# الهندسة في الفضاء

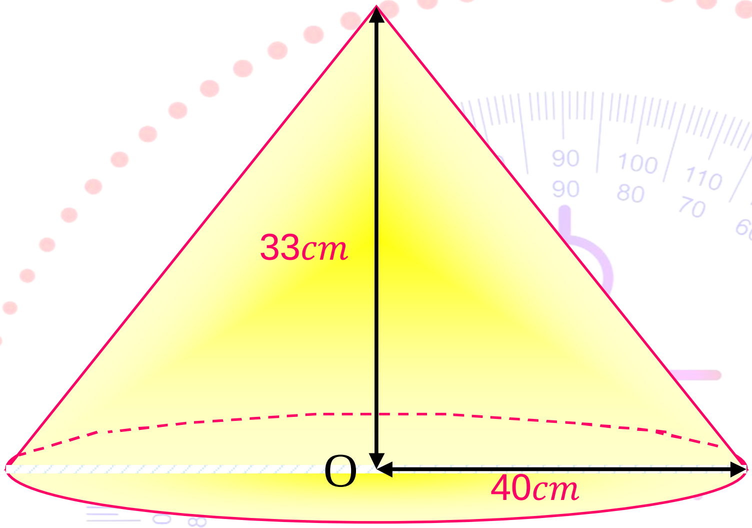
**التمرين الأول :**

مخروط دوراني نصف قطر قاعدته $40cm$ و ارتفاعه $33cm$

1) ما هو حجمه؟

2) أحسب حجم المخروط الدوراني المتحصل عليه بعد تصغير هذا المخروط إلى الثلث

**الحل :**




1) حجم المخروط :

ليكن $v$ حجم هذا المخروط، و $\beta$ مساحة القاعدة و $h$ ارتفاعه

حجم مخروط الدوران يساوي ثلث جداء مساحة القاعدة و ارتفاع هذا المخروط،

أي : $v = \frac{1}{3}\beta \times h$

قاعدة هذا المخروط هي القرص الذي مركزه $O$ و نصف قطره $40cm$ ، فمساحة القاعدة

هي $\beta = \pi \times 40^2$

مساحة القرص تساوي جداء العدد $\pi$ و مربع طول نصف القطر

و منه : $v = \frac{1}{3} \times \pi \times 40^2 \times 33$

و منه : $v = \frac{33}{3} \times \pi \times 40^2$

و منه : $v = 11 \times 3{,}14 \times 40^2$ نجـــــد : $v = 55264cm^3$

2) حساب حجم المخروط الدوراني المتحصل عليه بعد تصغير هذا المخروط إلى الثلث :

ليكن $v'$ حجم هذا المخروط الدوراني بعد التصغير إلى الثلث ( أي $\frac{1}{3}$ )

عند التصغير يضرب الحجم $v$ في النسبة $k^3$

و منه : $v' = k^3 \times v$

و منه : $v' = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 55264$

و منه : $v' = \frac{1}{9} \times 55264$

و منه : $v' \approx 6140{,}44cm^3$

**التمرين الثاني :**

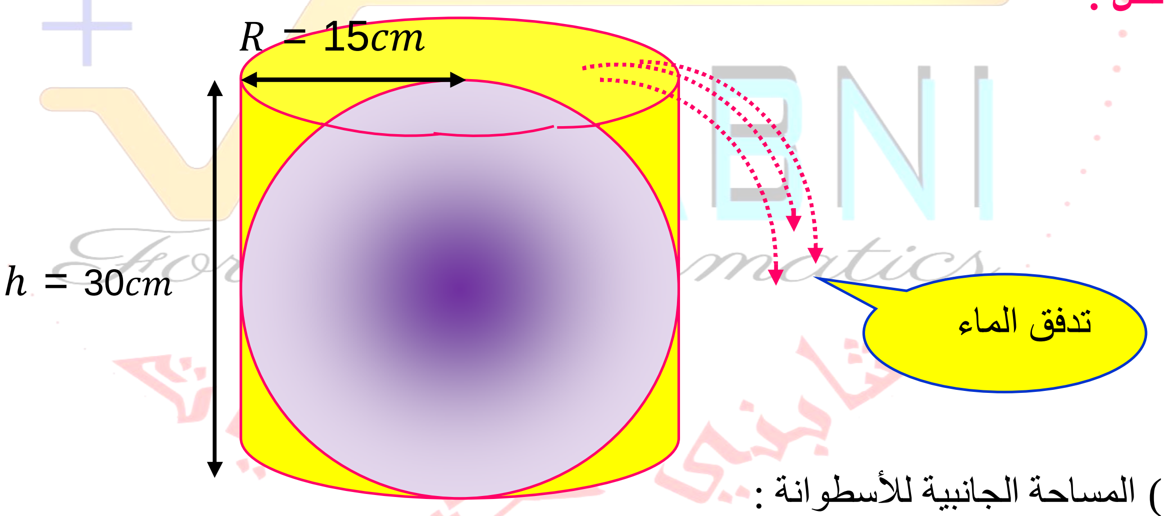
لدى ألاء جلة و أسطوانة حيث ارتفاع الأسطوانة يساوي قطر الجلة و يساوي $30cm$ و نصف قطر قاعدة الأسطوانة يساوي نصف قطر الجلة، و ضعت هذه الجلة داخل تلك الأسطوانة المملوءة بالماء.

1) بين أن المساحة الجانبية للأسطوانة تساوي مساحة الجلة

2) أحسب حجمي الأسطوانة و الجلة

3) بين أن حجم الماء المتدفق يساوي ثلثي حجم الماء الذي كان موجودا داخل هذه الأسطوانة.

**الحل :**




1) المساحة الجانبية للأسطوانة :

لتكن $S$ المساحة الجانبية للأسطوانة

المساحة الجانبية للأسطوانة تساوي جداء محيط قاعدتها $P$ و ارتفاعها $h$

أي : $S = P \times h$ و بما أن محيط الدائرة $P = 2\pi R$ فيكون : $S = 2\pi R \times h$

لكن حسب نص التمرين الارتفاع يساوي قطر الجلة، و منه : $h = 2R$

فتصبح $S = 2\pi R \times h = 2\pi R \times 2R$

و منه : $S = 2R \times 2R \times \pi$ فنجـــــــد : $S = 4\pi R^2$

إذن المساحة الجانبية لهذه الأسطوانة تعطى بـ $S = (4\pi R^2)cm^2$

⇐ مساحة الجلة :

لتكن $S'$ مساحة الجلة

مساحة الجلة التي نصف قطرها $R$ هي : $S' = 4\pi R^2$

و منه $S' = (4\pi R^2)cm^2$

و بالتـــــــــــــــالي $S = S' = (4\pi R^2)cm^2$

إذن المساحة الجانبية للأسطوانة تساوي مساحة الجلة.

2) حساب حجم الأسطوانة و حجم الجلة :

⇐ حجم الأسطوانة :

الحجم $v$ للأسطوانة ذو القاعدة $B$ و الارتفاع $h$ هو $v = B \times h$، و بما أن مساحة القاعدة تساوي $B = \pi \times R^2$ و منه : $v = \pi \times R^2 \times h$

و بالتالي : $v = 3{,}14 \times 15^2 \times 30$

و منه : $v = 21195$

حجم الأسطوانة يساوي $21195cm^3$

⇐ حجم الجلة :

ليكن $v'$ حجم الجلة، و $R$ نصف قطرها.

حجم الجلة يعطى بالقاعدة : $v' = \frac{4}{3}\pi R^3$

أي : $v' = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 15^3$

و منه : $v' = 14130$

حجم الجلة يساوي $14130cm^3$

3) إثبات أن حجم الماء المتدفق يساوي ثلثي حجم الماء الذي كان موجودا داخل الأسطوانة :

ليكن $v''$ حجم الماء المتدفق.

حجم الماء المتدفق يساوي حجم الجلة، و منه : $v'' = v' = 14130cm^3$

حجم الماء الذي كان موجودا داخل هذه الأسطوانة يساوي حجم الأسطوانة، أي : $21195cm^3$

و لدينا : $\frac{2}{3}v = \frac{2}{3} \times 21195 = \frac{2\times21195}{3} = 14130$

و منه : $v'' = \frac{2}{3}v$

ما يعني أن حجم الماء المتدفق يساوي ثلثي حجم الماء المتواجد داخل هذه الأسطوانة.

**التمرين الثالث :**

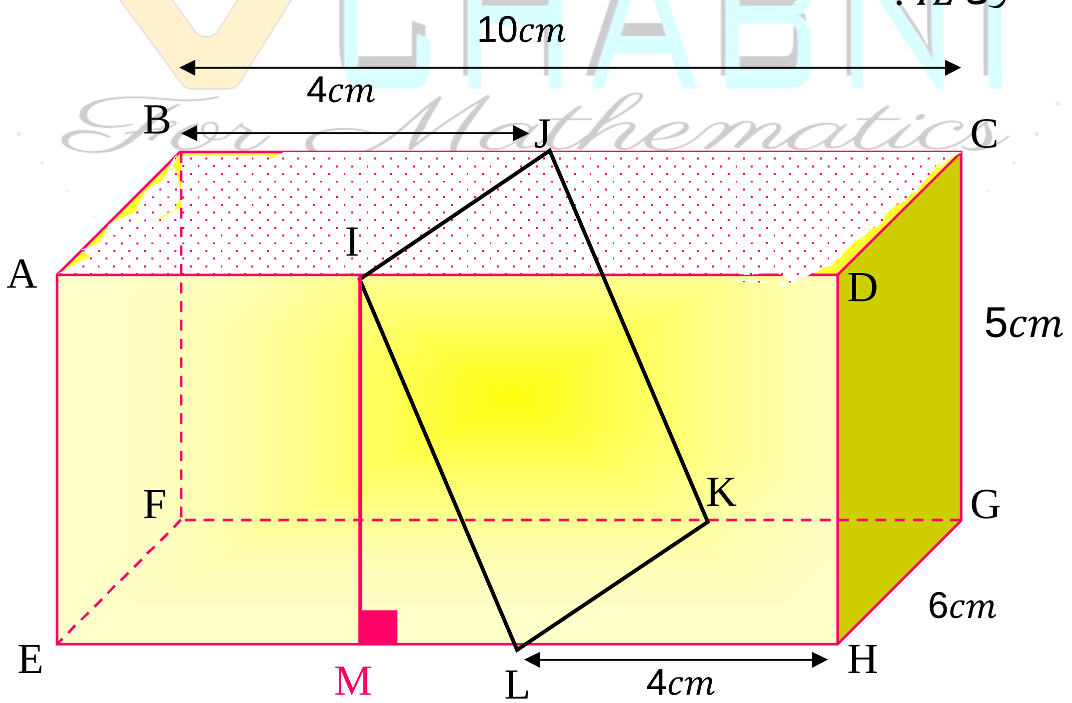
$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات بعدا قاعدته $10cm$، $6cm$ و ارتفاعه $5cm$ و $IJKL$ مقطع للمتوازي المستطيلات بمستوي مواز للحرف $[CD]$.

1) ما هي طبيعة الرباعي $IJKL$ ؟
2) أحسب الطول $IL$
3) أحسب بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة قيس الزاوية $\widehat{ILE}$
4) أحسب حجم هذا المتوازي المستطيلات.

**الحل :**

1) مقطع متوازي المستطيلات بمستو مواز لأحد أحرفه هو مستطيل، و منه فإن المقطع $IJKL$ مستطيل.

2) حساب الطول $IL$ :




لتكن $M$ المسقط العمودي للنقطة $I$ على $[EH]$ ، ينتج أن المثلث $ILM$ قائم في $M$

إذن حسب نظرية فيثاغورث فإن : $IL^2 = IM^2 + LM^2$

لدينا $IM = CG$ و منه : $IM = 5cm$

و منه جهة أخرى لدينا : $EH = EM + LM + LH$

و منه : $LM = EH - (EM + LH)$ أي : $LM = 10 - (4 + 4)$

نجد : $LM = 2cm$

و بالتالي : $IL^2 = 5^2 + 2^2$

و منه : $IL^2 = 29$ أي : $IL = \sqrt{29}cm$

3) حساب قيس الزاوية $\widehat{ILE}$ بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة :

حساب قيس الزاوية $\widehat{ILE}$ يوافق حساب قيس الزاوية $\widehat{ILM}$ لأن : $\widehat{ILE} = \widehat{ILM}$

ومنه في المثلث القائم $ILM$ لدينا : $Sin\widehat{ILM} = \frac{IM}{IL} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

أي : $Sin\widehat{ILM} \approx 0{,}93$

باستعمال الآلة الحاسبة نضغط على اللمسات :

| | | |
|---|---|---|
| $2ndf$ | $Sin^{-1}$ | 0,93 |

نجد : $\widehat{ILM} \approx 68{,}43°$ و بالتدوير إلى الوحدة نجد : $\widehat{ILM} = 68°$

و منه قيس الزاوية $\widehat{ILE}$ يساوي $68°$

4) حساب حجم المتوازي المستطيلات :

ليكن $v$ حجم متوازي المستطيلات بعدي قاعته هما $EH$ و $HG$ و ارتفاعه $CG$

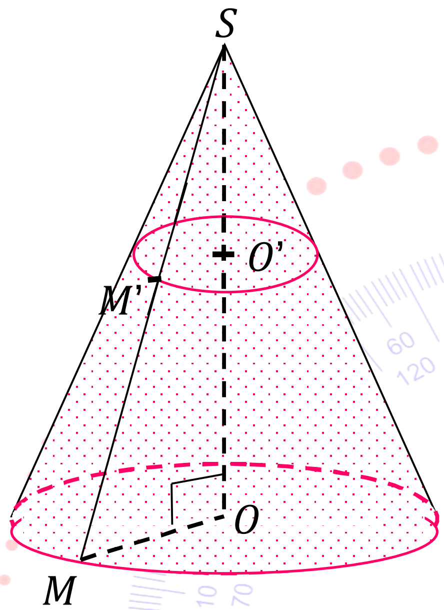
$v = EH \times HG \times CG$ و منه : $v = 10 \times 6 \times 5$ أي : $v = 300$

حجم المتوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ $300cm^3$

**التمرين الرابع :**

نقطع المخروط الدوراني المقابل بمستو مواز لقاعدته و المار من النقطة $O'$ ، هذا المستوي يقطع القطعة $[SM]$ في $M'$ حيث :

$$OO' = 15cm \ ; \ \ OM = 11cm \ ; \ \ O'M' = 8{,}25cm$$




1) ما هي طبيعة المقطع؟

2) أحسب الطول $SO'$ ثم استنتج الطول $SO$

3) أحسب الطول $SM$

4) جد معامل التصغير

5) أحسب حجم المخروط الدوراني الكبير ثم استنتج حجم المخروط الدوراني الصغير

**الحل :**

1) مقطع مخروط دوراني بمستو مواز لقاعدته هو قرص مصغر لقاعدته، و منه طبيعة المقطع هو عبارة عن قرص

2) حساب الطول $SO'$ :

المستو مار من $O'$ و $M'$ و مواز لقاعدة هذا المخروط، معناه $(O'M') \perp (SO)$

و منه : $(O'M')//(OM)$ ، ينتج أن المثلثين $SO'M'$ و $SOM$ في وضعية طالس و بالتالي

يكون : $\frac{O'M'}{OM} = \frac{SM'}{SM} = \frac{SO'}{SO}$

نحتفظ بالمساواة : $\frac{O'M'}{OM} = \frac{SO'}{SO}$

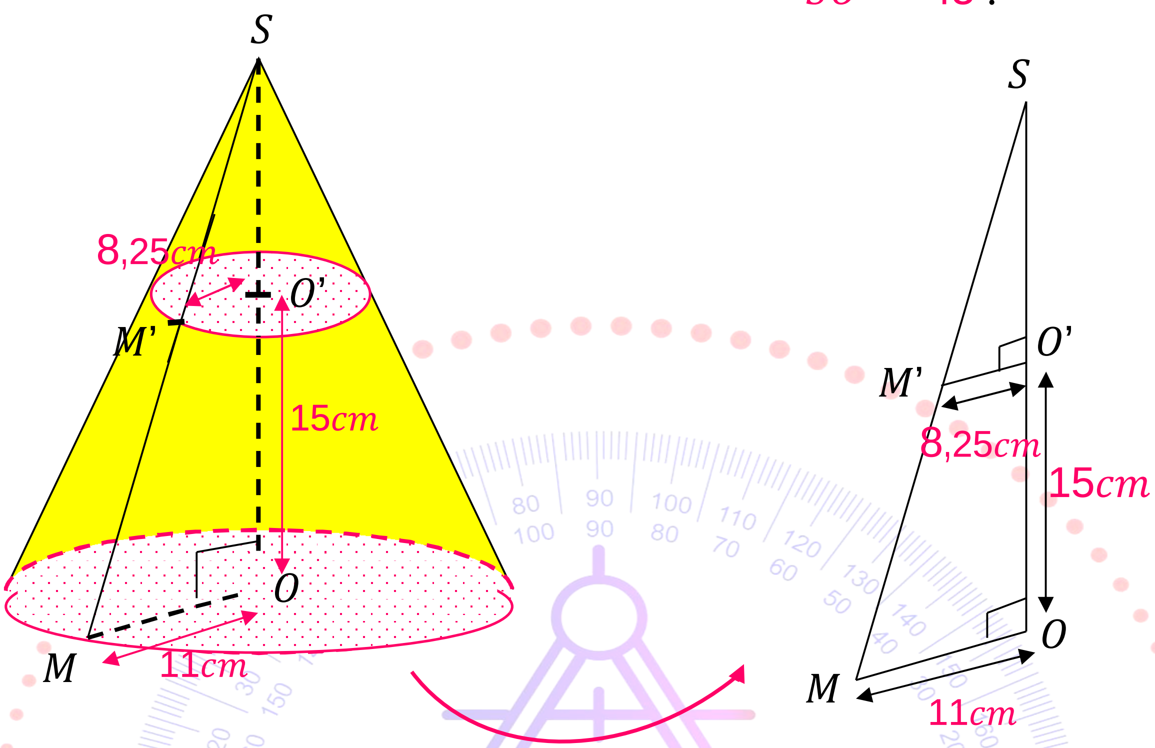
من جهة أخرى لدينا : $SO = SO' + OO'$

تصبح المساواة : $\frac{O'M'}{OM} = \frac{SO'}{SO'+OO'}$ أي : $\frac{8{,}25}{11} = \frac{SO'}{SO'+15}$

معناه : $11 \times SO' = 8{,}25 \times (SO' + 15)$

معناه : $11SO' = 8{,}25 \times SO' + 123{,}75$ معناه $2{,}75SO' = 123{,}75$

و منـــــــــه : $SO' = 45$




لدينا : $SO = SO' + OO'$ أي : $SO = 45 + 15$ نجد أن : $SO = 60cm$

3) حساب الطول $SM$ :

نطبق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم $SOM$ :

$SM^2 = SO^2 + OM^2$ و منه : $SM^2 = 60^2 + 11^2$

و منه : $SM^2 = 3721$ أي : $SM = \sqrt{3721} = 61$

إذن طول $SM$ هو $61cm$

4) معامل التصغير :

معامل التصغير هو $\frac{SO'}{SO} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ إذن : $k = \frac{3}{4}$

5) حجم المخروط الدوراني الكبير :

**تذكير** : حجم مخروط الدوران يساوي ثلث جداء مساحة القاعدة و ارتفاع هذا المخروط

ليكن $v$ حجم مخروط الدوران الكبير، $\beta$ مساحة قاعدته و $SO$ ارتفاعه :

$$v = \frac{\beta \times SO}{3}$$

مساحة القاعدة $\beta$ تعني مساحة القرص الذي مركزه $O$ و نصف قطره $OM$

و منه : $\beta = \pi \times OM^2$

و منه : $v = \frac{\pi \times OM^2 \times SO}{3} = \frac{3{,}14 \times 11^2 \times 60}{3}$ أي : $v = 7598{,}8$

حجم المخروط الدوراني الكبير هو $7598{,}8cm^3$

⇐ حجم المخروط الدوراني الصغير :

ليكن $v'$ حجم المخروط الدوراني الصغير، عند التصغير، الحجم يضرب في $k^3$

إذن : $v' = v \times k^3$ أي : $v' = 7598{,}8 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3$ نجد : $v' \approx 3205{,}74$

حجم المخروط الدوراني الصغير هو $3205{,}74cm^3$

**التمرين الخامس :**

1) أحسب حجم مكعب طول حرفه $8cm$

2) أحسب حجم هرم قاعدته مستطيلة الشكل بعداها $7cm$ و $6cm$ وارتفاعه $8cm$

3) نضع هذا الهرم داخل المكعب، هل يشغل الهرم 30% من حجم المكعب؟

**الحل :**

1) حساب حجم المكعب :

حجم المكعب الذي طول حرفه $a$ هو $a \times a \times a = a^3$

ليكن $v$ حجم هذا المكعب، إذن : $v = 8^3 = 512$

حجم المكعب الذي طول حرفه $8cm$ هو $512cm^3$

2) حساب حجم الهرم :

حجم الهرم يساوي ثلث جداء مساحة قاعدته و ارتفاع هذا الهرم

ليكن $v'$ حجم هذا الهرم، إذن : $v' = \frac{6 \times 7 \times 8}{3}$ و منه : $v' = 112cm^3$

3) التأكد إذا كان حجم الهرم يشغل 30% من حجم المكعب :

حجم المكعب يساوي $512cm^3$

حجم الهرم يساوي $112cm^3$

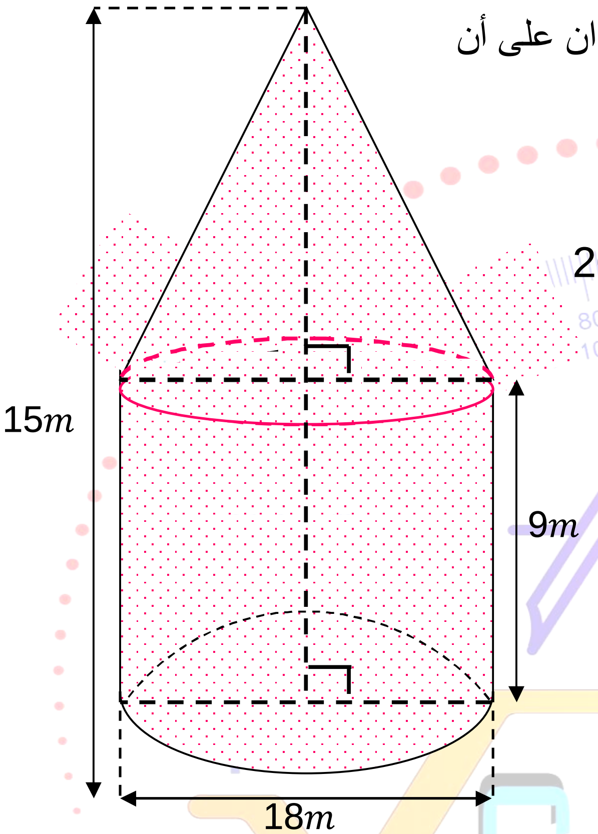
| | |
|---|---|
| 512 | 100 |
| 112 | $x$ |

$x = \frac{112 \times 100}{512}$ أي : $x = 21{,}875$

إذن النسبة المئوية التي يشغلها حجم الهرم من حجم المكعب هي 21,875% و بالتالي حجم الهرم يشغل أقل من 30% من حجم المكعب

## التمرين السادس :

قام محمد بزيارة لأحد مخازن القمح المتواجد في بلديته، و تحصل من المصالح التقنية للإدارة على معلومات تخص شكل الخزان و أبعاده ( أنظر الوثيقة المقابلة )




1) جد كمية القمح بالقنطار التي يمكن أن يحتويها الخزان على أن لا يفوق ذلك 90% من حجمه علما أن كتلة القمح هي تقريبا $800kg/m^3$

2) جد عدد المخازن الواجب استعمالها من أجل 20000 هكتار إذا كان معدل الإنتاج بها هو 40 قنطار بالهكتار

3) جد كمية الطلاء اللازمة لصبغ سطح الخزان الخارجي إذا كان $1m^2$ من سطح الخزان يتطلب $200g$ من الطلاء.

## الحل :

1) كمية القمح بالقنطار التي يمكن أن يحتويها الخزان على أن لا يفوق ذلك 90% من حجمه :

الخزان مشكل من أسطوانة الدوران و مخروط الدوران

⇐ حجم الجزء السفلي من الخزان ( حجم الأسطوانة) :

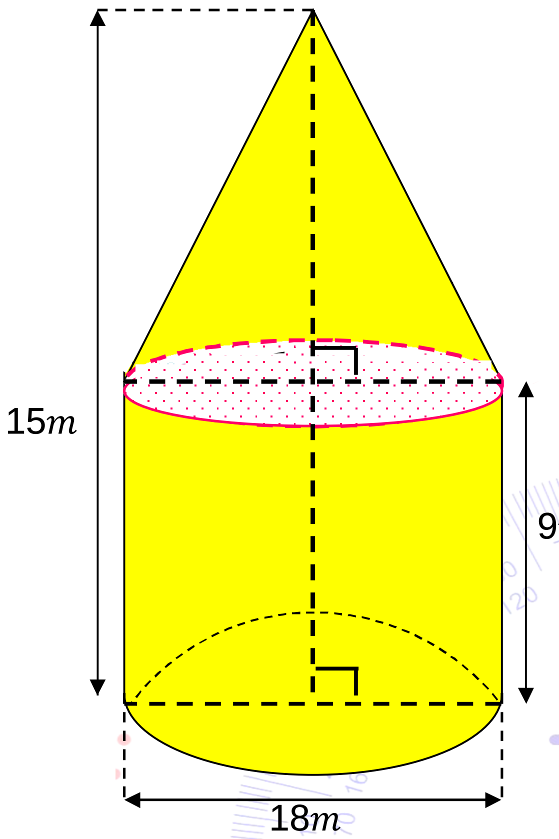
ليكن $v_1$ حجم الأسطوانة، $B$ مساحة قاعدتها و $h$ ارتفاعها. فإن : $v_1 = B \times h$

حيث : $B = \pi \times 9^2$

و منه : $v_1 = 3{,}14 \times 9^2 \times 9$ أي : $v_1 = 3{,}14 \times 9^3$

و منه : $v_1 = 2289{,}06$

إذن حجم الجزء السفلي من الخزان هو $2289{,}06m^3$




$\Leftarrow$ حجم الجزء العلوي من الخزان ( حجم المخروط ) :

ليكن $v_2$ حجم المخروط و $A$ مساحة قاعدته و $h'$ ارتفاعه

فإن : $v_2 = \frac{1}{3} \times A \times h'$

حيث : $A = \pi \times 9^2$ و $h' = 15 - 9 = 6$

و منه : $v_2 = \frac{1}{3} \times \pi \times 9^2 \times 6$

أي : $v_2 = \frac{3,14 \times 81 \times 6}{3}$

نجد : $v_2 = 508,68$

حجم الجزء العلوي من الخزان هو $508,68 m^3$

و منه : $v = v_1 + v_2$

أي : $v = 2289,06 + 508,68$

نجد : $v = 2797,74$

إذن حجم الخزان هو $2797,74 m^3$

لكن كمية القمح التي يحتويها الخزان لا تفوق 90% من حجمه، أي : $v \times \frac{90}{100}$

أي : $2797,74 \times \frac{90}{100} = 2517,966$

نجد أن كمية القمح تشغل $2517,966 m^3$ من حجم الخزان.

من جهة أخرى، لدينا كل $1m^3$ من حجم الخزان يحتوي على $800kg$ ، إذن الكمية التي يحتويها $2517,966 m^3$ من حجم الخزان هي :

| | |
|---|---|
| 1 | 800 |
| 2517,966 | $x$ |

و منـــــــــــه : $x = \frac{800 \times 2517,966}{1}$

نجـــــــد : $x = 2014372,8 kg$

1 قنطار يوافق $100kg$، إذن $2014372,8 kg$ يوافق 20143,728 قنطار.

إذن كمية القمح التي يمكن أن يحتويها الخزان على أن لا يفوق 90%من حجمه هي حوالي 20143 قنطار و $72,8 kg$

2) حساب عدد المخازن الواجب استعمالها من أجل 20000 هكتار :

معدل إنتاج واحد هكتار من القمح هو 40 قنطار، إذن معدل إنتاج 20000 هكتار من القمح هو : $800000 = 20000 \times 40$ أي : 800000 قنطار

حسب الجواب السابق، وجدنا أن المخزن الواحد يتسع لـ20143,728 قنطار من القمح، و عليه فإن عدد المخازن الواجب استعمالها هي : $39,7 \approx \frac{800000}{20143,728}$

إذن العدد المخازن الواجب استعمالها من أجل 200000 هكتار من القمح إذا كان معدل الإنتاج هو 40 قنطار هو 40 مخزن.

3) كمية الطلاء اللازمة لصبغ سطح الخزان الخارجي الكي :

⇐ المساحة الجانبية للجزء السفلي للخزان :

لتكن $S_1$ المساحة الجانبية للأسطوانة، $P$ محيط قاعدتها و $h$ ارتفاعها :

$S_1 = P \times h = 2\pi R \times h$ و منه : $S_1 = 2 \times 3,14 \times 9 \times 9$

و منه : $S_1 = 4465,08$

المساحة الجانبية للجزء السفلي للخزان هي $4465,08m^2$

⇐ المساحة الجانبي للجزء العلوي للخزان :

لتكن $S_2$ المساحة الجانبية للمخروط، $P'$ محيط قاعدته و $h'$ ارتفاعه :

$S_2 = P' \times h' = 2\pi R' \times h'$ و منه : $S_2 = 2 \times 3,14 \times 9 \times 6$

و منه : $S_2 = 339,12$

المساحة الجانبية للجزء العلوي للخزان هي $339,12m^2$

لتكن S مساحة السطح الخارجي الكلي للخزان، $S = S_1 + S_2$

و منه : $S = 4465,08 + 339,12$ نجد : $S = 4804,2$

إذن مساحة السطح الخارجي للخزان هي $4804,2m^2$

إذا كانت $1m^2$ من سطح الخزان الخارجي يتطلب $200g$ من الطلاء، فإن $4804,2m^2$ يتطلب

$4804,2 \times 200 = 960840$

إذن كمية الطلاء اللازمة لصبغ سطح الخزان الخارجي الكلي هي $960840g$

أي : يتطلب 9608,4 كغ من الطلاء.