2019;42) = 3$ و بالتالي فالورقة النقدية غير مزورة.



حل التمرين رقم **12** للعودة إلى التمرين 12

حل التمرين رقم **13** للعودة إلى التمرين 13

حل التمرين رقم **14** للعودة إلى التمرين 14

حل التمرين رقم **15** للعودة إلى التمرين 15