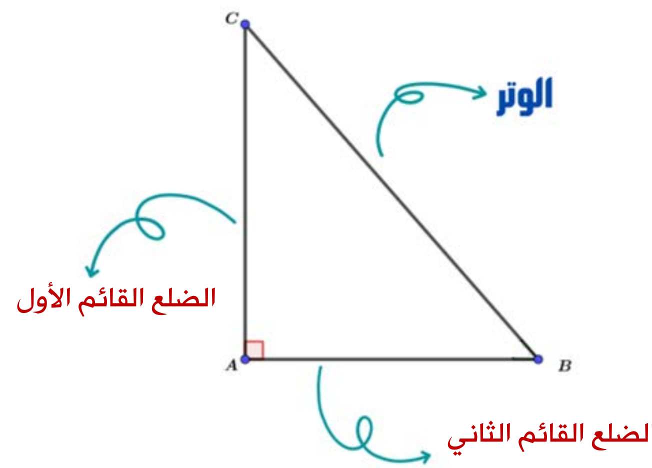
ملخّص + سلسلة تمارين خاصيتي فيثاغورس المباشرة والعكسية

المستوى: سنة رابعة — **الأستاذ:** بوزيدي حمزة

المُلَخّــــص



◄ **خاصية فيثاغورس:** يعطى لنا المثلث قائم أو قد يكون ظاهرا في الشكل ويطلب متا حساب أحد الأطوال.

الخطوات:

❶ المثلث قائم ويعطى لنا طولين (الوتر هو أطول ضلع)، حسب خاصية فيثاغورس.

❷ المساواة محققة [+ $\left(\text{الضلع القائم الأول}\right)^2$ $\left(\text{الوتر}\right)^2 = \left(\text{الضلع القائم الثاني}\right)^2$].

❸ بالتعويض العددي في المساواة نحصل على الطول بسهولة (الطول المراد مني حسابه).

◄ **خاصية فيثاغورس العكسية:** تعطى لنا الأطوال الخاصة بالمثلث أو قد نتحصّل عليها من الشكل ويطلب متا اثبات أن هذا المثلث قائم.

الخطوات:

❶ تحديد أكبر ضلع (يمثل الطرف الثاني من المساواة)

❷ المساواة ليست محققة في البداية بل يجب اثباتها وذلك بحساب كل طرف لوحده.

❸ إذا كانت المساواة محققة نكتب: حسب خاصية فيثاغورس العكسية فإنّ المثلث قائم.

التمريــــن ①

المثلث ABC قائم في A. ولدينا: $AB = 6$ و $AC = 8$.

❶ أحسب BC.

المثلث EFG قائم في E. ولدينا: $EF = 4$ و $EG = 3$.

❷ أحسب FG.

المثلث RST قائم في R. ولدينا: $RS = 0.9$ و $ST = 1.5$.

❸ أحسب RT.

التمريــــن ②

إليك المثلث IJK بحيث: $IJ = 0.6$ و $IK = 1$ و $JK = 0.8$

❶ بيّن أنّ المثلث MSN قائم.

إليك المثلث MSN بحيث: $MS = 15$ و $SN = 12$ و $MN = 9$

❷ بيّن أنّ المثلث MSN قائم.

إليك المثلث RST بحيث: $RS = 7$ و $ST = 9$ و $RT = 12$

❸ هل المثلث RST قائم؟

التمريــــن ③

ABC مثلث قائم في A.طولا ضلعيهْ القائمين $AC = 12cm$ و $AB = 5cm$

❶ استعمل - خاصيةّ فيثاغورس المباشرة – لحساب الطول BC الطول الحقيقي لوتر هذا المثلث.

❷ أرسم المثلث ABC حسب معُطيات النص، ثم قّسْ طول الوتر $[BC]$. ماذا يمكنك القول عن جواب السؤال الأول؟

❸ في كل من الحالتين الآتيتين، بيّن إن كان المثلث ABC قائم الزاوية أمْ لا.

في الإيجاب، أذكر الرأس القائم واشرح إجابتك :

- الحالة الأولى:

$AB = 24cm$ ، $AC = 7cm$ ، $BC = 25cm$.

- الحالة الثانيّة:

$AB = 4cm$ ، $AC = 7cm$ ، $BC = 5,75cm$.

التمريــــن ④

ABC مثلث قائم في A حيث:

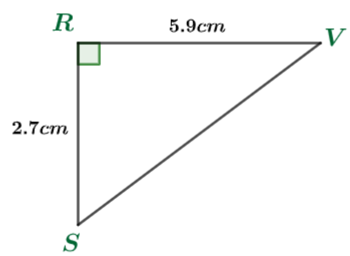
$AC = 8cm$ و $AB = 16cm$

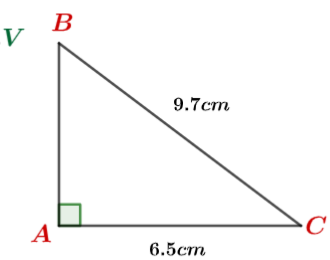
❶ أرسم شكلا يناسب معطيات التمرين.

❷ أحسب الطول BC.

التمريــــن ⑤

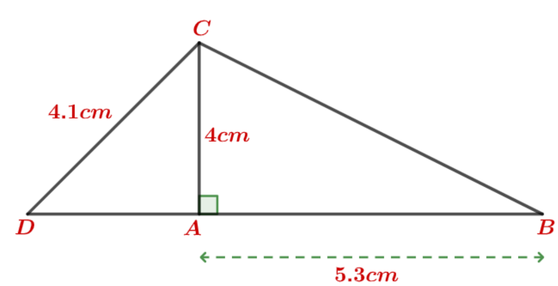
❶ أحسب طول الضلع في كل حالة من الحالات الآتية:





التمريــــن ⑥

اليك الشكل المقابل: (الشكل غير مرسوم بالأبعاد الحقيقية)



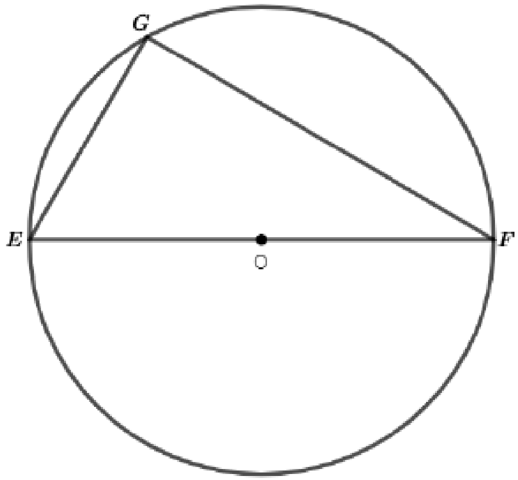
❶ أحسب كلاً من الطولين BC و AD.

❷ أحسب مساحة المثلث EBC.

التمريــــن ⑦

إليك الشكل المقابل (الشكل غير مرسوم بالأبعاد الحقيقية)

لدينا النقط F، Oو E على استقامة واحدة.

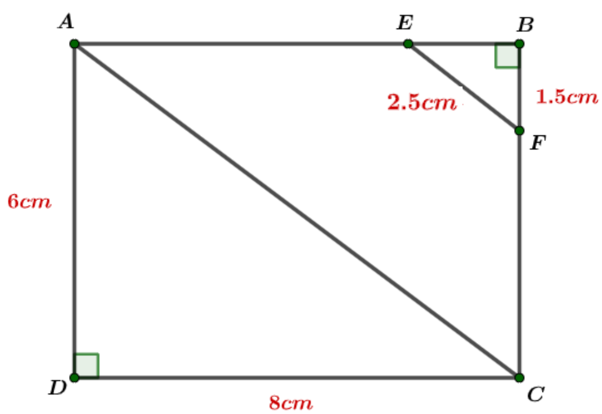


❶ بطريقتين مختلفتين، بيّن أن المثلث EFG قائم حيث.

$EF=5\ cm$ و $EG=3\ cm$ و $GF=4\ cm$

التمريــــن ⑧

$ABCD$ مستطيل حيث: $AD = 6cm$ و $DC = 8cm$.



❶ أحسب الطولين AC و EB.

التمريــــن ⑨

ABC مثلث حيث: $BC = 6$ وَ $AC = \sqrt{13}$ وَ $AB = \sqrt{23}$

❶ هل هو مثلث قائم؟ برّر جوابك.

الحلول المفصّلة سلسلة تمارين خاصيتي فيثاغورس المباشرة والعكسية

حل مقترح ①

❶ بما أن المثلث ABC قائم في A، وحسب خاصية فيثاغورس المباشرة فإنّ:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$BC^2 = 6^2 + 8^2$$
$$BC^2 = 36 + 64$$
$$BC^2 = 100$$
$$\sqrt{BC^2} = \sqrt{100}$$
$$BC = 10$$

❷ بما أن المثلث EFG قائم في E، وحسب خاصية فيثاغورس المباشرة فإنّ:

$$FG^2 = EF^2 + EG^2$$
$$FG^2 = 4^2 + 3^2$$
$$FG^2 = 16 + 9$$
$$FG^2 = 25$$
$$\sqrt{FG^2} = \sqrt{25}$$
$$FG = 5$$

❸ بما أن المثلث RST قائم في R، وحسب خاصية فيثاغورس المباشرة فإنّ:

$$ST^2 = RS^2 + RT^2$$
$$(1.5)^2 = (0.9)^2 + RT^2$$
$$2.25 = 0.81 + RT^2$$
$$RT^2 = 2.25 - 0.81$$
$$RT^2 = 1.44$$
$$\sqrt{RT^2} = \sqrt{1.44}$$
$$RT = 1.2$$

حل مقترح ②

نختار أكبر ضلع ثم نتحقق من المساواة

❶ أكبر ضلع هو $IK = 1$:

$$IK^2 = 1^2 = 1$$
$$IJ^2 + JK^2 = (0.6)^2 + (0.8)^2 = 0.36 + 0.64 = 1$$

اذن $IK^2 = IJ^2 + JK^2$ وحسب خاصية فيثاغورس العكسية المثلث IJK قائم في J. النقطة التي يشترك فيها الضلعان القائمان.

❷ أكبر ضلع هو $MS = 15$:

$$MS^2 = 15^2 = 225$$
$$SN^2 + MN^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$$

اذن $MS^2 = SN^2 + MN^2$ وحسب خاصية فيثاغورس العكسية المثلث MSN قائم في N. النقطة التي يشترك فيها الضلعان القائمان.

❸ أكبر ضلع هو $RT = 12$:

$$RT^2 = 12^2 = 144$$
$$ST^2 + RS^2 = 9^2 + 7^2 = 81 + 49 = 120$$

اذن $MS^2 \neq SN^2 + MN^2$ وحسب خاصية فيثاغورس العكسية المثلث MSN ليس قائماً.

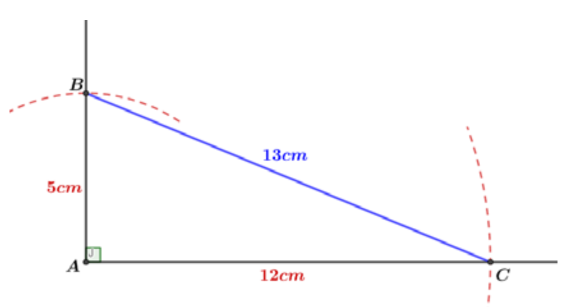
حل مقترح ③

❶ بما أن المثلث ABC قائم في A، وحسب خاصية فيثاغورس المباشرة فإنّ:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$BC^2 = 5^2 + 12^2$$
$$BC^2 = 25 + 144$$
$$BC^2 = 169$$
$$\sqrt{BC^2} = \sqrt{169}$$
$$BC = 13$$

❷ لإنشاء المثلث ABC نتبع الخطوات التالية:

- نرسم قطعتين متعامدتين. نسمي رأس التعامد بـA.
- باستعمال المدور نفتح فتحة قدرها $5cm$ ونضع رأس المدور في A ثم نرسم قوس يقطع احدى القطعتين في نقطة نسميها B. يصبح طول القطعة $[AB]$ يساوي $5cm$.
- بنفس الطريقة نعين النقطة C.
- نقيس طول الوتر $[BC]$ لنتأكد من الطول مطابق لما وجدناه في السؤال الأول أي: $BC = 13cm$.



❸ تبيان ان كان المثلث ABC قائم في كل حالة:

نختار أكبر ضلع ثم نتحقق من المساواة

- الحالة الأولى:

أكبر ضلع هو $BC = 25$:

$$BC^2 = 25^2 = 625$$
$$AB^2 + AC^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625$$

اذن $BC^2 = AB^2 + AC^2$ وحسب خاصية فيثاغورس العكسية المثلث ABC قائم في A. النقطة التي يشترك فيها الضلعان القائمان.

- الحالة الثانية:

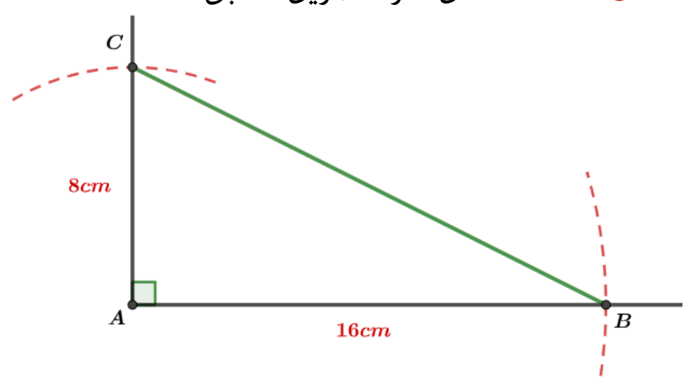
أكبر ضلع هو $AC = 7$:

$$AC^2 = 7^2 = 49$$
$$BC^2 + AB^2 = (5.75)^2 + 4^2 = 33.0625 + 16$$
$$= 49.0625$$

اذن $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ وحسب خاصية فيثاغورس العكسية المثلث ABC ليس قائماً.

حل مقترح ④

❶ الانشاء: نفس فكرة التمرين السابق.



❷ حساب الطول BC:

بما أن المثلث ABC قائم في A، وحسب خاصية فيثاغورس المباشرة فإنّ:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$BC^2 = 16^2 + 8^2$$
$$BC^2 = 256 + 64$$
$$BC^2 = 320$$
$$\sqrt{BC^2} = \sqrt{320}$$
$$BC = \sqrt{64 \times 5} = \sqrt{64} \times \sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

حل مقترح ⑤

❶ حساب طول الضلع $[AB]$ من المثلث ABC:

بما أن المثلث ABC قائم في A، وحسب خاصية فيثاغورس المباشرة فإنّ:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$(9.7)^2 = AB^2 + (6.5)^2$$
$$94.09 = AB^2 + 42.25$$
$$AB^2 = 94.09 - 42.25$$
$$AB^2 = 51.84$$
$$\sqrt{AB^2} = \sqrt{51.84}$$
$$AB = 7.2$$

❷ حساب طول الضلع $[SV]$ من المثلث RSV:

بما أن المثلث RSV قائم في R، وحسب خاصية فيثاغورس المباشرة فإنّ:

$$SV^2 = RS^2 + RV^2$$
$$SV^2 = (2.7)^2 + (5.9)^2$$
$$SV^2 = 7.29 + 34.81$$
$$SV^2 = 42.1$$
$$\sqrt{SV^2} = \sqrt{42.1}$$
$$SV = \sqrt{42.1}$$
$$SV \approx 6.49$$

حل مقترح ⑥

❶ حساب طول الضلع $[BC]$ من المثلث ABC:

بما أن المثلث ABC قائم في A، وحسب خاصية فيثاغورس المباشرة فإنّ:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$BC^2 = (5.3)^2 + 4^2$$
$$BC^2 = 28.09 + 16$$
$$BC^2 = 44.09$$
$$\sqrt{BC^2} = \sqrt{44.09}$$
$$BC \approx 6.64$$

❷ حساب طول الضلع $[AD]$ من المثلث ACD:

بما أن المثلث ACD قائم في A، وحسب خاصية فيثاغورس المباشرة فإنّ:

$$DC^2 = AD^2 + AC^2$$
$$(4.1)^2 = AD^2 + 4^2$$
$$16.81 = AD^2 + 16$$
$$AD^2 = 16.81 - 16$$
$$AD^2 = 0.81$$
$$\sqrt{AD^2} = \sqrt{0.81}$$
$$AD = 0.9$$

حل مقترح ⑦

الطريقة الأولى:

خاصية:

- الدائرة (C) محيطة بالمثلث FGE.
- الضلع $[EF]$ قطر للدائرة (C).

⟵ يصبح المثلث FGE قائم في G.

الطريقة الثانية:

أكبر ضلع هو $EF = 5$:

$$EF^2 = 5^2 = 25$$
$$EG^2 + GF^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

اذن $EF^2 = EG^2 + GF^2$ وحسب خاصية فيثاغورس العكسية المثلث FGE قائم في G.

حل مقترح ⑧

❶ حساب الطول AC من المثلث ACD:

بما أن المثلث ACD قائم في D، وحسب خاصية فيثاغورس المباشرة فإنّ:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$
$$AC^2 = 6^2 + 8^2$$
$$AC^2 = 36 + 64$$
$$AC^2 = 100$$
$$\sqrt{AC^2} = \sqrt{100}$$
$$AC = 10$$

❷ حساب الطول EB من المثلث BEF:

بما أن المثلث BEF قائم في B، وحسب خاصية فيثاغورس المباشرة فإنّ:

$$EF^2 = EB^2 + FB^2$$
$$(2.5)^2 = EB^2 + (1.5)^2$$
$$6.25 = EB^2 + 2.25$$
$$EB^2 = 6.25 - 2.25$$
$$EB^2 = 4$$
$$\sqrt{EB^2} = \sqrt{4}$$
$$EB = 2$$

حل مقترح ⑨

❶ أكبر ضلع هو $BC = 6$:

$$BC^2 = 6^2 = 36$$
$$AB^2 + AC^2 = (\sqrt{23})^2 + (\sqrt{13})^2 = 23 + 13 = 36$$

اذن $BC^2 = AB^2 + AC^2$ وحسب خاصية فيثاغورس العكسية المثلث ABC قائم في A.

#فقرة

كيـــــفاش تجاوب

(فيثاغورس وفيثاغورس العكسية)

الأستاذ بوزيدي حمزة

المبادرة للرياضيات

◀ فيثاغورس:

لدينا المثلث ... قائم في النقطة ...

حسب خاصية فيثاغورس فإن :

$(\text{الوتر})^2 = (\text{الضلع القائم الأول})^2 + (\text{الضلع القائم الثاني})^2$

نقوم بتطبيق عددي ثم ننطلق في خطوات الحل الى أن نصل الى حساب الطول المطلوب.

تطبيق:

المثلث EFG قائم في E

بحيث: $EF = 4$ و $FG = 5$

المطلوب:

أحسب الطول EF.

◀ فيثاغورس العكسية:

نقوم بحساب كل طرف على حدى:

$\left(\text{أكبر ضلع}\right)^2 = \cdots$

$\left(\text{الضلع المتبقي الأول}\right)^2 + \left(\text{الضلع المتبقي الثاني}\right)^2 = \cdots$

إذا تساوا الطرفان قلنا إن المثلث قائم حسب خاصية فيثاغورس، وإلا فلا.

تطبيق:

RST مثلث حيث: $RS = 6$ و $ST = 8$ و $RT = 10$

المطلوب:

بين أن المثلث RST قائم في S.