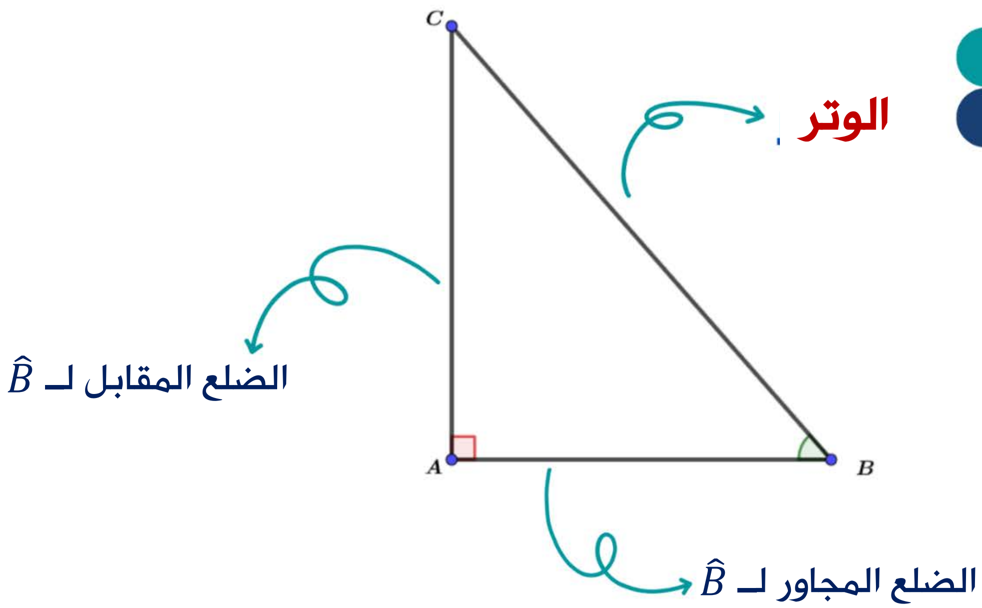
مجلّة المبادرة في النسب المثلثية

[جيب تمام، جيب وظل زاوية حادة]

الحضارة الإسلامية من أهم الحضارات التي اهتمت بعلوم الرياضيات وخاصة جانب الهندسة منها، فكان ذلك ظاهرا بشكل جليّ في عماراتهم وبناءاتهم. وهذا ما كان شاهدا على مبانٍ هي من عجائب الدنيا في هذا العالم.



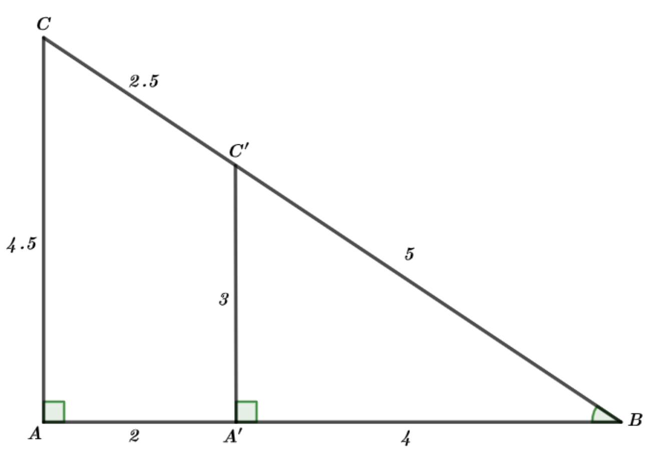
ABC مثلث قائم في A

الزاوية $\hat{B}$ زاوية حادة

في مثلث قائم توجد نسب تتعلق بالزاويتين الحادتين فيه، وهذه النسب لا تتغير بتغير الأطوال وإنّما تتغير بتغير الزاوية الحادة. (نقصد بالنسبة هنا الكسر)

◄ لاحظ أن كل من المثلثين ABC و $A'BC'$ قائمين، والزاوية $\hat{B}$ زاوية حادة.

النسب	في المثلث ABC	في المثلث $A'BC'$
$\dfrac{\text{طول الضلع المجاور لـ } \hat{B}}{\text{طول الوتر}}$	$\frac{AB}{BC}=\frac{2+4}{2.5+5}=\frac{6}{7.5}=\mathbf{0.8}$	$\frac{A'B}{BC'}=\frac{4}{5}=\mathbf{0.8}$
$\dfrac{\text{طول الضلع المقابل لـ } \hat{B}}{\text{طول الوتر}}$	$\frac{AC}{BC}=\frac{4.5}{2.5+5}=\frac{4.5}{7.5}=\mathbf{0.6}$	$\frac{A'C'}{BC'}=\frac{3}{5}=\mathbf{0.6}$
$\dfrac{\text{طول الضلع المقابل لـ } \hat{B}}{\text{طول الضلع المجاور لـ } \hat{B}}$	$\frac{AC}{AB}=\frac{4.5}{2+4}=\frac{4.5}{6}=\mathbf{0.75}$	$\frac{A'C'}{A'B}=\frac{3}{4}=\mathbf{0.75}$



❶ النسب متساوية في المثلثين ABC و $A'BC'$.

❷ النسب لا تتعلق بموضع النقط A و C لأنه عند تغيير موضع هذه النقط الى A' و C' لم تتغير النسب بل بقيت ثابتة (مع الحفاظ على المثلث قائم).

❸ الزاوية $\hat{B}$ لم تتغير وهذا ما أدى الى تساوي النسب. وبالتالي النسب تبقى متساوية لأنّها تتعلق بالزاوية حتى لو غيرنا موضع النقط A و C في كل مرة.

❹ يمكن الانتقال بين النسب والزوايا والعكس باستعمال الآلة الحاسبة.

تسميات

تسمى النسبة $\dfrac{\text{طول الضلع المجاور لـ } \hat{B}}{\text{طول الوتر}}$ بـ جيب تمام الزاوية الحادة $\hat{B}$ ونرمز له بالرمز: $\cos \hat{B}$.

تسمى النسبة $\dfrac{\text{طول الضلع المقابل لـ } \hat{B}}{\text{طول الوتر}}$ بـ جيب الزاوية الحادة $\hat{B}$ ونرمز له بالرمز: $\sin \hat{B}$.

تسمى النسبة $\dfrac{\text{طول الضلع المقابل لـ } \hat{B}}{\text{طول الضلع المجاور لـ } \hat{B}}$ بـ ظل الزاوية الحادة $\hat{B}$ ونرمز له بالرمز: $\tan \hat{B}$.

ملاحظة: تساعد هذه النسب في حساب الأطوال وأقياس الزوايا، كما يمكن الانتقال بين النسب والزوايا باستعمال الآلة الحاسبة وذلك يكون وفق المخطط التالي:

إستعمال الآلة الحاسبة للانتقال بين الزوايا والنسب

النسبة **2ndF** Cos / Sin / tan =

قيس الزاوية Cos / Sin / tan =

الزاوية $\hat{x}$	10°	45°	60°
$\cos \hat{x}$	0.98	0.71	0.5
$\sin \hat{x}$	0.17	0.71	0.87
$\tan \hat{x}$	0.18	1	1.73

النسبة	المدور الى الوحدة	المدور الى $\frac{1}{10}$	المدور الى $\frac{1}{100}$
$\sin \hat{x} = 0.6$	37°	36.9°	36.87°
$\tan \hat{x} = 1.5$	56°	56.3°	56.31°

تطبيق النسب المثلثية في حساب الأطوال والزوايا

$$\cos \hat{x} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin \hat{x} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\tan \hat{x} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

ملاحظة: كل نسبة من النسب السابقة تحوي ثلاثة قيم، فمثلا $\cos \hat{x} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ لدينا ثلاثة قيم هي: $\cos \hat{x}$ والمجاور والوتر.

أفكار وردت في التمارين

1. قد يعطى لنا قيمتين من بين القيم الثلاثة ثم يطلب منا حساب القيمة الثالثة المتبقية.
2. في حالة ما إذا اعطي لنا قيس الزاوية فإننا نستطيع حساب أي نسبة وذلك باستعمال الآلة الحاسبة والعكس.
3. من السهل الحصول على النسبة إذا اعطي لنا أطوال الأضلاع في مثلث قائم (يكفي طولين للحصول على نسبة محددة)، ثم باستعمال الآلة الحاسبة نحصل على قيس الزاوية بسهولة وفق المخطط الموجود في الأعلى.
4. إذا طلب منا حساب قيس زاوية فإننا سنقوم بحساب نسبة من بين النسب الثلاث ثم باستعمال الآلة الحاسبة نقوم بحساب هذه الزاوية.
5. إذا طلب منا حساب أحد أطوال مثلث قائم علم طول ضلعين فيه فسنقوم بحسابه إمّا بخاصية فيثاغورس أو بحساب النسب المثلثية.
6. إذا طلب منا حساب طول ضلع مثلث قائم علم قيس زاوية من زواياه الحادة وطول ضلع آخر، سنقوم بتحديد النسبة المناسبة لحساب الطول المطلوب مني.

مثال: المثلث ABC قائم في A حيث: $\widehat{ABC} = 60°$ و $BC = 5\ cm$. أحسب طول الضلع AC.

- سنقوم بحل المثال باستعمال قواعد النسب المثلثية وذلك بالبحث عن النسبة المناسبة.
- لو نقوم برسم تخطيطي للمثلث ABC الذي هو قائم في النقطة A فسنجد أن الوتر هو الضلع BC وأن الضلع AC مقابل للزاوية $\widehat{ABC}$، بالتالي فالنسبة المناسبة لحل المثال هي التي تتعلق بالوتر والمقابل معاً ألا وهي جيب الزاوية $\widehat{ABC}$ ($\sin \widehat{ABC}$).

التمرين الأول ◀

❶ باستعمال الآلة الحاسبة. أحسب ما يلي (المدور الى $\frac{1}{10}$):

قيس $\hat{x}$	0°	20°	50°	75°
$\cos\hat{x}$				
$\sin\hat{x}$				
$\tan\hat{x}$				

❷ باستعمال الآلة الحاسبة. أحسب ما يلي:

النسبة	المدور الى الوحدة	المدور الى $\frac{1}{10}$	المدور الى $\frac{1}{100}$
$\cos\hat{x} = 0.75$			
$\tan x = 2$			
$\sin x = 0$			
$\tan x = 0.5$			

التمرين الثاني ◀

أحسب في كل مرة النسب $\cos\hat{x}$ و $\sin\hat{x}$ و $\tan\hat{x}$ إن أمكن (في كل ما يلي المثلثات قائمة):

في المثلث ABC:

$AB = 3\ cm \qquad BC = 4\ cm \qquad AC = 5\ cm$

في المثلث EFG:

$EG = 10\ cm \qquad EF = 6\ cm \qquad FG = 8\ cm$

في المثلث RST:

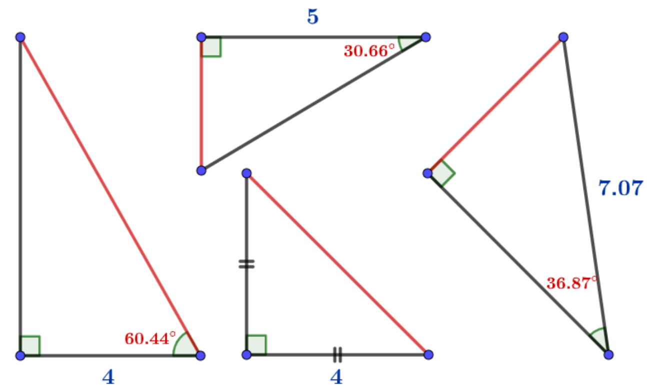
$RT = 1.6\ cm \qquad ST = 2\ cm \qquad RS = 1.2\ cm$

في المثلث MNV:

$NV = \sqrt{32}\ cm \quad MN = MV = 4\ cm$

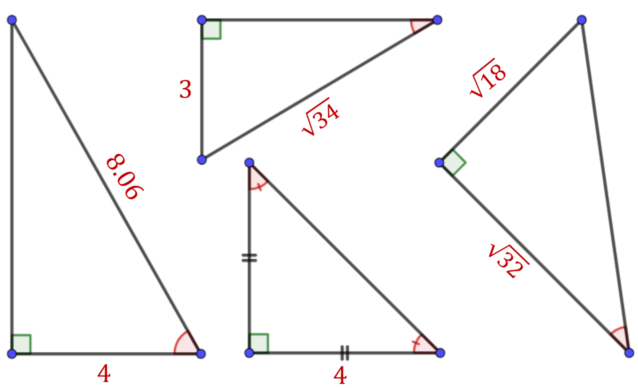
التمرين الثالث ◀

أحسب في كل مرة طول الضلع الأحمر (تأخذ القيم بالمدور الى جزء من مائة):



التمرين الرابع ◀

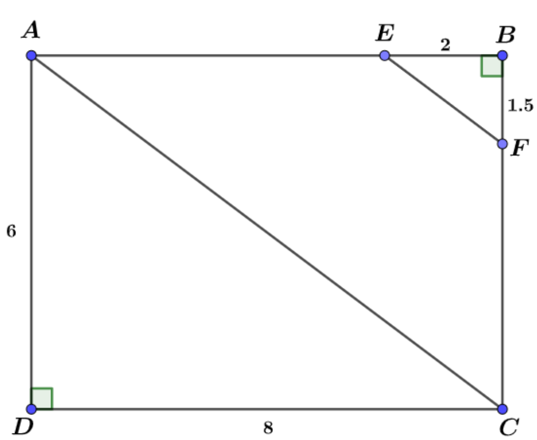
أحسب في كل مرة قيس الزاوية الحادة بالأحمر (تأخذ القيم بالمدور الى جزء من مائة):



التمرين الخامس ◀

أحسب قيس الزاوية $\widehat{BEF}$ ثم الزاوية $\widehat{DAC}$ بالتدوير الى الوحدة.

ماذا يمكن القول عن قيسي الزاويتين؟ أثبت ذلك.



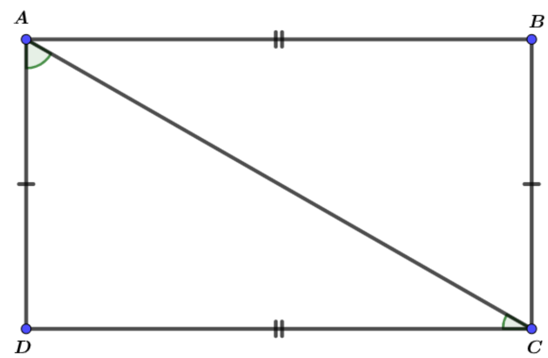
التمرين السادس

لاحظ الشكل أسفله حيث وحدة الطول هي الـ cm.

$AC=\sqrt{30}\ ;\ DC=\sqrt{10}\ ;\ AD=2\sqrt{5}$.

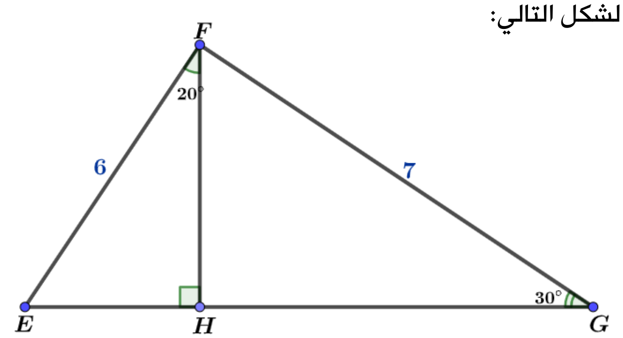
❶ بيّن أن المثلث ADC قائم في D.

❷ أحسب $\tan \widehat{ACD}$ بالتدوير الى $\frac{1}{1000}$ ثمّ استنتج قيس الزاوية $\widehat{ACD}$ (التدوير الى الوحدة من الدرجة).



التمرين السابع

اليك الشكل التالي:



❶ أحسب محيط المثلث EFG.

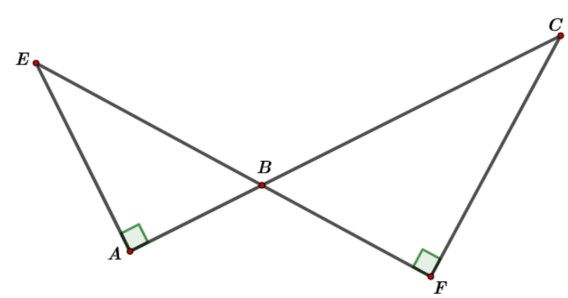
(تعطى النتائج بالمدور الى الوحدة)

التمرين الثامن

النقط A، B، C في استقامية وكذلك النقط E، B، F.

❶ أحسب EB بالتدوير الى 10^{-1} علما أنّ:

$AB=3\ cm$ | $BC=8\ cm$ | $BF=5\ cm$



التمرين التاسع

RST مثلث قائم في R حيث: $\sin \widehat{RTS}=0.8$ و $RS=8\ cm$.

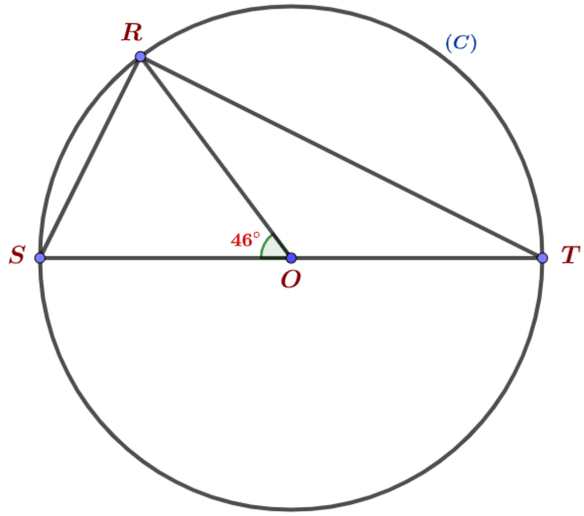
❶ أحسب الطولين ST و RT.

لتكن M نقطة من $[TR]$ حيث: $TM=4\ cm$، المستقيم (Δ) العمودي على (TR) في النقطة M يقطع (TS) في النقطة N.

❷ أحسب الطول MN (المدور الى الوحدة بالسنتيمتر).

التمرين العاشر

الشكل في الأسفل ليس بأبعاد وأقياس زوايا حقيقية.



لدينا (C) دائرة مركزها O وطول قطرها $ST=9\ cm$

R نقطة من هذه الدائرة حيث: $\widehat{SOR}=46°$.

❶ بيّن أن $\widehat{STR}=23°$.

❷ المثلث SRT قائم في R. علّل.

❸ أحسب الطول RS بالتدوير الى 0.01