الأستاذ: حمزة بريك

5 جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين، الدالة الخطيّة والدالة التآلفيّة

1 جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

نسمي جملة معادلتين من الدرجة الاولى بمجهولين x و y كل جملة من الشكل:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

حيث: a ، b ، c ، a' ، b' و c' أعداد معلومة.

مثال

جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 5x-2y=8 \end{cases}$

حيث:

$a=2$ ، $b=1$ ، $c=3$ ، $a'=5$ ، $b'=-2$ و $c'=8$.

نسمّي حلّا لجملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين كل ثنائيّة $(x_0;y_0)$ التي تكون من أجلها هذه الجملة محقّقة في آن واحد.

مثال

لتكن الجملة: $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+y=0 \end{cases}$

★ من أجل الثنائيّة $(1;0)$:

$$\begin{cases} 2\times 1+0=2 \\ 1+0=0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 2=2 \\ 1\neq 0 \end{cases}$$

الثنائيّة $(1;0)$ ليست حلّا للجملة السابقة.

★ من أجل الثنائيّة $(1;0)$:

$$\begin{cases} 2\times(2)+(-2)=2 \\ (2)+(-2)=0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 2=2 \\ 0=0 \end{cases}$$

الثنائيّة $(2;-2)$ حل للجملة السابقة.

حل جملة معادلتين (التعويض)

لحل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين بطريقة التعويض نتبع ما يلي:

1. نكتب أحد المجهولين بدلالة الآخر من إحدى المعادلتين، (مثلا x).
2. نعوّض x في المعادلة الأخرى فنحصل على معادلة بمجهول واحد y ثم نحسب قيمة y.
3. نعوّض y بقيمته في إحدى المعادلات ونستنتج x.

مثال

لنحلّ الجملة:

$$\begin{cases} -5x+y=2 \ldots(1) \\ 3x-y=-4 \ldots(2.) \end{cases}$$

1. من المعادلة (1): $y=2+5x$
2. نعوّض y في المعادلة (2):

$3x-(2+5x)=-4$ ومنه $-2x-2=-4$ أي $x=1$

3. نعوّض x في المعادلة (1):

$-5\times 1+y=2$ ومنه $y=7$

حل الجملة هو: $(1;7)$.

المعادلتان المتكافئتان

المعادلتان المتكافئتان هما معادلتان لهما نفس الحل.

إذا ضربنا طرفي معادلة في نفس العدد نتحصّل على معادلة مكافئة لها.

مثال

لتكن المعادلة: $x+2=1$ نضرب طرفي المعادلة في 3 نجد:

$3\times(x+2)=3\times 1$

المعادلة تصبح $3x+6=3$.

حل جملة معادلتين (الجمع)

لحل جملة معادلتين نتبع ما يلي:

1. نجعل معاملي أحد المجهولين متعاكسين ثم نجمع المعادلتين طرفا لطرف لنتحصّل على معادلة بمجهول واحد ثم نحسبه.
2. نعوّض المجهول في إحدى المعادلات ونستنتج الآخر.

مثال

حل الجملة $\begin{cases} 4x+2y=7...(1) \\ x-2y=3...(2) \end{cases}$ نلاحظ أن معاملي y متعاكسان.

1. نجمع المعادلتين طرفا لطرف: $4x+2y+x-2y=7+3$
ومنه $5x=10$ أي $x=2$
2. نعوّض قيمة y في المعادلة (2) نجد: $2-2y=3$ وبالتالي:
$-2y=3-2$ ومنه $y=\frac{-1}{2}$
حل الجملة هو: $\left(2;\frac{-1}{2}\right)$

حل جملة معادلتين بيانيّا

لحل جملة معادلتين بيانيا نتبع ما يلي:
1. نكتب y بدلالة x من كل معادلة.
2. نفرض قيمتين لـ x ونحسب y في كل معادلة.
3. نرسم المستقيم (d_1) الذي معادلته (1) و (d_2) الذي معادلته (2).
4. إحداثيات نقطة تقاطع (d_1) و (d_2) هي حل الجملة.

تمرين 1

حل باستعمال طريقة التعويض الجملة التالية:

$$\begin{cases} 3x-5y=30...(1) \\ 2x+y=7...(2) \end{cases}$$

تمرين 2

جد عددين علما أن مجموعهما 50 والفرق بين العدد الأول وضع العدد الثاني هو 5.

تمرين 3

1. حل الجملة التالية:
$$\begin{cases} x+y=20...(1) \\ 7x+4y=104...(2) \end{cases}$$
2. تتكون حمولة إحدى الشاحنات من 20 صندوقا وزن بعضها $28kg$ ووزن البعض الآخر $16Kg$ علما أنّ وزن حمولة الشاحنة هو $416Kg$ عين عدد الصناديق التي وزنها $28Kg$ وعدد الصناديق التي وزنها $16Kg$.

تمرين 4

1. حل الجملة التالية:
$$\begin{cases} 5x+2y=13...(1) \\ x+2y=8...(2) \end{cases}$$
2. ثمن باقة زهور متكونة من 5 زهور نرجس وزهرتي أقحوان هو $13DA$ بينما ثمن باقة متكونة من زهرة نرجس وزهرتي أقحوان هو $8DA$.
✯ ما هو ثمن باقة زهور متكونة من 4 زهور نرجس و 3 زهور أقحوان.

تمرين 5

1. عيّن طول وعرض قاعة مستطيلة الشكل علما أنّ ه إذا زاد طولها بـ $1m$ وزاد عرضها بـ $3m$ زادت مساحتها بـ $25m^2$ أمّا إذا نقص كل من عرضها و طولها بـ $1m$ نقصت مساحتها بـ $9m^2$.

2 الدالة الخطيّة

الدالة الخطيّة

a عدد حقيقي معلوم وغير معلوم.

- عندما نرفق كل عدد x بالجداء ax نقول أنّنا عرّفنا دالة خطيّة نرمز لها بـ: $f : x \longmapsto ax$.
- نسمّي $f(x)$ صورة x بالدالة f ونكتب: $f(x) = ax$.
- العدد a يسمّى معامل الدالّة f

ملاحظة مهمة

الدالة الخطيّة تعبّر عن وضعيّة تناسبية.

مثال

الدالة التي ترفق كل عدد بضعفه هي: $f(x) = 2x$.

- 2 هو معامل الدالة f.
- صورة 2 بالدالة f هو العدد 4 ونكتب $f(2) = 4$
- 3 هو العدد الذي صورته 6 بالدالة f ونكتب: $f(3) = 6$.

تعيين صورة عدد بدالة خطيّة

f دالة خطيّة و a معاملها.

- صورة x بالدالة f هو العدد $f(x)$ ونكتب: $f(x) = ax$.
- العدد الذي صورته $f(x)$ بالدالة f هو: $x = \frac{f(x)}{a}$

مثال

$f(x) = 5x$

- صورة 2 بالدالة f هو العدد $f(2)$ ونكتب: $f(2) = 5 \times 2 = 10$.
- صورة 4 بالدالة f هو العدد $f(4)$ ونكتب: $f(4) = 5 \times 4 = 20$.
- العدد الذي صورته 25 بالدالة f: $f(x) = 5x = 25$ ومنه: $x = \frac{25}{5} = 5$
- العدد الذي صورته 15 بالدالة f: $f(x) = 5x = 15$ ومنه: $x = \frac{15}{5} = 3$

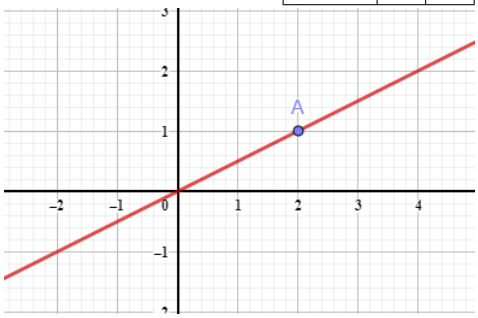
تمثيل دالة خطيّة بيانيّا

التمثيل البياني لدالة خطيّة هو مستقيم يمرّ من المبدأ، لرسمه يكفي تعيين نقطة أخرى تختلف عن المبدأ

مثال

لتكن الدالة الخطيّة $f(x) = \frac{1}{2}x$ تمثيلها البياني هو مستقيم يمر بالمبدأ لرسمه نعيّن نقطة أخرى:

x	0	2
$f(x)$	0	1



نقول أنّ المستقيم (OA) هو التمثيل البياني للدالة f

- التمثيل البياني للدالة f جد: $f(-2)$ ، $f(4)$.

تعيين عبارة دالة خطيّة

لتعيين عبارة دالة خطيّة يكفي إيجاد المعامل a.

لإيجاد المعامل a يوجد طريقتين

حسابيّا

إذا علم x وصورته $f(x)$ فإنّ المعامل $a = \frac{f(x)}{x}$

مثال f الدالة الخطيّة حيث: $f(1) = 4$

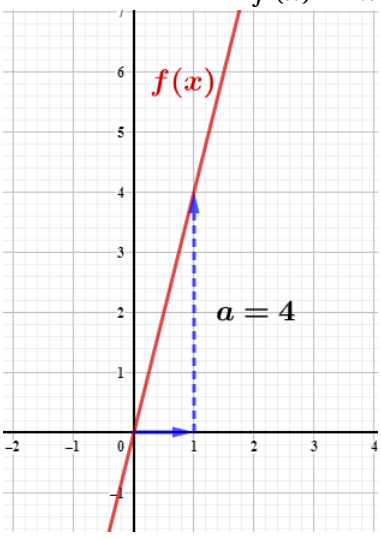
$f(x) = ax$

بالتعويض: $f(1) = a \times 1 = 4$ ومنه $a = \frac{4}{1} = 4$ ومنه عبارة الدالة f هي $f(x) = 4x$

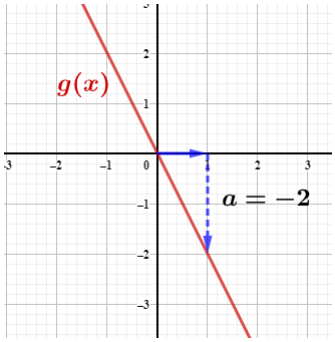
بيانيّا

ننطلق من المبدأ بوحدة نحو اليمين ثمّ نتجه عموديّاً نحو التمثيل البياني للدالة، عدد الوحدات عموديّا هو المعامل a.

- التمثيل البياني التالي للدالة f معاملها هو $a = 4$ عبارتها هي $f(x) = 4x$



✯ التمثيل البياني التالي للدالة g معاملها هو $a=-2$ عبارتها هي $g(x)=-2x$



3 الدالة التآلفيّة

الدالة التآلفيّة

a و b عددان حقيقيان معلومان

عندما نرفق كل عدد x بالجداء ax مّ نضيف له العدد b نقول أنّنا عرّفنا دالة تآلفية نرمز لها بـ:

$f: x \longmapsto ax+b$.

نسمّي $f(x)$ صورة x بالدالة f ونكتب:

$f(x)=ax+b$.

ملاحظة مهمة

الدالة التآلفية لا تعبّر عن وضعيّة تناسبية.

مثال

الدالة التي ترفق كل عدد بضعفه مضافا له خمسة هي:

$f(x)=2x+5$.

✯ صورة 1 بالدالة f هي العدد 7 ونكتب $f(2)=2\times1+5=7$

✯ العدد الذي صورته 15 بالدالة f هو 5 ونكتب: $f(5)=15$.

حالة خاصة

✯ إذا كان $b=0$ تصبح $f(x)=ax$ وهي دالة خطيّة.

✯ إذا كان $a=0$ تصبح $f(x)=b$ وهي دالة ثابتة.

تعيين صورة عدد بدالة تآلفية

f دالة تآلفية و a و b معاملها.

✯ صورة x بالدالة f هو العدد $f(x)$ ونكتب:

$f(x)=ax+b$.

✯ العدد الذي صورته $f(x)$ بالدالة f هو: $x=\frac{f(x)-b}{a}$

مثال لدينا الدالة التآلفيّة $f(x)=5x-2$

✯ صورة 2 بالدالة f هو العدد $f(2)$ ونكتب:

$f(2)=5\times2-2=8$.

✯ صورة 4 بالدالة f هو العدد $f(4)$ ونكتب:

$f(4)=5\times4-2=18$.

✯ العدد الذي صورته 28 بالدالة f:

ومنه: $f(x)=5x-2=28$ $x=\frac{28-(-2)}{5}=6$

✯ العدد الذي صورته 23 بالدالة f:

ومنه: $f(x)=5x-2=23$ $x=\frac{23-(-2)}{5}=5$

تمثيل دالة تآلفيّة بيانيّا

التمثيل البياني لدالة تآلفيّة $f(x)=ax+b$ هو مجموعة النقط ذات الإحداثيات $(x;y)$ حيث:

$y=ax+b$

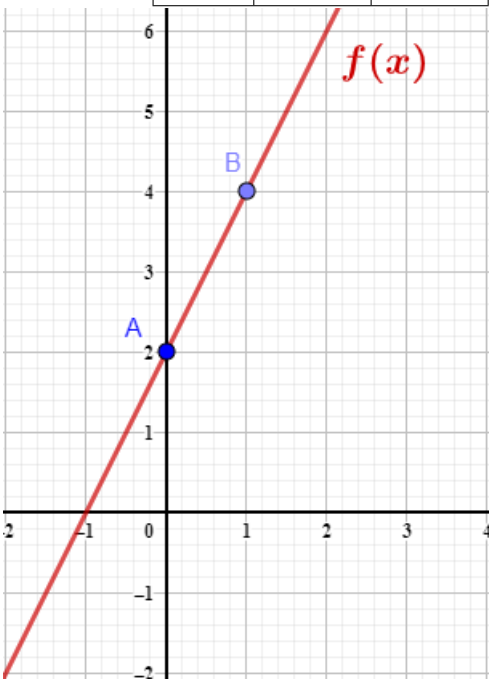
العدد b يسمّى الترتيب عند المبدأ $f(0)=b$

العدد a يسمّى معامل التوجيه.

مثال

لتكن الدالة التآلفيّة المعرّفة بـ: $f(x)=2x+2$ تمثيلها البياني هو مستقيم لا يمر بالمبدأ لرسمه يكفي تعيين نقطتين منه:

x	0	1
$f(x)$	2	4
النقط	$A(0,1)$	$B(1,4)$



تعيين عبارة دالة تآلفيّة بيانيّا

تعيين عبارة دالة تآلفية معناه إيجاد المعاملين a و b.
لإيجاد المعاملين a و b يوجد طريقتين

حسابيّا

✯ حساب المعامل a:
$a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
✯ حساب المعامل b:
نحل المعادلة $f(x)=ax+b$ حيث x و $f(x)$ عددان معلومان.

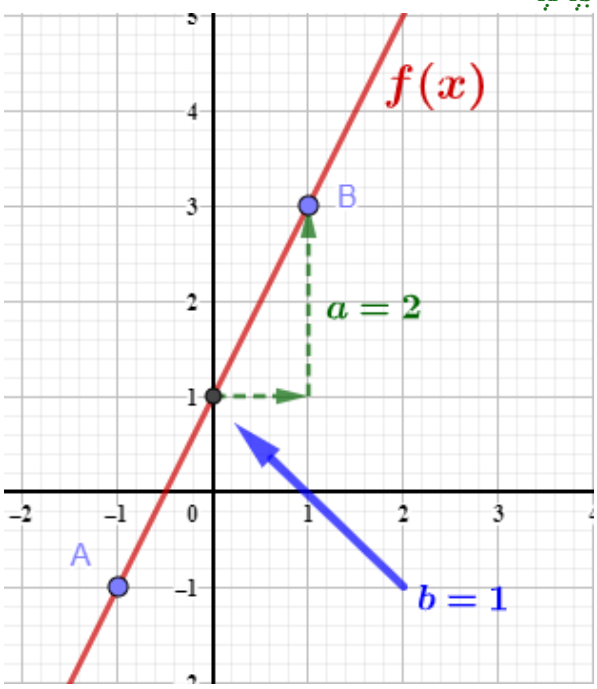
بيانيّا

المعامل b هو الترتيب عند المبدأ (ترتيب نقطة تقاطع محور التراتيب مع التمثيل البياني للدالة).
يتم تعيين المعامل a بالانطلاق من التمثيل البياني:
① الاتجاه بوحدة نحو اليمين
② ثمّ نتجه عموديا نحو التمثيل البياني، عدد الوحدات عموديا هو المعامل a.

مثال

المستقيم (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f حيث يشمل النقطتين $A(-1;-1)$ ، $B(1;3)$

بيانيّا



المعامل a هو $a=2$
المعامل b هو $b=1$
عبارة الدالة f هي $f(x)=2x+1$

حسابيّا

✯ حساب المعامل a:
$f(-1)=-1$ معناه $A(-1;-1)$
$f(1)=3$ معناه $B(1;3)$
ومنه $a=\frac{3-(-1)}{1-(-1)}=2$
✯ حساب المعامل b:
لدينا $f(x)=2x+b$ ومنه $f(1)=2\times1+b=3$ وبالتالي $b=1$
إذن $f(x)=2x+1$

تمرين 1

$f(x)=2x+1$
❶ ما طبيعة هذه الدالة وما هو معاملها؟
❷ احسب صور الأعداد التالية بالدالة f:
-2 ، 0 ، -3 ، 4.
❸ احسب $f(-1)$ ، $f(5)$.
❹ عين الأعداد التي صورها -5 ، -31 ، 19.
❺ عيّن العدد x في كل حالة مما يلي:
$f(x)=1$ ، $f(x)=-9$ ، $f(x)=11$.

تمرين 2

$f(x)=-3x+2$
❶ ما طبيعة هذه الدالة وما هو معاملها؟
❷ احسب صور الأعداد التالية بالدالة f:
6 ، 0 ، -1 ، 2.
❸ احسب $f(-3)$ ، $f(2)$.
❹ عين الأعداد التي صورها -6 ، -20 ، 32.
❺ عيّن العدد x في كل حالة مما يلي:
$f(x)=-6$ ، $f(x)=24$.

تمرين 3

حدّد عبارة الدالة التآلفية في كل حالة من الحالات التالية:
❶ الدالة التآلفية f حيث: $f(0)=1$ ، $f(4)=13$
❷ الدالة التآلفية g حيث: $g(0)=2$ ، $f(4)=-18$
❸ الدالة التآلفية h حيث: $h(-2)=1$ ، $h(1)=8$

تمرين 4

❂ أنشئ التمثيل البياني للدوال التآلفيّة التالية:
$f(x)=3x+2$ ، $f(x)=-2x+1$ ، $f(x)=\frac{2}{3}x-3$

تمرين 5

جد عبارة الدالة التآلفيّة في كل حالة من الحالت التالية:
❶ الدالة التآلفية f التي تمثيلها البياني يشمل النقطتين $A(3;7)$ ، $B(-1;1)$.
❷ الدالة التآلفية g التي تمثيلها البياني يشمل النقطتين $A(-1;5)$ ، $B(3;-7)$.
❷ الدالة التآلفية h التي تمثيلها البياني يشمل النقطتين $A(2;0)$ ، $B(-2;-4)$.

تمرين 6

1. أنشئ التمثيل البياني للدالة f حيث: $f(x) = 2x - 1$
2. حدّد بيانيّا صور الأعداد التالية: 1 ، -2 ، 3 و -3.
3. حدّد بيانيّا الأعداد التي صورها: -9 ، 7 ، 5 و -3.

تمرين 7

حدّد النقاط التي تنتمي لتمثيل الدالة التآلفية في كل حالة مما يلي:

1. $f(x) = 2x + 1$ ، $A(2;-4)$ ، $B(3;-5)$.
2. $g(x) = 4x - 3$ ، $A(1;1)$ ، $B(-2;-8)$.
3. $h(x) = 2x + 1$ ، $A(3;3)$ ، $B(-2;-1)$.

تمرين 8

هل النقاط التالية على إستقامة واحدة:

1. $A(1;1)$ ، $B(3;5)$ ، $C(-2;-5)$.
2. $A(-1;1)$ ، $B(-2;6)$ ، $C(0;-4)$.

تمرين 9

$g(-2) = -4$ ، $g(1) = 6$ ، $f(2) = 4$.

1. جد عبارة الدالة الخطيّة f والدالة التآلفية g.
2. احسب ما يلي:
$f(-2)$ ، $f(3)$ ، $g(0)$ ، $g(-1)$.
3. احسب x حيث:
$f(x) = 4$ ، $g(x) = -6$
4. أنشئ التمثيل البياني للدالتين f و g.
5. حدّد بيانيا صور الأعداد 3 ، -2.
6. حدّد بيانيّا الأعداد التي صورها: 1 ، -1.
7. حل المعادلة $f(x) = g(x)$ ، ماذا يمثّل الحل؟
8. احسب إحداثيات نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين للدالتين f و g.
9. حل المعادلة $f(x) \leq g(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة.