الخليل للرياضيات
قويسم

سنة **ثالثة** ثانوي
الشعب:
علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي

الموضوع الأسبوعي رقم

للتحضير الجيد لبكالوريا 2023
شعبة رياضيات

إعداد الأستاذ:
قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:
[الثلاثاء 28 فيفري 2023]

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الخليل للرياضيات

الموضوع الأسبوعي رقم: 01

دورة: 2023

الشعبة: رياضيات

اختبار مادة الرياضيات

المدة: 04 ساعات

التمرين الأول: (03 نقاط)

❶ عيّن الأعداد الصحيحة x حيث: $7x \equiv -19[9]$

❷ استنتج في $\mathbb{Z}$ حلول المعادلة (E)، حيث: $7x - 9y = -19 \dots (E)$

❸ من بين حلول المعادلة (E)، عين الحلول التي تحقق $x \equiv 0[y]$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{\sqrt{u_n + 1}} \end{cases}$

❶

أ/ بيّن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 1} - \frac{2}{\sqrt{u_n + 1}}$$

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 < u_n < 3$

ج/ بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتج انها متقاربة

❷

أ/ بيّن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$9 - (u_{n+1})^2 < 4(3 - u_n)$$

ب/ بيّن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$3 - u_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - u_n)$$

ج/ بيّن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$3 - u_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

د/ استنتج نهاية (u_n)

التمرين الثالث: (03.5 نقاط)

لدينا ثلاث صناديق متماثلة غير شفافة، الصندوق الأول U_1 يحوي كريتين لونهما أحمر وكريتين لونهما أسود، الصندوق الثاني U_2 يحوي على أربع كريات حمراء، الصندوق الثالث U_3 يحوي على أربع كريات سوداء. (كل الكريات متماثلة ولا نميز بيهما باللمس)

نسحب عشوائيا كرية من الصندوق U_1 ثم نضعها في الصندوق U_2 ثم نسحب عشوائيا كرية من الصندوق U_2 ونضعها في الصندوق U_3 ثم نسحب عشوائيا كرية من الصندوق U_3 ونضعها في U_1 ونتوقف.

❶ أنجز مخططا لهذه التجربة العشوائية

❷ احسب احتمال الحدث: "الكرية المسحوبة من U_2 حمراء"

❸ نقترح اللعبة التالية:

يربح اللاعب α دينارا إذا بقي الصندوق U_1 على وضعه الأول بعد السحب الثالث، وإلا فإنه يخسر 2α دينارا

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يمثل ربح اللاعب أو خسارته بدلالة α

• أكتب قانون إحتمال المتغير العشوائي X، ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$ بدلالة α

التمرين الرابع: (08.5 نقاط)

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = e^x - 2e^{\frac{x}{2}}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

❶ ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

❷

أ/ بيّن أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها

ب/ اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) عند ω

❸ عيّن نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محور الفواصل والتراتيب، ثم ارسم (T) و (C_f)

❹ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $e^{f(x)} - e^{f(m)} = 0$

❺ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات:

$y = 0$، $x = 0$ و $x = 2\ln 2$

II) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = e^{|x|-3} - 2e^{\frac{|x|-3}{2}} - 2$$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق

❶ بيّن أن g دالة زوجية

❷

أ/ بيّن أنه من أجل كل $x \geq 0$: $g(x) = f(x-3) - 2$

ب/ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f)، ثم أنشئه في نفس المعلم السابق

III) نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $y - 2y' = -e^x \ldots (E)$

❶ تحقق أنّ الدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية (E)

❷

أ/ حل المعادلة التفاضلية (E_0) حيث: $y - 2y' = 0 \ldots (E_0)$

ب/ بيّن أنّ الدالة h حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان $(h - f)$ حل للمعادلة (E_0)

ج/ استنتج حلول المعادلة (E)

❸ عيّن الدالة u حل للمعادلة (E) الذي يحقق $u(0) = \ln(3e)$

تصحيح مقترح لاختبار مادة الرياضيات

◆ التمرين الأول: (03 نقاط)

[01ن] ❶ تعيين الأعداد الصحيحة x حيث: $7x \equiv -19[9]$:

لدينا:

$$\begin{aligned} 7x \equiv -19[9] &\Rightarrow 7x \equiv 8[9] \\ &\Rightarrow 7x \cdot 4 \equiv 8 \cdot 4[9] \\ &\Rightarrow 28x \equiv 32[9] \\ &\Rightarrow x \equiv 5[9] \\ &\Rightarrow \boxed{x = 9k + 5 \ ; \ k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

[01ن] ❷ استنتاج في $\mathbb{Z}$ حلول المعادلة (E)، حيث: $(E) \dots 7x - 9y = -19$:

$$\begin{aligned} 7x - 9y = -19 &\Rightarrow 7x = -19 + 9y \\ &\Rightarrow 7x \equiv -19[9] \end{aligned}$$

وحسب السؤال 1 نجد: $\boxed{x = 9k + 5 \ ; \ k \in \mathbb{Z}}$

ولدينا:

$$\begin{aligned} 7x - 9y = -19 &\Rightarrow 9y = 7x + 19 \\ &\Rightarrow 9y = 7(9k + 5) + 19 \\ &\Rightarrow 9y = 63k + 54 \\ &\Rightarrow y = 7k + 6 \end{aligned}$$

إذن حلول المعادلة (E) هي: $\boxed{(x; y) = \{(9k + 5; 7k + 6)/k \in \mathbb{Z}\}}$

[01ن] ❸ تعيين الحلول التي تحقق $x \equiv 0[y]$

من أجل $k \in \mathbb{Z}$ لدينا:

$$\begin{aligned} x \equiv 0[y] &\Rightarrow y|x \\ &\Rightarrow (7k + 6)|(9k + 5) \\ &\Rightarrow (7k + 6)|\big(9(7k + 6) - 7(9k + 5)\big) \\ &\Rightarrow (7k + 6)|19 \\ &\Rightarrow (7k + 6) \in \{-19; -1; 1; 19\} \\ &\Rightarrow 7k \in \{-25; -7; -5; 13\} \\ &\Rightarrow k \in \{-1\} \end{aligned}$$

وعليه: $(x; y) = (9(-1) + 5; 7(-1) + 6)$

إذن: $\boxed{(x; y) = (-4; -1)}$

◆ التمرين الثاني: (05 نقاط)

[0.5ن] ❶

أ/ تبيين أن: $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 1} - \frac{2}{\sqrt{u_n + 1}}$:

$$u_{n+1}=\frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}}=\frac{2u_n+2-2}{\sqrt{u_n+1}}=\frac{2u_n+2}{\sqrt{u_n+1}}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}=\frac{2(u_n+1)}{\sqrt{u_n+1}}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$$
$$=\frac{2(u_n+1)\sqrt{u_n+1}}{\sqrt{u_n+1}\sqrt{u_n+1}}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}=\boxed{2\sqrt{u_n+1}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}}$$

[ن0.5] ب/ برهان بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $1<u_n<3$:

نسمي الخاصية $P(n)\ldots 1<u_n<3$

• لدينا: $1<u_0<3$ ومنه: $1<2<3$ إذن $P(0)$ محققة

• نفرض أنّ $1<u_n<3$ ونثبت أنّ $1<u_{n+1}<3$

• لدينا:

$$1<u_n<3\Rightarrow 2<u_n+1<4$$
$$\Rightarrow\sqrt{2}<\sqrt{u_n+1}<2$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{u_n+1}}<\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow-\frac{2}{\sqrt{2}}<-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}<-1\ldots(*)$$

ولدينا:

$$1<u_n<3\Rightarrow\sqrt{2}<\sqrt{u_n+1}<2\Rightarrow 2\sqrt{2}<2\sqrt{u_n+1}<4\ldots(**)$$

بجمع المتراجحتين $(*)$ و $(**)$ طرفا لطرف نجد:

$$2\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}<2\sqrt{u_n+1}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}<4-1$$

ومنه: $\sqrt{2}<u_{n+1}<3$ ومنه: $1<u_{n+1}<3$ إذن $P(n+1)$ صحيحة

• إذن حسب البرهان بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

[ن01] ج/ تبيين أنّ (u_n) متزايدة تماما، واستنتاج انها متقاربة:

لدينا:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}}-u_n$$
$$=\frac{2u_n-u_n\sqrt{u_n+1}}{\sqrt{u_n+1}}$$
$$=\frac{u_n\left(2-\sqrt{u_n+1}\right)}{\sqrt{u_n+1}}$$
$$=\frac{u_n\left(2-\sqrt{u_n+1}\right)\left(2+\sqrt{u_n+1}\right)}{\sqrt{u_n+1}\left(2+\sqrt{u_n+1}\right)}$$
$$=\frac{u_n(4-u_n-1)}{\sqrt{u_n+1}\left(2+\sqrt{u_n+1}\right)}$$
$$=\frac{u_n(3-u_n)}{\sqrt{u_n+1}\left(2+\sqrt{u_n+1}\right)}$$

لدينا: $1<u_n<3$ ومنه $-3<-u_n<-1$ ومنه: $0<3-u_n<2$

ولدينا: $\sqrt{u_n+1}\left(2+\sqrt{u_n+1}\right)>0$

إذن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

• لدينا (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ3 إذن هي متقاربة

[01ن] ❷

أ/ تبيين أنّ $9-(u_{n+1})^2<4(3-u_n)$:

لدينا:

$$9-(u_{n+1})^2=9-\left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}}\right)^2=\frac{-4(u_n)^2+9u_n+9}{u_n+1}=\frac{(4u_n+3)(3-u_n)}{u_n+1}$$

$$=\frac{4u_n+4-1}{u_n+1}(3-u_n)=\left(\frac{4(u_n+1)}{u_n+1}-\frac{1}{u_n+1}\right)(3-u_n)=\left(4-\frac{1}{u_n+1}\right)(3-u_n)$$

ولدينا سابقا:

$$u_n<3\Rightarrow u_n+1<4\Rightarrow\frac{1}{u_n+1}>\frac{1}{4}\Rightarrow-\frac{1}{u_n+1}<-\frac{1}{4}\Rightarrow4-\frac{1}{u_n+1}<\frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow4-\frac{1}{u_n+1}<4\Rightarrow\left(4-\frac{1}{u_n+1}\right)<4(3-u_n)$$

$$\Rightarrow\boxed{9-(u_{n+1})^2<4(3-u_n)}$$

[0.75ن] ب/ تبيين أنّ $3-u_{n+1}<\frac{4}{5}(3-u_n)$:

لدينا: $9-(u_{n+1})^2<4(3-u_n)$

ومنه: $(3+u_{n+1})(3-u_{n+1})<4(3-u_n)$

وبما أنّ: $3+u_{n+1}>0$ فإن:

$$3-u_{n+1}<\frac{4(3-u_n)}{3+u_{n+1}}$$

ولدينا (u_n) متزايدة تماما إذن: $u_0<u_1<\cdots<u_n<u_{n+1}$ أي: $2<u_{n+1}$

ومنه:

$$2<u_{n+1}\Rightarrow5<3+u_{n+1}\Rightarrow\frac{1}{3+u_{n+1}}<\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{4(3-u_n)}{3+u_{n+1}}<\frac{4}{5}(3-u_n)$$

ومنه:

$$3-u_{n+1}<\frac{4(3-u_n)}{3+u_{n+1}}\Rightarrow\boxed{3-u_{n+1}<\frac{4}{5}(3-u_n)}$$

[0.75ن] ج/ تبيين أنّ $3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$:

لدينا: $3-u_{n+1}<\frac{4}{5}(3-u_n)$ ومنه:

$$\begin{cases}n=0: & \cancel{3-u_1}<\frac{4}{5}(3-u_0)\\ n=1: & \cancel{3-u_2}<\frac{4}{5}(\cancel{3-u_1})\\ \vdots & \\ n-2: & \cancel{3-u_{n-1}}<\frac{4}{5}(\cancel{3-u_{n-2}})\\ n-1: & 3-u_n<\frac{4}{5}(\cancel{3-u_{n-1}})\end{cases}$$

بضرب المتراجحات طرفا لطرف نجد:

$$3-u_n<\left(\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\ldots\times\frac{4}{5}\right)(3-u_0)$$

ومنه:

$$3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n(3-2)$$

إذن:

$$\boxed{3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

[0.5ن] د/ استنتاج نهاية (u_n):

لدينا: $3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ولدينا: $0<3-u_n$ ومنه: $0<3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$

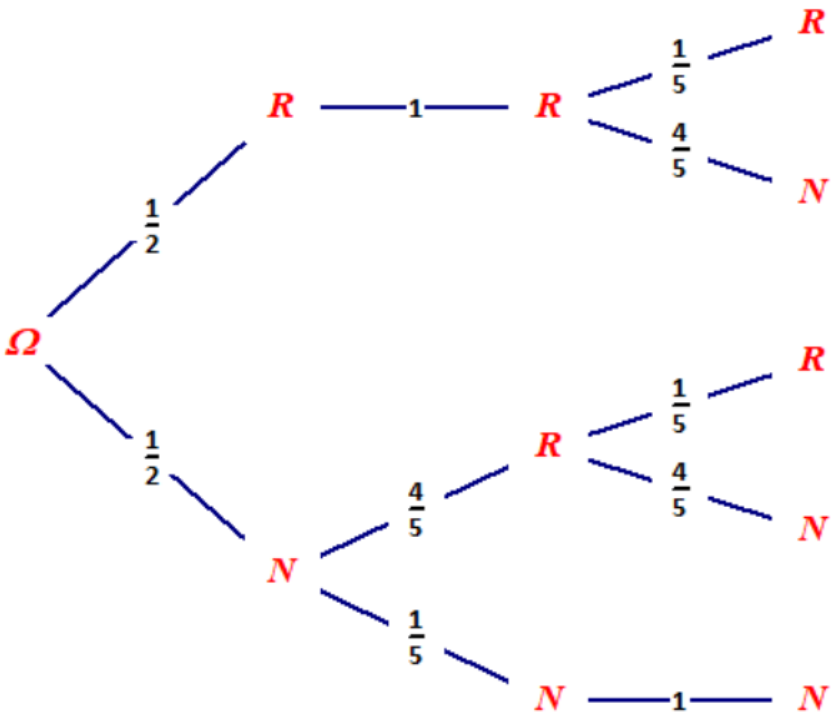
ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ومنه: $0<\lim\limits_{n\to+\infty}(3-u_n)<0$

إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty}(3-u_n)$

وعليه: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=3}$

◆ التمرين الثالث: (03.5 نقاط)

[01ن] ❶ انجاز مخطط لهذه التجربة العشوائية:



[01ن] ❷ حساب احتمال الحدث A :

$$p(A)=p(R\cap R)+p(N\cap R)=\left(\frac{1}{2}\times 1\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\right)=\boxed{\frac{9}{10}}$$

[01ن] ❸ كتابة قانون إحتمال المتغير العشوائي X

لدينا: $X(\Omega)=\{-2\alpha;\alpha\}$ حيث:

$$p(X=-2\alpha)=p(R\cap R\cap N)+p(N\cap R\cap R)=\left(\frac{1}{2}1\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\frac{4}{5}\frac{1}{5}\right)=\boxed{\frac{12}{25}}$$

$$p(X=\alpha)=p(R\cap R\cap R)+p(N\cap R\cap N)+p(N\cap N\cap N)$$

$$=\left(\frac{1}{2}1\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\frac{4}{5}\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\frac{1}{5}1\right)=\boxed{\frac{13}{25}}$$

ومنه:

x_i	-2α	α
$P(X=x_i)$	$\frac{12}{25}$	$\frac{13}{25}$

[0.5ن] • حساب $E(X)$:

$$E(X) = -2\alpha\frac{12}{25} + \alpha\frac{13}{25} = \boxed{-\frac{11}{25}\alpha}$$

◆ التمرين الرابع: (08.5 نقاط)

I)

❶ [1.25ن] دراسة تغيرات الدالة f:

• النهايات:

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x(1-2e^{\frac{x}{2}}e^{-x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x(1-2e^{-\frac{x}{2}}\right) = +\infty$

• المشتقة:

$$f'(x) = e^x - e^{\frac{x}{2}}$$

لدينا:

$$e^x - e^{\frac{x}{2}} = 0 \Rightarrow e^x = e^{\frac{x}{2}}$$
$$\Rightarrow x = \frac{x}{2}$$
$$\Rightarrow x = 0$$

• جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	-1	↗ $+\infty$

❷

[0.5ن] أ/ تبيين أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها:

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

لدينا:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^x - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = 0$$
$$\Rightarrow e^x - \frac{1}{2}(e^x)^{\frac{1}{2}} = 0$$
$$\Rightarrow e^x - \frac{1}{2}\sqrt{e^x} = 0$$

نضع: $t^2 = e^x$ ومنه:

$$e^x - \frac{1}{2}\sqrt{e^x} = 0 \Rightarrow t^2 - \frac{1}{2}t = 0$$
$$\Rightarrow t\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0$$
$$\Rightarrow t = 0 \text{ أو } t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{e^x} = 0 \text{ أو } \sqrt{e^x} = \frac{1}{2}$$

$\sqrt{e^x} = 0$ (هذا مستحيل)

ومنه:

$$\sqrt{e^x} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^x = \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow x = \ln\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow x = -\ln 4$$

x	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

لدينا المشتقة الثانية تنعدم عند $x = -\ln 4$ وتغير إشارتها

إذن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف عند النقطة $\omega(-\ln 4\,; f(-\ln 4))$

ب/ كتابة معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) عند ω: [0.5ن]

$$(T): y = f'(-\ln 4)(x + \ln 4) + f(-\ln 4)$$
$$= \left(e^{-\ln 4} - e^{\frac{-\ln 4}{2}}\right)(x + \ln 4) + e^{-\ln 4} - 2e^{\frac{-\ln 4}{2}}$$
$$= -\frac{1}{4}(x + \ln 4) + \frac{1}{4} - 1$$
$$= \boxed{-\frac{1}{4}x - \frac{3 + \ln 4}{4}}$$

❸ تعيين نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محور الفواصل والتراتيب: [0.5ن]

- مع حامل محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow e^x - 2e^{\frac{x}{2}} = 0$$
$$\Rightarrow e^x - 2\sqrt{e^x} = 0$$

نضع: $t^2 = e^x$ ومنه:

$$e^x - 2\sqrt{e^x} = 0 \Rightarrow t^2 - 2t = 0$$
$$\Rightarrow t(t-2) = 0$$
$$\Rightarrow t = 0 \text{ أو } t = 2$$
$$\Rightarrow \sqrt{e^x} = 0 \text{ أو } \sqrt{e^x} = 2$$

$\sqrt{e^x} = 0$ (هذا مستحيل)، ومنه:

$$\sqrt{e^x} = 2 \Rightarrow e^x = 4$$
$$\Rightarrow x = \ln 4$$

إذن:

$$\boxed{(C_f) \cap (xx') = \{\ln 4\}}$$

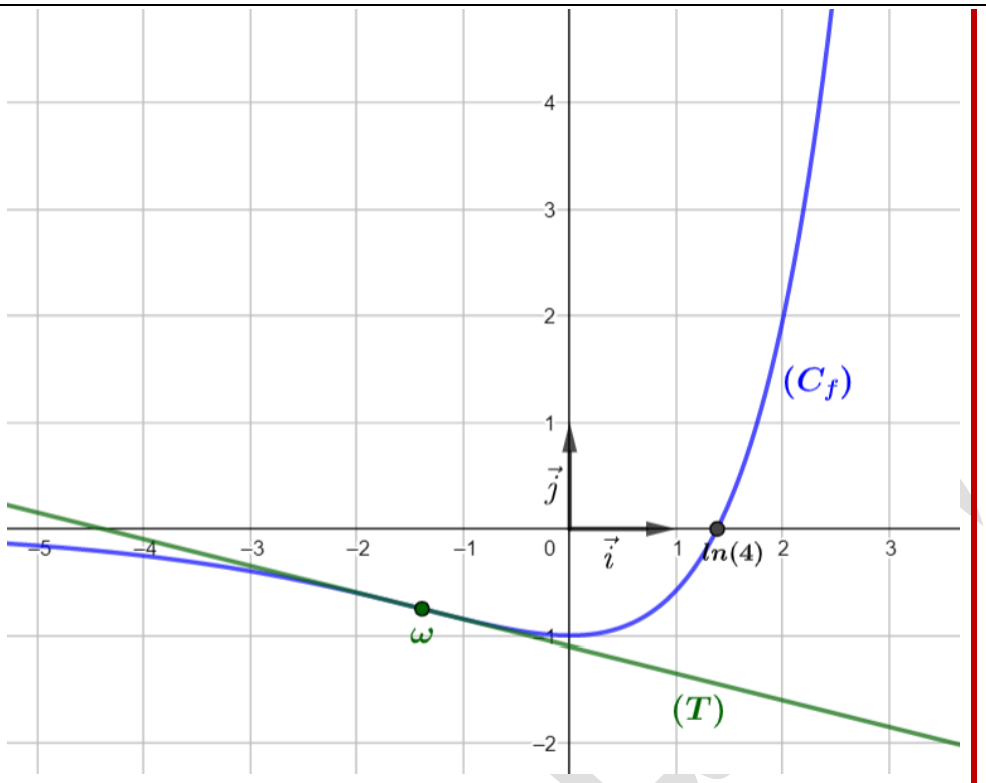
- مع حامل محور التراتيب:

$$f(0) = -1$$

إذن:

$$\boxed{(C_f) \cap (yy') = \{-1\}}$$

- رسم (T) و (C_f): [01ن]



❹ المناقشة البيانية: [1.25ن]

$$e^{f(x)} - e^{f(m)} = 0 \Longrightarrow e^{f(x)} = e^{f(m)} \Longrightarrow f(x) = f(m)$$

ومنه:

لما $m < 0$ المعادلة تقبل حلين متمازين ومختلفين في الإشارة

لما $m = 0$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما

لما $0 < m < \ln 4$ المعادلة تقبل حلين متمازين ومختلفين في الإشارة

لما $m \geq \ln 4$ المعادلة تقبل حلا موجبا تماما

❺ حساب A: [01ن]

لدينا إشارة $f(x)$ كالآتي:

x	$-\infty$	$\ln 4$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

ومنه:

$$A = \int_0^{2\ln 2} -f(x)dx = -\int_0^{\ln 4} \left(e^x - 2e^{\frac{x}{2}}\right)dx = -\left[e^x - 2 \times 2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^{\ln 4}$$

$$= -\left[e^x - 4\sqrt{e^x}\right]_0^{\ln 4} = -[(-4) - (-3)] = \boxed{1}(u.a)$$

(II

❶ تبيين أن g دالة زوجية: [0.25ن]

لدينا: $(-x) \in \mathbb{R}$

ولدينا:

$$g(-x) = e^{|-x|-3} - 2e^{\frac{|-x|-3}{2}} - 2 = e^{|x|-3} - 2e^{\frac{|x|-3}{2}} - 2 = g(x)$$

إذن g دالة زوجية

❷

أ/ تبيين أنه من أجل كل $x \geq 0$ ؛ $g(x) = f(x-3) - 2$: [0.25ن]

لدينا:

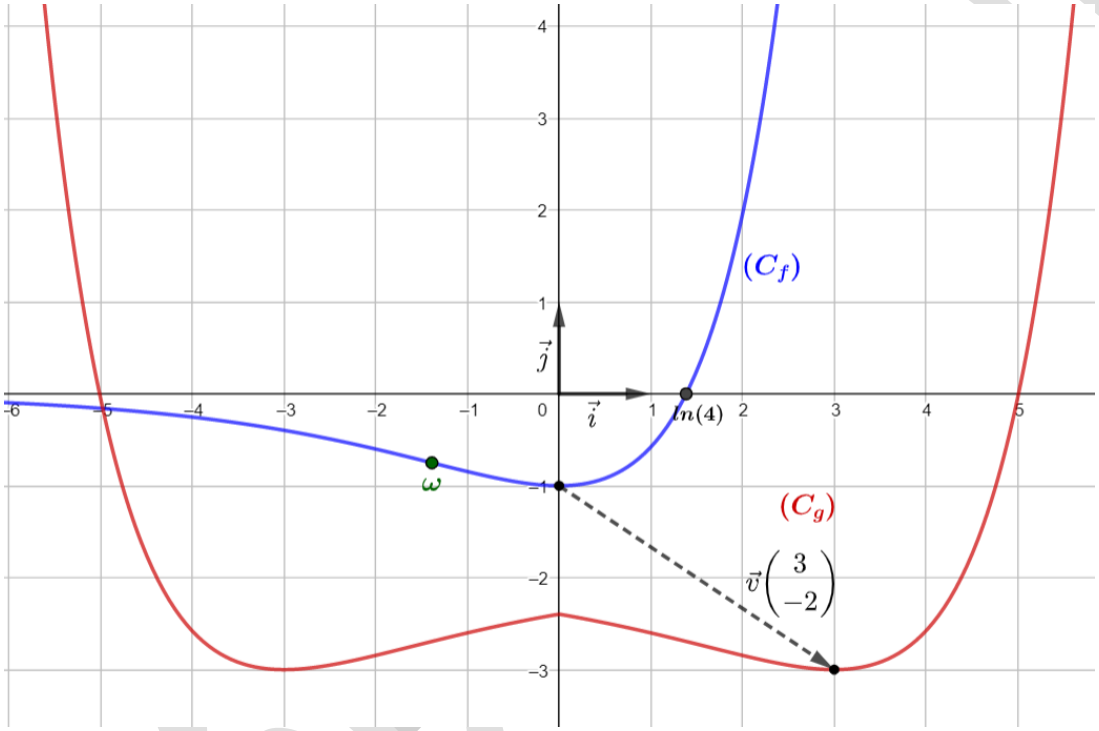
$$g(x) = e^{|x|-3} - 2e^{\frac{|x|-3}{2}} - 2$$
$$= \begin{cases} e^{x-3} - 2e^{\frac{x-3}{2}} - 2 \; ; \; x \geq 0 \\ e^{-x-3} - 2e^{\frac{-x-3}{2}} - 2 \; ; \; x \geq 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(x-3) - 2 \; ; \; x \geq 0 \\ f(-x-3) - 2 \; ; \; x \geq 0 \end{cases}$$

ب/ إنشاء في نفس المعلم السابق (C_g) انطلاقا من (C_f): [0.5ن]

لما $x \geq 0$ لدينا: (C_g) صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}+3\\-2\end{pmatrix}$

وبما أن الدالة g زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب

ومنه:



(III

❶ التحقق أنّ الدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية (E): [0.25ن]

لدينا:

$$f(x) - 2f'(x) = \left(e^x - 2e^{\frac{x}{2}}\right) - 2\left(e^x - e^{\frac{x}{2}}\right) = e^x - 2e^{\frac{x}{2}} - 2e^x + 2e^{\frac{x}{2}} = -e^x$$

إذن الدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية (E)

❷

أ/ حل المعادلة التفاضلية (E_0): [0.25ن]

$$y - 2y' = 0 \Rightarrow 2y' = y \Rightarrow y' = \frac{1}{2}y \Rightarrow y = Ce^{\frac{x}{2}}$$

إذن الدوال $x \longmapsto Ce^{\frac{x}{2}}$ حل للمعادلة (E) حيث $C \in \mathbb{R}$

ب/ تبيين أنّ الدالة h حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان $(h-f)$ حل للمعادلة (E_0): [0.5ن]

نثبت التكافؤ:

h حل للمعادلة (E) $\Leftrightarrow$ $(h-f)$ حل للمعادلة (E_0)

- نفرض أن h حل للمعادلة (E) ونثبت أن $(h-f)$ حل للمعادلة (E_0):

h حل للمعادلة (E) معناه: $h - 2h' = -e^x \; ... (1)$

ولدينا سابقا:

f حل للمعادلة (E) معناه: $f-2f'=-e^x \dots (2)$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$h-2h'-f+2f'=-e^x+e^x \Rightarrow h-f-2(h'-f')=0$$
$$\Rightarrow (h-f)-2(h-f)'=0$$

إذن $(h-f)$ حل للمعادلة (E_0)

- نفرض أن $(h-f)$ حل للمعادلة (E_0) ونثبت أنّ h حل للمعادلة (E):

لدينا: $(h-f)$ حل للمعادلة (E_0) معناه:

$$(h-f)-2(h-f)'=0 \Rightarrow h-f-2h'+2f'=0$$
$$\Rightarrow h-2h'-(f-2f')=0$$
$$\Rightarrow h-2h'-(-e^x)=0$$
$$\Rightarrow h-2h'+e^x=0$$
$$\Rightarrow h-2h'=-e^x$$

إذن الدالة h حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان $h-f$ حل للمعادلة (E_0)

[0.25ن] ج/ استنتاج حلول المعادلة (E):

لدينا: $(h-f)$ حل للمعادلة (E_0)

ولدينا: حلول المعادلة (E_0) هي الدوال $x \longmapsto Ce^{\frac{x}{2}}$

ومنه:

$$(h-f)(x)=Ce^{\frac{x}{2}} \Rightarrow h(x)-f(x)=Ce^{\frac{x}{2}} \Rightarrow h(x)=Ce^{\frac{x}{2}}+f(x)$$
$$\Rightarrow h(x)=Ce^{\frac{x}{2}}+e^x-2e^{\frac{x}{2}}$$

إذن حلول المعادلة (E) هي الدوال h حيث:

$$\boxed{h: x \longmapsto Ce^{\frac{x}{2}}+e^x-2e^{\frac{x}{2}}}$$

مع $C \in \mathbb{R}$

[0.25ن] ❸ تعيين الدالة u حل للمعادلة (E) الذي يحقق $u(0)=\ln(3e)$:

$$h(0)=\ln(3e) \Rightarrow Ce^{\frac{0}{2}}+e^0-2e^{\frac{0}{2}}=\ln(3e)$$
$$\Rightarrow C+1-2=\ln(3)+1$$
$$\Rightarrow C=\ln(3)+2$$

إذن:

$$u(x)=(\ln(3)+2)e^{\frac{x}{2}}+e^x-2e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow u(x)=\ln(3)\,e^{\frac{x}{2}}+2e^{\frac{x}{2}}+e^x-2e^{\frac{x}{2}}$$
$$\Rightarrow \boxed{u(x)=\ln(3)\,e^{\frac{x}{2}}+e^x}$$

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

❤ لا تنسونا من صالح دعائكم ❤

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل