الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مـــديرية التربية بولاية برج بوعريريج — ثانوية : محمادي آحمد –العناصر-

امتحان البكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي — المــوسم الدراسي : 2018/2017

الشعبــــــة : الثالثة علوم التجريبية .

اختبار في مادة الرياضيات — المـــــــــــدة : 3 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط) :

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j};\vec{k}\right)$ ؛ نعتبر النقط :

$A(1\,;1;0)$, $B(2;0;-1)$; $C(0;3;-1)$ و $D(-1\,;4;\,0)$

1) أثبت أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع ثم بين أن المعادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي $3x+2y+z-5=0$.

2) عين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيم (AB) و يُعامد المستوي (ABC) .

3) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من النقطة $H(-2\,;0\,;-3)$ و العمودي على المستوي (Q)

4) أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة S الذي مركزه H و مماس للمستوي (ABC) ثم أدرس تقاطع سطح الكرة S و المستقيم (CD).

التمرين الثاني (5 نقاط) :

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة C : $\left(z-\sqrt{3}\right)\left(z^2-\sqrt{3}\,z+1\right)=0$.

2/ المستوي المركب منسوب إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ ، لتكن A ، B و C نقط لواحقها على الترتيب:

$z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ، $z_B=\sqrt{3}$ ، $z_C=\overline{z}_A$.

أثبت أن $z_A^{1962}+z_C^{2016}=0$ ثم عين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي موجب

3) أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

4) عين z_E لاحقة النقطة E صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ؛ ثم بين أن النقط A ؛ C و E في استقامية .

5) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z-z_A}{z-z_C}$ تخيليا صرفا ؛ $(z\neq z_C)$.

التمرين الثالث (4 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

1) عين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4}$.ثم برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 1$.

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4) ثم أحسب المجموع : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + ... + \frac{5^n}{v_n}$.

التمرين الرابع (7 نقاط):

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$

1- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ؛ $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

2- ادرس إشارة $g(x)$.   (لاحظ أن g(1)=0)

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ: $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$. وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق .

1- بين أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f(\frac{1}{x}) = f(x)$ ثم احسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا .

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- أنشئ المنحنى (C) .

4- بين أن الدالة $h : x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x)$ على $]0, +\infty[$ ؛ ثم باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$.

5- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الاول (5 نقاط) :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+10=0$.

استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z حيث: $(\overline{z}+2)^2-6(\overline{z}+2)+10=0$

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A ،B ،C ،D لاحقاتها

$z_A=3-i$ و $z_B=3+i$ و $z_C=1+i$ و و $z_D=1-i$

عين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3) E النقطة التي لاحقتها $z_E=7-3i$ و F صورتها بالدوران r ؛ تحقق أن لاحقة F هي $z_F=5+3i$

عين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$

4) مثل النقاط A ،B ،E ،F و H و عين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$

5) عين المجموعة (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z=1-i+ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما k يمسح $\mathbb{R}^*$.

عين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z-1-i|=|z-1+i|$.

التمرين الثاني (4 نقاط) :

يحتوي كيس على 7 كرات منها 3 بيضاء تحمل الأرقام : 2 , 2 , 1 و أربعة حمراء تحمل الأرقام 2 , 2 , 1 , 1

1) نسحب كرة واحدة من الكيس.

أ – ما احتمال الحصول على كرة تحمل الرقم 1.

ب – إذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1 فما هو احتمال أن يكون لونها أحمراً

2) نسحب على التوالي كرتين من الكيس دون ارجاع .

أ – ما احتمال الحصول على كرتين تحمل كل منها رقما فرديا

ب – ما احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون

ج – ما احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين 3

التمرين الثالث (4 نقاط) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0=2$ ومن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=5-\frac{4}{u_n}$

1) احسب : u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2\le u_n\le 4$

2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة .

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_{n+1}\leq \frac{4-u_n}{2}$

4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq 4-u_n\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

التمرين الرابع (7 نقاط) :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

-1 عين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0;-3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x)=0$.

-2 نضع $a=1$, $b=0$, $c=-3$

أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

-3 أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ ثم عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

-4 أرسم (T) و (C_f) .

-5 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x)+2f'(x)+f''(x) = 2e^{-x}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

-6 أحسب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$

-7 m وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2-3+me^x=0$.

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح المفصل للاختبار التجريبي للشعبة العلوم التجريبية ماي 2017

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط) :

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ؛ نعتبر النقط :

$A(1;1;0)$, $B(2;0;-1)$; $C(0;3;-1)$ و $D(-1;4;0)$

1) اثبات أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع معناه ان $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و لدينا $\overrightarrow{AD}(-2;3;0)$ و $\overrightarrow{BC}(-2;3;0)$ و منه محققة

اثبات أن المعادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي $3x+2y+z-5=0$ لنبين أن النقط الثلاثة تنتمي إلى هذا المستوي

$3(1)+2(1)+(0)-5=0$ محققة و منه A تنتمي إلى هذا المستوي .

$3(2)+2(0)+(-1)-5=0$ محققة و منه B تنتمي إلى هذا المستوي .

$3(0)+2(3)+(-1)-5=0$ محققة و منه C تنتمي إلى هذا المستوي .

و منه المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي $3x+2y+z-5=0$.

2) تعين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيم (AB) و يُعامد المستوي (ABC) :

ليكن شعاع الناظيمي للمستوي (Q) هو $\overrightarrow{n'}(a;b;c)$ و الشعاع الناظيمي للمستوي (ABC) هو $\overrightarrow{n}(3;2;1)$ و $\overrightarrow{AB}(1;-1;-1)$

لدينا (Q) يحوي المستقيم (AB) و يُعامد المستوي يعني أن $\overrightarrow{n'}.\overrightarrow{n}=0$ و $\overrightarrow{n'}.\overrightarrow{AB}=0$ أي ان

$\begin{cases} a-b-c=0 \dots (1) \\ 3a+2b+c=0 \dots\dots (2) \end{cases}$ بالجمع نجد $b=-4a$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد $a+4a-c=0$ و منه $c=5a$ بوضع $a=1$ نجد ان $\overrightarrow{n'}(1;-4;5)$ و منه معادلة (Q) هي من الشكل

$x-4y+5z+d=0$ و هو يشمل النقطة A نعوض إحداثياتها في المعادلة الديكارتية نجد

$1-4(1)+5(0)+d=0$ و منه $d=3$ معادلة (Q) هي $x-4y+5z+3=0$

3) تعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من النقطة $H(-2;0;-3)$ و العمودي على المستوي (Q)

هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث $\begin{cases} x=t-2 \\ y=-4t \quad : t\in IR \\ z=5t-3 \end{cases}$

4) كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة S الذي مركزه H و مماس للمستوي (ABC) هو مجموعة النقط

$M(x;y;z)$ حيث $HM=d(H;ABC)$ نحسب $d(H;ABC)=\dfrac{|3(-2)+2(0)+(-3)-5|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\sqrt{14}$

و منه $(x+2)^2+y^2+(z+3)^2=14$ بالتبسيط نجد $x^2+y^2+z^2+4x+6z-1=0$

دراسة الوضع النسبي بين سطح الكرة S و المستقيم (CD)

التمثيل الوسيطي للمستقيم (CD) لدينا $\overrightarrow{CD}(-1;1;1)$ هو $\begin{cases} x=-t` \\ y=t`+3 : t`\in IR \\ z=t`-1 \end{cases}$ و منه نعوض في المعادلة

الديكارتية للسطح S نجد $t`^2+(t`+3)^2+(t`-1)^2-4t`+6(t`-1)-1=0$ و منه $3t`^2+6t`+3=0$ و هذا يكافئ

$t`^2+2t`+1=0$ و منه للمعادلة حل مضاعف هو $t`=-1$ إذن سطح الكرة يتقاطع مع المستقيم في نقطة أي انه مماس للسطح في النقطة $K(1;2;-2)$.

<u>التمرين الثاني (5 نقاط) :</u>

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C : $\left(z-\sqrt{3}\right)\left(z^2-\sqrt{3}\,z+1\right)=0$ يكافئ $z-\sqrt{3}=0$ او

$z^2-\sqrt{3}z+1=0$ أي ان $z=\sqrt{3}$ و نحسب المميز للمعادلة الثانية $\Delta=-1$ للمعادلة حلين هما

$z'=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z''=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ مجموعة الحلول هي $S=\left\{\sqrt{3}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، لتكن A ، B و C نقط لواحقها على الترتيب:

$z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ، $z_B=\sqrt{3}$ ، $z_C=\bar{z}_A$.

اثبات أن $z_A^{1962}+z_C^{2016}=0$ نكتب العددان على الشكل الأسي $z_A=e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $z_C=e^{i\frac{\pi}{6}}$ و منه

$z_A{}^{1962}=\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{1962}$ و منه $z_A{}^{1962}=e^{-327\pi i}=\cos(-327\pi)+i\sin(-327\pi)=-1$

و $z_C{}^{2016}=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2016}$ و منه $z_C{}^{2016}=e^{336\pi i}=\cos(336\pi)+i\sin(336\pi)=+1$ و منه $-1+1=0$

تعيين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي موجب

لدينا مما سبق و حسب دستور موفر

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\left(e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^n=e^{-\frac{n\pi}{3}i}=\cos\left(\frac{-\pi n}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-n\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

يكون عددا حقيقيا موجب يعني ان $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)=1$ و $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)=0$ أي ان $\left(\frac{n\pi}{3}\right)=2\pi k$ و k عدد طبيعي و منه

نجد $n=6k$ و k عدد طبيعي

3) كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي لدينا

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{6}i}}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC بما أن $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2\pi k\ :\ k\in Z$ فإن المثلث

ABC متقايس الأضلاع .

4) تعيين z_E لاحقة النقطة E صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

و منه $z_E=2e^{\frac{\pi}{3}i}z_B+\left(1-2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)z_A$

ومنه $z_E=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)+\left(1-1-i\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

$$z_E=\sqrt{3}+3i-i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

اثبات أن النقط A ؛ C و E في استقامية لدينا $z_E-z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}=2i$ و

$z_C-z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}=i$ و منه $z_E-z_A=2(z_C-z_A)$ أي ان

$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AC}$ و منه النقط A ؛ C و E في استقامية.

5) تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z-z_A}{z-z_C}$ تخيليا صرفا $(\ z\neq z_C)$

يعني أن $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi k\ :k\in Z$ و هذا يعني أن $\left(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MA}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi k$ و منه

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=0$ و منه مجموعة النقط M هي الدائرة ذات القطر $[AC]$.

التمرين الثالث (4 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0=\frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{u_n+4}$.

1) تعيين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=a+\frac{b}{u_n+4}$ بالقسمة الاقليدية نجد

$u_{n+1}=\frac{3u_n+12-10}{u_n+4}=3-\frac{10}{u_n+4}$ و منه $a=3$ ، $b=-10$

البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2<u_n<1$

لدينا $u_0=\frac{1}{4}$ و منه $-2<u_0<1$ محققة

نفرض أن $-2<u_n<1$ و لنبرهن أن $-2<u_{n+1}<1$

الطريقة الأولى :

نبرهن أن $-2<u_{n+1}$ أي $2+u_{n+1}>0$

$2+u_{n+1}=2+3-\frac{10}{u_n+4}=\frac{5u_n+12-10}{u_n+4}=\frac{5u_n+2}{u_n+4}$ موجبة لان $2+u_n>0$ و منه $2+u_{n+1}>0$.

نبرهن أن $u_{n+1}<1$ أي $u_{n+1}-1<0$

$u_{n+1}-1=3-\frac{10}{u_n+4}-1=\frac{2u_n+8-10}{u_n+4}=\frac{2u_n-2}{u_n+4}=2\left(\frac{u_n-1}{u_n+4}\right)$ عدد سالب لان لان $-2<u_n<1$ و منه $u_{n+1}<1$

و منه $-2<u_{n+1}<1$ إذن من أجل عدد طبيعي n فإن $-2<u_n<1$

الطريقة الثانية :

لدينا الدالة المرفقة هي f حيث $f(x)=\frac{3x+2}{x+4}$ و دالتها المشتقة هي $f'(x)=\frac{10}{(x+4)^2}$

و منه f متزايدة على المجال $[-2;1]$.

و منه نجد $-2 < u_n < 1$ و منه نجد $f(-2) < f(u_n) < f(1)$ كون أن f متزايدة أي ان $-2 < u_{n+1} < 1$

و منه من أجل عدد طبيعي n فإن $-2 < u_n < 1$

2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4} = -\frac{(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$$ الفرق موجب لأن $-2 < u_n < 1$

و منه المتتالية متزايدة .

استنتاج أن (u_n) متقاربة : بما ان المتتالية متزايدة و محدودة من الاسفل فهي متقاربة .

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

تبيين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول لدينا

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{1 - u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 4} + 2}{1 - \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}} = \frac{3u_n + 2 + 2u_n + 8}{u_n + 4 - 3u_n - 2} = \frac{5u_n + 10}{-2u_n + 2} = \frac{5}{2}\left(\frac{u_n + 2}{1 - u_n}\right) = \frac{5}{2}v_n$$ و منه المتتالية

(v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{u_0 + 2}{1 - u_0} = \frac{\frac{1}{4} + 2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{9}{3} = 3$

كتابة v_n و u_n بدلالة n : $v_n = 3\left(\frac{5}{2}\right)^n$

لدينا $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$ أي ان $v_n - u_n v_n = u_n + 2$ و منه $u_n + u_n v_n = v_n - 2$ أي ان $u_n(1 + v_n) = v_n - 2$ و

منه $u_n = \frac{v_n - 2}{1 + v_n} = \frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n - 2}{1 + 3\left(\frac{5}{2}\right)^n}$.

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n - 2}{1 + 3\left(\frac{5}{2}\right)^n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n} = 1$

4) حساب المجموع : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \ldots + \frac{5^n}{v_n}$ بوضع. $t_n = \frac{5^n}{v_n} = \frac{5^n}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n} = \frac{2^n}{3}$ و منه (t_n) متتالية هندسية

أساسها 2 و حدها الأول $t_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{3}$ و منه $S_n = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots t_n = t_0\left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}\right) = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} - 1\right)$

التمرين الرابع (7 نقاط):

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$

1- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$: $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$:

$g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln(x)$ و $g'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{x^2+1-2x}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة g مما سبق نجد أن $g'(x)\geq 0$ و منه الدالة g متزايدة على $]0,+\infty[$.

2- دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1)=0$ و الدالة g متزايدة على $]0,+\infty[$ تتلخص الاشارة في الجدول الموالي

x	0		1		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$-$	0	$+$	

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$. وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق .

1- اثبات أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ نضع $t=\sqrt{x}$ و منه $\lim_{x\to+\infty}(t)=+\infty$ و منه

$\lim_{x\to+\infty}\frac{[\ln(x)]^2}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{2\ln(t)}{t}\right]^2=0$ لان $\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\ln(t)}{t}\right]=0$ (التزايد المقارن).

حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{1}{x^2}-\frac{(\ln x)^2}{x}-\frac{2}{x}\right]=+\infty$ لان

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{(\ln x)^2}{x}-\frac{2}{x}\right]=0$.

التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ ؛ $f(\frac{1}{x})=f(x)$: لدينا

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+x-\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2-2=x+\frac{1}{x}-(-\ln x)^2-2=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2=f(x)$$

حساب $\lim_{x\to0^+}f(x)$: $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و منه المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقارب عموديا معادلته $x=0$.

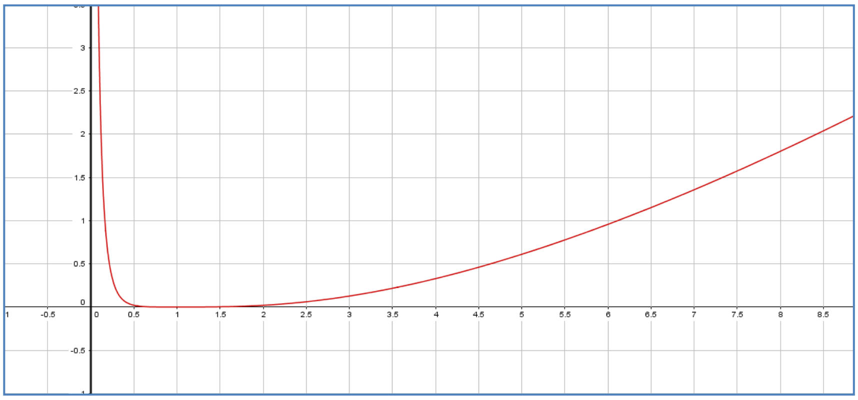
2- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ ؛ $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ بالحساب $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$ و منه

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}-2\frac{1}{x}(\ln x)=\frac{x^2-1-2x\ln x}{x^2}=\frac{x-\frac{1}{x}-2\ln x}{x}=\frac{g(x)}{x}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$

$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$



-3 رسم المنحنى (C) :

-4 بين أن الدالة $h : x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x)$ على $]0,+\infty[$

محققة $h'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$

باستعمال التكامل بالتجزئة

تبيين أن $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ بوضع $u'(x) = 1$ و $v(x) = (\ln x)^2$ و منه $u(x) = x$ و $v'(x) = \dfrac{2}{x}(\ln x)$

و منه $u'(x) = 1$ و $\int_1^e u`(x).v(x)dx = \left[x\,(\ln(x))^2\right]_1^e - 2\int_1^e \ln(x)dx = e - 2\left[\, x\ln x - x \,\right]_1^e = e - 2$

-5 حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$

$\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left[x + \dfrac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2\right]dx$.و منه $\int_1^e f(x)dx = \left[\dfrac{1}{2}x^2 + \ln(x) - 2x\right]_1^e - e + 2$

$\int_1^e f(x)dx = \dfrac{e^2}{2} + 1 - 2e + \dfrac{3}{2} - e + 2 = \left(\dfrac{e^2}{2} - 3e + \dfrac{9}{2}\right)u.a$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

<u>التمرين الاول (5 نقاط) :</u>

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 10 = 0$ نحسب المميز $\Delta = -4$ للمعادلة حلين هما $z' = 3 - i$ و $z'' = 3 + i$

استنتاج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z حيث: $(\overline{z} + 2)^2 - 6(\overline{z} + 2) + 10 = 0$ مما سبق نجد أن للمعادلة تكافئ $\overline{z} + 2 = 3 - i$ او $\overline{z} + 2 = 3 + i$ أي ان $\overline{z} = 1 - i$ او $\overline{z} = 1 + i$ و منه $z = 1 + i$ او $z = 1 - i$ هما حلى المعادلة الأخيرة

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A ،B ،C ،D لاحقاتها

$z_A = 3 - i$ و $z_B = 3 + i$ و $z_C = 1 + i$ و $z_D = 1 - i$ و

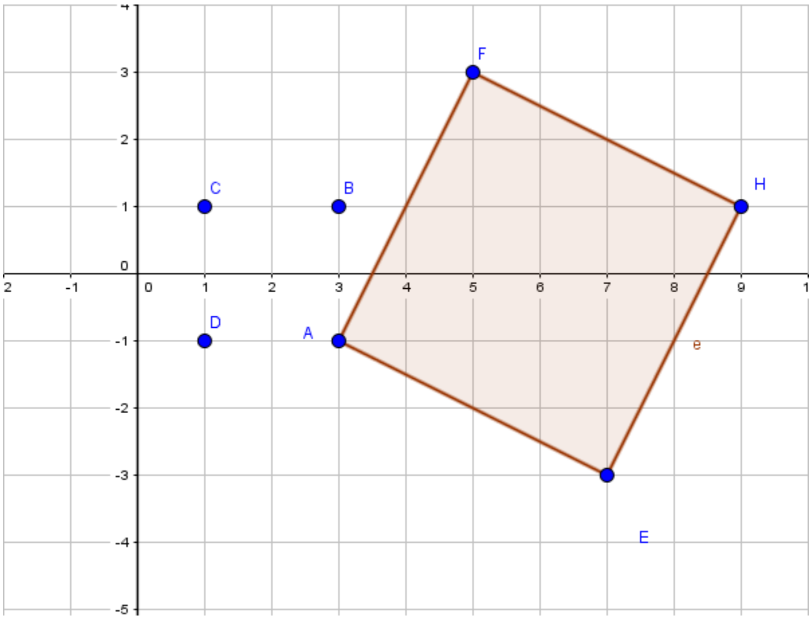
تعيين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$: هي $z' - z_A = i(z - z_A)$ أي $z' - 3 + i = i(z - 3 + i)$ و منه $z' = iz + 2 - 4i$

3) E النقطة التي لاحقتها $z_E=7-3i$ و F صورتها بالدوران r

التحقق أن لاحقة F هي $z_F=5+3i$ لدينا $z_F=iz_E+2-4i=i(7-3i)+2-4i=7i+3+2-4i=5+3i$ محققة

تعيين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$ أي $z_H-z_F=z_E-z_A$ و منه $z_H=z_F+z_E-z_A=5+3i+7-3i-3+i=9+i$.

4)تمثيل النقاط A، B، E، F و H



تعيين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$ متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة و فيه ضلعان متجاورتان متقايسان فهو مربع .

5) تعيين المجموعة (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z=1-i+ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما k يمسح $\mathbb{R}^*$ لدينا $z=1-i+ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ يعني أن $z-(1-i)=ke^{-\frac{\pi}{4}i}$ أي ان

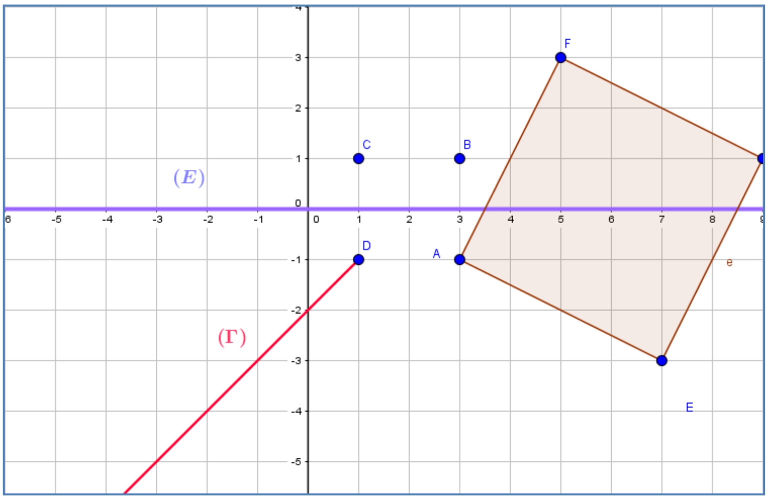
$\arg[z-(1-i)]=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ و هذا يعني

$(\overrightarrow{0I};\overrightarrow{DM})=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ و k عدد صحيح

مجموعة النقط هي نصف مستقيم $[DM)$ و الذي معامل توجيهه -1 (أي موازي للمنصف الثاني ذي المعادلة $y=-x$)

تعيين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z-1-i|=|z-1+i|$ تكافئ $CM=DM$

مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[CD]$.



التمرين الثاني (4 نقاط) :

التمرين الثالث (4 نقاط) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0 = 2$ ومن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$

1) حساب : $u_1 = 5 - \frac{4}{2} = 3$ و $u_2 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \le u_n \le 4$

لدينا $2 \le u_1 \le 4$ محققة

نفرض أن $2 \le u_n \le 4$ و لنبرهن أن $2 \le u_{n+1} \le 4$

$2 \le u_n \le 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{2} \ge \frac{1}{u_n} \ge \frac{1}{4}$ بالضرب في -4 نجد $-2 \le -\frac{4}{u_n} \le -1$ بإضافة 5 نجد

$3 \le 5 - \frac{4}{u_n} \le 4$ أي ان $2 \le 3 \le u_{n+1} \le 4$ و منه $2 \le u_{n+1} \le 4$ إذن من اجل كل عدد طبيعي n فإن $2 \le u_n \le 4$.

2) تبيين أن (u_n) متزايدة : نحسب الفرق

$u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{4}{u_n} - u_n = \frac{5u_n - 4 - u_n^{\,2}}{u_n} = \frac{(4-u_n)(-1+u_n)}{u_n}$ الفرق موجب لان $2 \le u_n \le 4$ فإن $4 - u_n \ge 0$ و $-1 + u_n \ge 0$ و هو المطلوب .

استنتاج أنها متقاربة : بما المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة .

1) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \le \frac{4 - u_n}{2}$

لدينا $4 - u_{n+1} = 4 - 5 + \frac{4}{u_n} = -1 + \frac{4}{u_n} = \frac{-u_n + 4}{u_n} = \frac{1}{u_n}(4 - u_n)$ و بما ان $2 \le u_n \le 4$ بالقلب نجد

$\frac{1}{4} \le \frac{1}{u_n} \le \frac{1}{2}$, و منه $4 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

2) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le 4 - u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ مما سبق نجد أن $0 \le 4 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4 - u_n)$

و منه $0 \le 4 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4 - u_n) \le \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(4 - u_{n-1})\right]$ أي $0 \le 4 - u_{n+1} \le \frac{1}{2^2}(4 - u_{n-1})$ و ها كذا

$0 \le 4 - u_{n+1} \le \frac{1}{2^2}(4 - u_{n-1}) \le \frac{1}{2^2}\left[\frac{1}{2}(4 - u_{n-2})\right]$ أي ان $0 \le 4 - u_{n+1} \le \frac{1}{2^3}(4 - u_{n-2})$ .... إلى أن

نصل إلى التعميم $0 \le 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ و منه $0 \le 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ اي ان
$(2)\ 0 \le 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2^{n+1}}$ اي ان $0 \le 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2^{n}}$ بتعويض نجد $0 \le 4-u_{n'} \le \frac{1}{2^{n'-1}}$ و هو المطلوب .

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ بما أن $n' = n+1$ $0 \le 4-u_n \le \frac{1}{2^{n-1}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ فحسب الحصر نجد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

التمرين الرابع (7 نقاط) :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0;-3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x)=0$.

$f(0)=-3$ و هذا يعني $c=-3$

و لدينا $f'(x) = (2ax+b)\ e^{-x} - (ax^2+bx+c)e^{-x} = \left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]e^{-x}$

$f'(0)=3$ يعني أن $b-c=3$; و منه $b=0$

$f(\sqrt{3})=0$ يعني ان $f(\sqrt{3}) = (3a-3)e^{-\sqrt{3}} = 0$ و منه $a=1$

2- نضع $a=1$, $b=0$, $c=-3$ تصبح $f(x) = (x^2-3)e^{-x}$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-3)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ لأنه بوضع $x=2t$ نجد

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4t^2}{e^{2t}}\right] = 4\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{e^t}\right)^2 = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2)e^{-x} = +\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x) = (-x^2+2x+3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2+2x+3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[3;+\infty[$ متزايدة على المجال $[-1;3]$

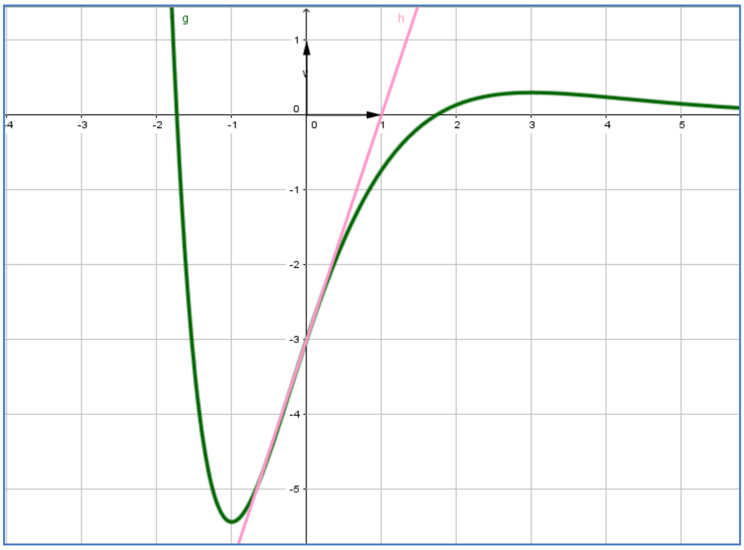
و شكل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-2e$	↗	$\frac{6}{e^3}$	↘	0

3- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ معادلة المماس هي $y=3x-3$

تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

$f(x)=0$ يكافئ $x^2-3=0$. اي ان $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B(\sqrt{3};0)$ و $C(-\sqrt{3};0)$



4- رسم (T) و (C_f)

5- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن

$$f(x)+2f'(x)+f''(x) = 2e^{-x}$$

و $f(x)=(x^2-3)e^{-x}$

$f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$

$f''(x)=(-2x+2)e^{-x}+(x^2-2x-3)e^{-x}$ أي ان $f''(x)=(x^2-4x-1)e^{-x}$

و منه $f(x)+2f'(x)+f''(x)=(x^2-3-2x^2+4x+6+x^2-4x-1)e^{-x}=2e^{-x}$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

$f(x)+2f'(x)+f''(x)=2e^{-x}$ يكافئ $f(x)=-2f'(x)-f''(x)+2e^{-x}$ و منه الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F حيث $F(x)=-2f(x)-f'(x)-2e^{-x}$ أي $F(x)=-2(x^2-3)e^{-x}-(-x^2+2x+3)e^{-x}-2e^{-x}$

أي $F(x)=(-2x^2+6)e^{-x}+(x^2-2x-3)e^{-x}-2e^{-x}$ و منه $F(x)=(-x^2-2x+1)e^{-x}$

6- حساب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$ هي

$$A=\int_1^{\sqrt{3}} -f(x)dx+\int_{\sqrt{3}}^{3} f(x)dx=[-F(x)]_1^{\sqrt{3}}+[F(x)]_{\sqrt{3}}^{3}=(4+4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}}+2e^{-1}+(-14)e^{-3}$$

$$A=\left[\left(4+4\sqrt{3}\right)e^{-\sqrt{3}}+2e^{-1}+(-14)e^{-3}\right]u.a$$

-7 m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2-3+me^x=0$

المعادلة تكافئ $me^x=-\left(x^2-3\right)$ أي ان $-m=\left(x^2-3\right)e^{-x}$ يكافئ $-m=f(x)$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=-m$

المناقشة

لما $-m<-2e$ أي ان $m>2e$ نلاحظ ان (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

لما $-m=-2e$ أي ان $m=2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

لما $-3>-m>-2e$ أي ان $3<m<2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين

لما $-m=-3$ أي ان $m=3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداهما معدوم و الأخر سالب .

لما $0\geq -m>-3$ أي ان $0\leq m<3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة .

لما $\frac{6}{e^3}>-m>0$ أي ان $-\frac{6}{e^3}<m<0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلاتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

لما $-m=\frac{6}{e^3}$ أي أن $m=-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتhن فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة

لما $-m>\frac{6}{e^3}$ أي ان $m<-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .

انتهى الموضوع الثاني

اختبار بكالوريا تجريبي شعبة الثالثة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمارين	عناصر الإجابة	التنقيط مجزأة	التنقيط كاملة
التمرين الأول	1) اثبات أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع معناه ان $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و لدينا $\overrightarrow{AD}(-2\,;3\,;0)$ و $\overrightarrow{BC}(-2;3;0)$ و منه محققة	0.25	04 ن
	اثبات أن المعادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي $3x+2y+z-5=0$ لنبين أن النقط الثلاثة تنتمي إلى هذا المستوى A و B و C	0.75	
	2) تعين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيم (AB) و يُعامد المستوي (ABC)		
	ليكن شعاع الناظيمي للمستوي (Q) هو $\overrightarrow{n'}(1;-4;5)$ و منه	0.5	
	معادلة (Q) هي $x-4y+5z+3=0$	0.5	
	3) تعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من النقطة $H(-2\,;0\,;-3)$ و العمودي على المستوي		

	0.5 0.25 0.25 0.25 0.25 0.5	(Q) $\begin{cases} x=t-2 \\ y=-4t \quad : t\in IR \\ z=5t-3\end{cases}$ 4) كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة S الذي مركزه H و مماس للمستوي (ABC) نحسب $d(H;ABC)=\frac{\lvert 3(-2)+2(0)+(-3)-5\rvert}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\sqrt{14}$ $x^2+y^2+z^2+4x+6z-1=0$ دراسة الوضع النسبي بين سطح الكرة S و المستقيم (CD) التمثيل الوسيطي للمستقيم (CD) $\begin{cases}x=-t` \\ y=t`+3 : t`\in IR \\ z=t`-1\end{cases}$ و منه نعوض في المعادلة الديكارتية للسطح S نجد $t`^2+(t`+3)^2+(t`-1)^2-4t`+6(t`-1)-1=0$ و منه $3t`^2+6t`+3=0$ و هذا يكافئ $t`^2+2t`+1=0$ و منه للمعادلة حل مضاعف هو $t`=-1$ إذن سطح الكرة يتقاطع مع المستقيم في نقطة أي انه مماس للسطح في النقطة $K(1;2;-2)$.	
5ن	1 . 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 1	1) حلول المعادلة $z=\sqrt{3}$ و نحسب المميز $\Delta=-1$ للمعادلة حلين هما $z'=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z''=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ 2) اثبات أن $z_A^{1962}+z_C^{2016}=0$ نكتب العددان على الشكل الأسي $z_A=e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $z_C=e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $z_A^{1962}=e^{-327\pi i}=-1$ و $z_C^{2016}=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2016}$ و منه $z_C^{2016}=e^{336\pi i}=1$ و منه $-1+1=0$ تعيين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي موجب $n=6k$ و k عدد طبيعي 3) كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي لدينا $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$ المثلث ABC متقايس الأضلاع . 4) تعيين z_E لاحقة النقطة E : $z_E=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ اثبات أن النقط A ؛ C و E في استقامية لدينا $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AC}$ و منه النقط A ؛ C و E في استقامية. 5) تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z-z_A}{z-z_C}$ تخيليا صرفا ($z\neq z_C$) يعني أن $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi k : k\in Z$ و هذا يعني أن	التمرين الثاني

		و منه $\left(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MA}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi k$ و منه $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=0$ و منه مجموعة النقط M هي الدائرة ذات القطر $[AC]$.	
4 ن	0.25 0.25 0.5 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 1	1) تعيين العددين الحقيقيين a ، b : $a=3$ ، $b=-10$ البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2<u_n<1$ لدينا $u_0=\frac{1}{4}$ و منه $-2<u_0<1$ محققة نفرض أن $-2<u_n<1$ و لنبرهن أن $-2<u_{n+1}<1$ نبرهن أن $-2<u_{n+1}$ أي $2+u_{n+1}>0$ $2+u_{n+1}=2+3-\frac{10}{u_n+4}=\frac{5u_n+12-10}{u_n+4}=\frac{5u_n+2}{u_n+4}$ موجبة لان $2+u_n>0$ و منه $2+u_{n+1}>0$. نبرهن أن $u_{n+1}<1$ أي $u_{n+1}-1<0$ $u_{n+1}-1=3-\frac{10}{u_n+4}-1=\frac{2u_n+8-10}{u_n+4}=\frac{2u_n-2}{u_n+4}=2\left(\frac{u_n-1}{u_n+4}\right)$ عدد سالب لان لان $-2<u_n<1$ و منه $u_{n+1}<1$ و منه $-2<u_{n+1}<1$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $-2<u_n<1$ 2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-1)(u_n+2)}{u_n+4}$ الفرق موجب لأن $-2<u_n<1$ و منه المتتالية متزايدة . استنتاج أن (u_n) متقاربة : بما ان المتتالية متزايدة و محدودة من الاسفل فهي متقاربة . 3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$. تبيين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول لدينا $v_{n+1}=\frac{5}{2}v_n$ و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ و حدها الأول $v_0=3$ كتابة v_n و u_n بدلالة n : $v_n=3\left(\frac{5}{2}\right)^n$ و منه $u_n=\frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n-2}{1+3\left(\frac{5}{2}\right)^n}$. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ 4) حساب المجموع : $S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{5}{v_1}+\frac{5^2}{v_2}+.....+\frac{5^n}{v_n}$. منه $S_n=\frac{1}{3}\left(2^{n+1}-1\right)$	التمرين الثالث

التمرين الرابع — 7 ن

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$

0.5 — 1- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$: $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$:

0.5 — استنتاج اتجاه تغير الدالة g مما سبق نجد أن $g'(x)\geq 0$ و منه الدالة g متزايدة على $]0,+\infty[$.

. — 2- دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1)=0$ و الدالة g متزايدة على $]0,+\infty[$ تتلخص الاشارة في الجدول الموالي

0.5

x	0		1		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$-$	0	$+$	

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$ اثبات أن

0.5 — 1- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ نضع $t=\sqrt{x}$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}(t)=+\infty$ و منه

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[\ln(x)]^2}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\frac{2\ln(t)}{t}\right]^2=0$ لان $\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\frac{\ln(t)}{t}\right]=0$ (التزايد المقارن).

0.25 — حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

0.25 — التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ ؛ $f(\frac{1}{x})=f(x)$: ل

0.25 — حساب $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ و منه المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقارب عموديا معادلته $x=0$.

0.25

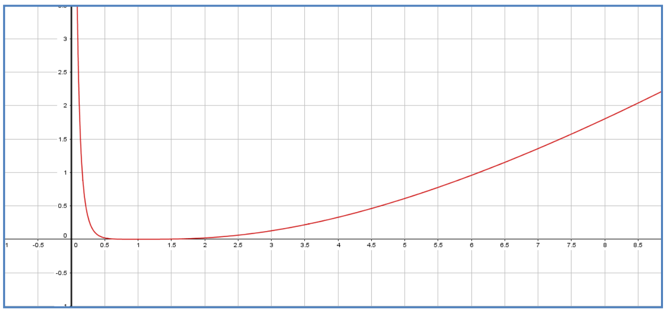
0.5 — 2- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ ؛ $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

جدول تغيرات الدالة f :

0.5

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3- رسم المنحنى (C) :



1 — 4- بين أن الدالة $h:x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x)$ على $]0,+\infty[$

محققة $h'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x$

باستعمال التكامل بالتجزئة

	0.25 0.75 1	تبيين أن $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e-2$ بوضع $u'(x)=1$ و $v(x)=(\ln x)^2$ و منه $u(x)=x$ و $v'(x)=\frac{2}{x}(\ln x)$ و منه $u'(x)=1$ و $\int_1^e u'(x).v(x)dx = \left[x(\ln(x))^2\right]_1^e - 2\int_1^e \ln(x)dx = e-2 \;\left[x\ln x - x\right]_1^e = e-2$ 5- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$ $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left[x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2\right]dx$.و منه $\int_1^e f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2+\ln(x)-2x\right]_1^e - e+2$ $\int_1^e f(x)dx = \frac{e^2}{2}+1-2e+\frac{3}{2}-e+2 = \left(\frac{e^2}{2}-3e+\frac{9}{2}\right)u.a$.	

الموضوع الثاني

التنقيط		عناصر الإجابة	التمارين
كاملة	مجزأة		

التمرين الأول | 04 ن

. التمرين الاول (5 نقاط) :

1) حلو المعادلتل في نحسب المميز $\Delta=-4$ للمعادلة حلين هما $z'=3-i$ و $z''=3+i$ — 0.5

استنتاج حلول المعادلة $\left(\overline{z}+2\right)^2-6\left(\overline{z}+2\right)+10=0$ مما سبق نجد أن منه $z=1+i$ او $z=1-i$ هما حلى المعادلة الأخيرة — 0.5

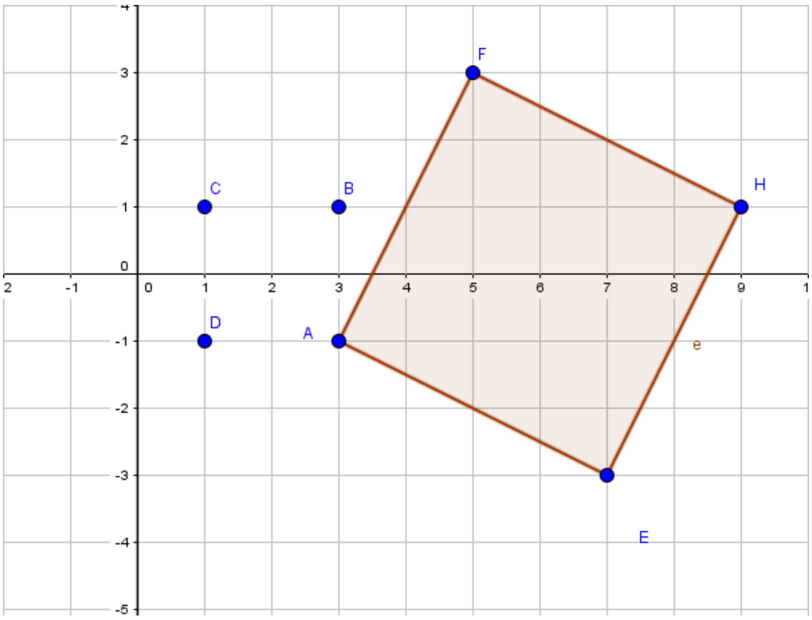
2) تعيين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$: هي — 1

$z'-z_A=i\left(z-z_A\right)$ أي $z'-3+i=i\left(z-3+i\right)$ و منه $z'=iz+2-4i$ — 0.5

3) التحقق أن لاحقة F هي $z_F=5+3i$ لدينا $z_F=5+3i$ محققة — 0.5

تعيين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$ أي $z_H=9+i$.

4)تمثيل النقاط A، B، E، F و H — 0.5



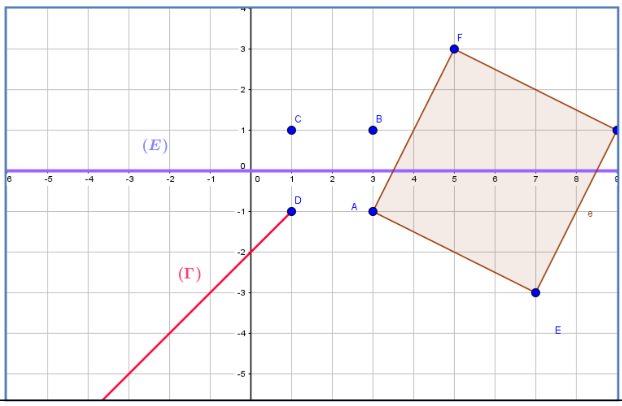
تعيين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$ متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة و فيه ضلعان متجاورتان متقايسان فهو مربع .

5) تعيين المجموعة (Γ) هي نصف مستقيم — 0.5

$[DM)$ و الذي معامل توجيهه -1 (أي موازي للمنصف الثاني ذي المعادلة $y=-x$) — 0.5

تعيين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z-1-i|=|z-1+i|$

تكافئ $CM=DM$ مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[CD]$. — 0.5



التمرين الثاني: | 4

1) أ- احتمال الحصول على كرة تحمل الرقم 1 هو $P(A)=\frac{3}{7}$ — 0.5

ب- الحادثة B للحصول على كرة حمراء $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ — 0.5

	0.75 0.5 0.5 0.25 0.25 0.25	$$P_A(B)=\frac{\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{7}}=\frac{2}{3}$$ 2 أ- احتمال الحصول على كرتين تحمل رقما فرديا : $P(c)=\frac{1}{7}$ ب- احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون : $P(D)=\frac{3}{7}$ ج- احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين 3 : $P(E)=\frac{3}{14}$	
4	+0.25 0.25 0.5 0.5	1) حساب : $u_1=5-\frac{4}{2}=3$ و $u_2=5-\frac{4}{3}=\frac{11}{3}$ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2\le u_n\le 4$ لدينا $2\le u_1\le 4$ محققة نفرض أن $2\le u_n\le 4$ و لنبرهن أن $2\le u_{n+1}\le 4$ $2\le u_n\le 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{2}\ge\frac{1}{u_n}\ge\frac{1}{4}$ بالضرب في -4 نجد $-2\le-\frac{4}{u_n}\le-1$ بإضافة 5 نجد $3\le 5-\frac{4}{u_n}\le 4$ أي ان $3\le u_{n+1}\le 4$ و منه $2\le 3\le u_{n+1}\le 4$ إذن $2\le u_{n+1}\le 4$	التمرين الثالث

	0.5 1 0.5 0.5	من اجل كل عدد طبيعي n فإن $2 \le u_n \le 4$. 2) تبيين أن (u_n) متزايدة : نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n=\frac{(4-u_n)(-1+u_n)}{u_n}$ الفرق موجب. استنتاج أنها متقاربة : بما المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة . -1 البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_{n+1}\le \frac{4-u_n}{2}$ لدينا $4-u_{n+1}=\frac{1}{u_n}(4-u_n)$ و بما ان $2\le u_n\le 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{4}\le\frac{1}{u_n}\le\frac{1}{2}$, و منه $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$. -2 استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 4-u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ مما سبق نجد أن $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$ و منه $0\le 4-u_{n+1}\le \frac{1}{2}(4-u_n)\le\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(4-u_{n-1})\right]$ أي $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^2}(4-u_{n-1})$ و ها كذا $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^2}(4-u_{n-1})\le\frac{1}{2^2}\left[\frac{1}{2}(4-u_{n-2})\right]$ أي ان $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^3}(4-u_{n-2})$ .... إلى أن نصل إلى التعميم $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ و منه $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ اي ان $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}}(2)$ اي ان $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^n}$ بتعويض نجد $0\le 4-u_{n'}\le\frac{1}{2^{n'-1}}$ و هو المطلوب . حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ بما أن $n'=n+1$ و $0\le 4-u_n\le\frac{1}{2^{n-1}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$ فحسب الحصر نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$	
(7 نقاط)	1	-1 تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c : $b=0$ و $a=1$ و $a=-3$ -2 ..... $f(x)=(x^2-3)e^{-x}$	التمرين الرابع

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ — +0.25 / 0.25

دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$ إشارتها

من إشارة $(-x^2+2x+3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة — 0.25

على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[3;+\infty[$ متزايدة على المجال $[-1;3]$

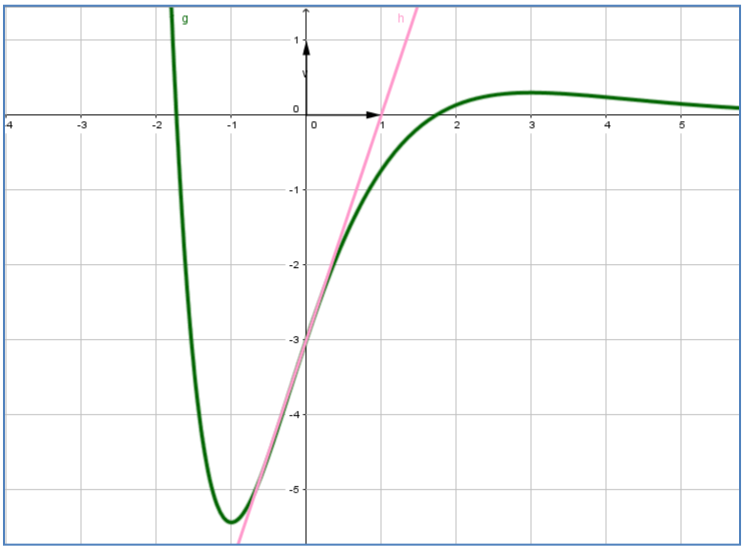
و شكل جدول تغيراتها : — 0.25

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	$\frac{6}{e^3}$	$\searrow$	0

3- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ معادلة المماس هي $y=3x-3$ — 0.5

تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

$f(x)=0$ يكافئ $x^2-3=0$. اي ان $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B(\sqrt{3};0)$ و $C(-\sqrt{3};0)$ — 0.5



4- رسم (T) و (C_f) — 1

5- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن

$$f(x)+2f'(x)+f''(x) = 2e^{-x}$$

$f(x)=(x^2-3)e^{-x}$ و $f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$ — 0.5

أي ان $f''(x)=(-2x+2)e^{-x}+(x^2-2x-3)e^{-x}$

$f''(x)=(x^2-4x-1)e^{-x}$

و منه

$f(x)+2f'(x)+f''(x)=(x^2-3-2x^2+4x+6+x^2-4x-1)e^{-x}=2e^{-x}$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

$f(x)+2f'(x)+f''(x)=2e^{-x}$ يكافئ $f(x)=-2f'(x)-f''(x)+2e^{-x}$ و

منه الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F حيث $F(x)=-2f(x)-f'(x)-2e^{-x}$

أي $F(x)=-2(x^2-3)e^{-x}-(-x^2+2x+3)e^{-x}-2e^{-x}$ أي

	0.5	و منه $F(x)=\left(-2x^2+6\right)e^{-x}+\left(x^2-2x-3\right)e^{-x}-2e^{-x}$ $F(x)=\left(-x^2-2x+1\right)e^{-x}$	
	1	6- حساب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$ هي $A=\int_1^{\sqrt{3}}-f(x)dx+\int_{\sqrt{3}}^{3}f(x)dx=[-F(x)]_1^{\sqrt{3}}+[F(x)]_{\sqrt{3}}^{3}=\left(4+4\sqrt{3}\right)e^{-\sqrt{3}}+2e^{-1}+(-14)e^{-3}$ $A=\left[\left(4+4\sqrt{3}\right)e^{-\sqrt{3}}+2e^{-1}+(-14)e^{-3}\right]u.a$	
	0.25	7- m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2-3+me^x=0$ المعادلة تكافئ $me^x=-(x^2-3)$ أي ان $-m=(x^2-3)e^{-x}$ يكافئ $-m=f(x)$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=-m$ المناقشة	
	0.75	لما $-m<-2e$ أي ان $m>2e$ نلاحظ ان (Δ_m)و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول . لما $-m=-2e$ أي ان $m=2e$ نلاحظ أن (Δ_m)و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب. لما $-3>-m>-2e$ أي ان $3<m<2e$ نلاحظ أن (Δ_m)و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين لما $-m=-3$ أي ان $m=3$ نلاحظ أن (Δ_m)و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداهما معدوم و الأخر سالب . لما $0\geq -m>-3$ أي ان $0\leq m<3$ نلاحظ أن (Δ_m)و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة . لما $\frac{6}{e^3}>-m>0$ أي ان $-\frac{6}{e^3}<m<0$ نلاحظ أن (Δ_m)و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلاتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب . لما $-m=\frac{6}{e^3}$ أي أن $m=-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m)و (C_f) يتقاطعان في نقطتhن فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة لما $-m>\frac{6}{e^3}$ أي ان $m<-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m)و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .	