ثانوية :عيسى زريمش (حمام دباغ)	**الفرض المحروس الثالث في مادة الرياضيات**	يوم :04 /03/ 2018
المستوى : 3تر		المدة : ساعة ونصف

التمرين الأول : (06 نقاط)

من أجل كل عدد صحيح n نضع: $A\left(n\right)=n^2-n+2007$

1 / أ. حلل إلى جداء عوامل أولية العددان 4014 و $A\left(1\right)$.

ب. أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 4014 و $A\left(1\right)$.

2 / بين أنه إذا كان 3 يقسم n فإن 3 يقسم $A\left(n\right)$. هل العكس صحيح؟برر إجابتك .

3 / أ. تحقق أنه من أجل كل عدد صحيح n : $\left(n+1\right)^2-\left(n+1\right)+2007=\left(n^2-n+2007\right)+2n$

4 / بين أنه إذا كان $A\left(n\right)$ عدد فردي فإن $A\left(n+1\right)$ عدد فردي .

5 / عين الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $A\left(n\right)$ يقسم $A\left(1\right)$.

التمرين الثاني (07 نقاط)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة الآتية : $11x-5y=2$...............(E)

1 /أ * برهن أن إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv 4[11]$.

ب * استنتج حلول المعادلة (E)

2/ ليكن n عددا طبيعي غير معدوم ، نضع $a=5n+2$ و $b=11n+4$

أ * عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

ب * عين قيم n بحيث يكون $PGCD(a,b)=2$.

جـ* استنتج قيم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما

3 / أ* ادرس حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10.

ب * استنتج رقم آحاد العدد 7^{2014}.

جـ * عين الثنائيات $(x;y)$ من $N^*\times N^*$ التي هي حلول للمعادلة (E) و تحقق $7^{y-2x}\equiv 9[10]$.

التمرين الثالث (07 نقاط)

مسابقة إمتحان شفهي تنظم بحيث يسحب المترشح عشوائيا 3 مواضيع من مجموعة تشمل 80 موضوع و يجب على المترشح أن يجيب على موضوع على الأقل من بين المواضيع الثلاثة المسحوبة

1| ما هو عدد الطرق لسحب المترشح ثلاثة مواضيع عشوائيا

2| يتقدم مترشح لهذا الإمتحان و لم يدرس سوى 50 موضوع من بين الــ 80 ما إحتمال أن

A " يجيب المترشح على المواضيع الثلاثة "

B " يجيب المترشح على موضوعين فقط "

C " يجيب المترشح على موضوع واحد فقط "

D " لا يجيب المترشح على أي موضوع "

3| ما هو عدد المواضيع التي يجب أن يدرسها المترشح لكي يكون احتمال سحبه لموضوع درسه على الأقل يتجاوز 0,99

بالتوفيق

ثانوية عيسى زريمش المستوى :3 تر

تصحيح الفرض المحروس الثالث

التمرين الأول:

من أجل كل عدد صحيح n نضع: $A(n)=n^2-n+2007$

1.أ.التحليل إلى جداء عوامل أولية للعددين 4014 و $A(1)$

$A(1)=2007=3^2\times223$ ، $4014=2A(1)=2\times3^2\times223$

ب.تعيين $PGCD(A(1);4014)$:

$PGCD(A(1);4014)=PGCD(A(1);2\times A(1))=A(1)$

2.نبين أنه إذا كان 3 يقسم n فإن 3 يقسم $A(n)$:

لدينا: 3 يقسم n وبالتالي 3 يقسم n^2

3 يقسم n و بالتالي 3 يقسم $-n$ ومن جهة 3 يقسم 2007

نستنتج أن: 3 يقسم العدد $n^2-n+2007$

ومنه: إذا كان 3 يقسم n فإن 3 يقسم $A(n)$:

العكس غير صحيح.التبرير ، $A(4)=4^2-4+2007=2019$

3 يقسم $A(n)$ من أجل $n=4$ لكن 3 لا يقسم 4 .

3.أ.التحقق أن من أجل كل عدد صحيح n : بالحساب

$(n+1)^2-(n+1)+2007=(n^2-n+2007)+2n$

ب. نبين أنه إذا كان $A(n)$ عدد فردي فإن $A(n+1)$ عدد فردي :

إذا كان $A(n)$ فردي فإنه يوجد عدد صحيح k : $A(n)=2k+1$

$A(n)=n^2-n+2007$ ومنه: $A(n+1)=(n+1)^2-(n+1)+2007$

أي أن $A(n+1)=A(n)+2n=2k+1+2n=2(k+n)+1$

نضع: $k'=k+n$ ومنه: $A(n+1)=2k'+1$ ، k' عدد صحيح

إذن: إذا كان $A(n)$ عدد فردي فإن $A(n+1)$ عدد فردي.

4.تعيين الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $A(n)$

يقسم $A(1)$ **:** $A(n)$ يقسم $A(1)$ معناه $n^2-n+2007$ يقسم 2007 ، مجموعة قواسم 2007 هي:

$-2007;-669;-223;-9;-3;-1;1;3;9;223;669;2007$

$n^2-n+2007$ يقسم 2007 معناه $n^2-n+2007=-1$ أو

$n^2-n+2007=1$ أو $n^2-n+2007=2007$ أو

$n^2-n+2007=-2007$ أو $n^2-n+2007=669$ أو

$n^2-n+2007=-669$ أو $n^2-n+2007=9$ أو

$n^2-n+2007=-9$ أو $n^2-n+2007=223$

أو $n^2-n+2007=-223$ **ومنه:** $n^2-n=0$

إذن $n=0$ أو $n=1$

التمرين الثاني:

1 / أ* إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv4[11]$.

لدينا (E) تكافئ $-5y\equiv2[11]$ ومنه $6y\equiv2[11]$

إذن $2\times6y\equiv2\times2[11]$ ومنه $y\equiv4[11]$

ب * استنتاج حلول المعادلة (E)

مما سبق لدينا $y\equiv4[11]$ ومنه $y=11k+4$ ،بالتعويض في المعادلة (E) نجد $x=5k+2$

إذن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث

$$\begin{cases}x=5k+2\\y=11k+4\end{cases} \quad /(k\in\mathbb{Z})$$

2/أ*تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبرللعددين a و b

نفرض أن $PGCD(a,b)=d$ إذن d يقسم a و d يقسم b

ومنه d يقسم $11a-5b$ ومنه نستنتج أن d يقسم 2

إذن $d\in\{1;2\}$

ب * تعيين قيم n بحيث يكون $PGCD(a,b)=2$

لدينا $PGCD(a,b)=2$ ومنه 2 يقسم a و 2 يقسم b

ومنه 2 يقسم $b-2a$ إذن 2 يقسم $(11n+4)-2(5n+2)$

أي 2 يقسم n ومنه قيم n المطلوبة هي $n=2\alpha \quad /\alpha\in\mathbb{N}^*$

(أي n عدد طبيعي زوجي)

جـ* استنتاج قيم n بحيث يكون a و b أوليان فيما بينهما

a و b أوليان فيما بينهما معناه $PGCD(a,b)=1$

و هذا يكافئ $PGCD(a,b)\neq2$ ومنه قيم n المطلوبة هي $n=2\alpha+1 \quad /\alpha\in\mathbb{N}^*$ (أي عدد طبيعي فردي)

3 / أ* دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10.

n	$4k'$	$4k'+1$	$4k'+2$	$4k'+3$
البواقي	1	7	9	3

ب * استنتاج رقم آحاد العدد 7^{2014}.

رقم آحاد العدد 7^{2014} هو باقي قسمته على 10

لدينا $2014=4\times503+2$ ومنه 2014 يكتب على الشكل $4k'+2$

إذن حسب الجواب السابق رقم آحاد العدد 7^{2014} هو 9

جـ * تعيين الثنائيات $(x;y)$ من $N^*\times N^*$ التي هي حلول للمعادلة (E) و تحقق $7^{y-2x}\equiv 9[10]$.

لدينا $7^{y-2x}=7^{11k'+4-10k'-4}=7^{k'}$

و منه $7^{y-2x}\equiv 9[10]$ تكافئ $7^{k'}\equiv 9[10]$ ومنه

$k'=4\lambda+2$

ومنه $/(k\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases} x=5(4\lambda+2)+2=20\lambda+12 \\ y=11(4\lambda+2)+4=44\lambda+26 \end{cases}$

التمرين الثالث :

1| عدد الطرق لسحب المترشح ثلاثة مواضيع عشوائيا هو : $C_{80}^3=82160$

2| حساب احتمال الأحداث :

* A " يجيب المترشح على المواضيع الثلاثة "

$$P(A)=\frac{C_{50}^3}{C_{80}^3}=\frac{19600}{82160}=\frac{245}{1027}\approx 0,24$$

* B " يجيب المترشح على موضوعين فقط "

$$P(B)=\frac{C_{50}^2\times C_{30}^1}{C_{80}^3}=\frac{36750}{82160}=\frac{3675}{8216}\approx 0,45$$

* C " يجيب المترشح على موضوع واحد فقط "

$$P(C)=\frac{C_{50}^1\times C_{30}^2}{C_{80}^3}=\frac{21750}{82160}=\frac{2175}{8216}\approx 0,26$$

* D " لا يجيب المترشح على أي موضوع "

$$P(D)=\frac{C_{30}^3}{C_{80}^3}=\frac{36750}{82160}=\frac{4060}{8216}=\frac{203}{4108}\approx 0,05$$

3| **حساب عدد المواضيع التي يجب أن يدرسها المترشح لكي يكون احتمال سحبه لموضوع درسه على الأقل يتجاوز $0,99$**

نسمي x عدد المواضيع التي يجب ان يدرسها

نحل المتراجحة : $1-\frac{C_{80-x}^3}{C_{80}^3}\geq 0,99$ أي

$\frac{C_{80-x}^3}{C_{80}^3}\geq 0,01$ أي $C_{80-x}^3\geq 821,6$

و نجد $(80-x)(79-x)(78-x)>4929$

من أجل $x=61$ نجد :

$(80-61)(79-61)(78-61)\approx 5814$

و من أجل $x=62$ نجد :

$(80-62)(79-62)(78-62)\approx 4896$

و من أجل $x=63$ نجد :

$(80-63)(79-63)(78-63)\approx 4080$

فقيمة x هي 62 و نقول أنه على المترشح أن يدرس على الأقل 62 موضوع لكي يكون إحتمال سحبه لموضوع درسه على الأقل يتجاوز $0,99$