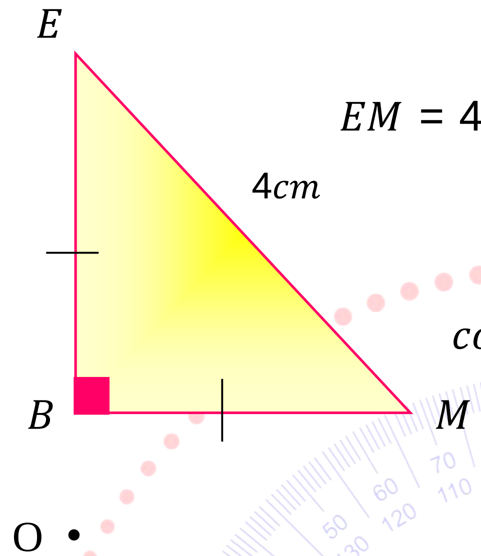
التمرين الأول :



BEM مثلث قائم و متساوي الساقين في B حيث : $EM = 4cm$

1) أنشئ صورة هذا الشكل بالدوران الذي مركزه O و زاويته $90°$ في الاتجاه الموجب

2) أحسب الطولين BM و BE علما أن $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) أحسب القيمة المضبوطة لمحيط و مساحة صورة المثلث BEM بالدوران المعطى

الحل :

1) صورة الشكل بالدوران الذي مركزه O و زاويته $90°$ في الاتجاه الموجب :

صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه O و زاويته $90°$ في الاتجاه الموجب هي النقطة M'

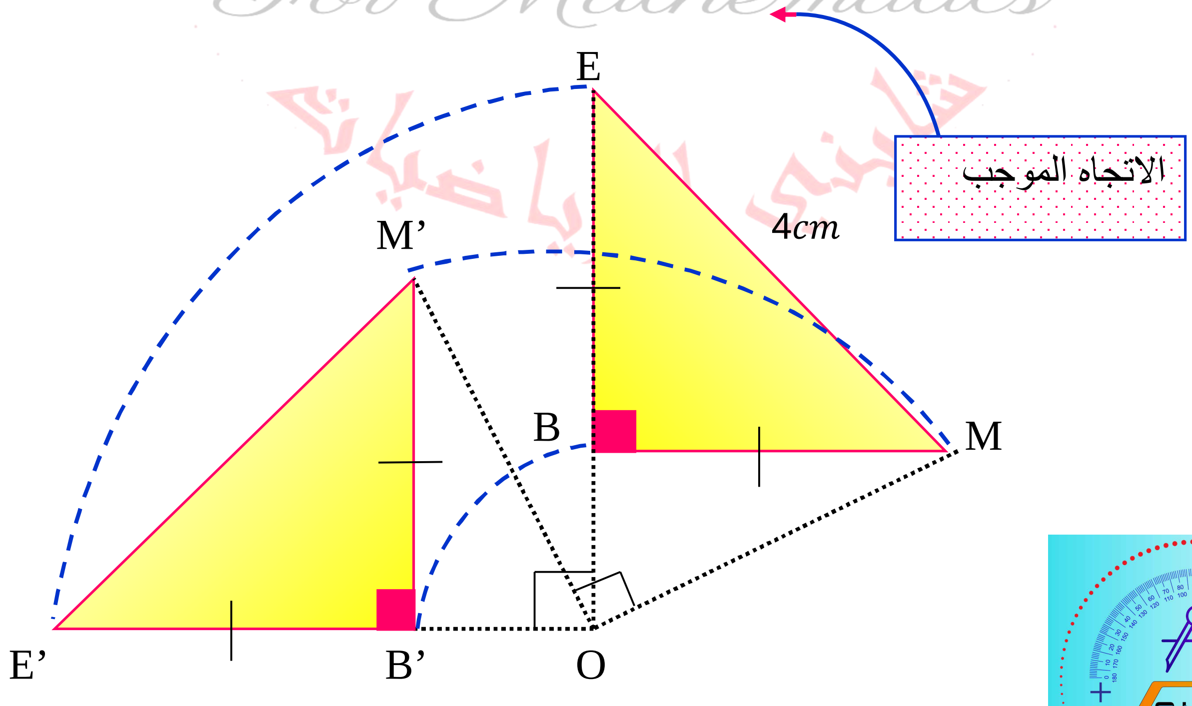
حيث : $OM' = OM$ و $\widehat{MOM'} = 90°$

صورة النقطة E بالدوران الذي مركزه O و زاويته $90°$ في الاتجاه الموجب هي النقطة E' حيث :

$OE' = OE$ و $\widehat{EOE'} = 90°$

صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه O و زاويته $90°$ في الاتجاه الموجب هي النقطة B' حيث :

$OB' = OB$ و $\widehat{BOB'} = 90°$



2) حساب الطولين BM و BE علما أن $cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

⇐ الطول BM :

المثلث BEM قائم و متساوي الساقين في B معناه أن : $\widehat{BME} = \widehat{BEM} = 45°$

في المثلث القائم BEM لدينا : $cos\widehat{BME} = cos45° = \frac{BM}{EM}$

معناه : $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BM}{4}$ و منه : $BM = \frac{4\sqrt{2}}{2}$ أي : $BM = 2\sqrt{2}$

بما أن المثلث BEM متساوي الساقين رأسه الأساسي B فإن : $BM = BE = 2\sqrt{2}cm$

3) حساب القيمة المضبوطة لمحيط و مساحة صورة المثلث BEM بالدوران المعطى :

حساب القيمة المضبوطة للمحيط :

ليكن P محيط المثلث BEM، حيث : $P = EM + EB + BM$

و منه : $P = 4 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

و منه : $P = 4 + 4\sqrt{2}$

القيمة المضبوطة للمساحة :

لتكن S مساحة المثلث BEM، حيث : $S = \frac{BE \times BM}{2}$

و منه : $S = \frac{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2}$ أي : $S = \frac{(2\sqrt{2})^2}{2}$ أي : $S = \frac{8}{2}$ أي : $S = 4cm^2$

صورة المثلث BEM بالدوران الذي مركزه O و زاويته $90°$ في الاتجاه الموجب هو المثلث $B'E'M'$ و كون الدوران يحفظ الأطوال و أقياس الزوايا فإن المثلث $B'E'M'$ هو مثلث قائم و متساوي الساقين في B' و له نفس مساحة و محيط المثلث BEM

التمرين الثاني :

(C) دائرة مركزها O و قطرها $AB = 8cm$، M نقطة من الدائرة حيث : $BM = 4cm$

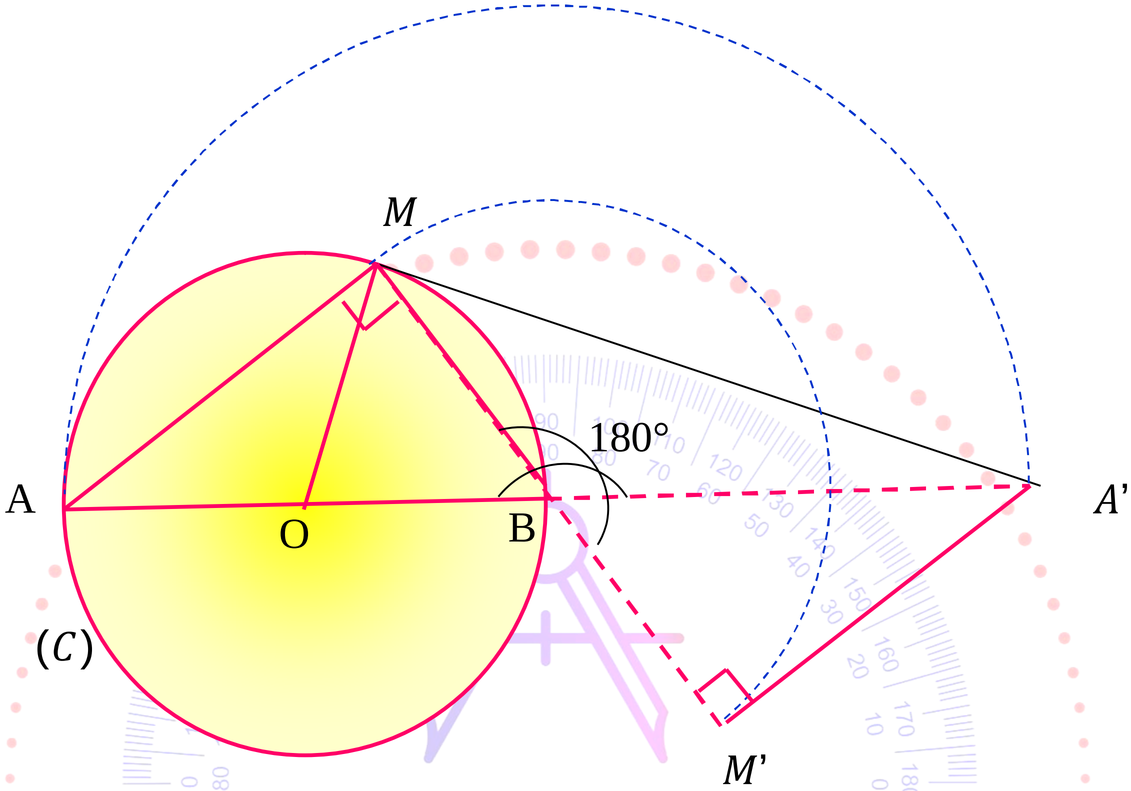
1) أنشئ النقطتين A' و M' صورتي A و M بالدوران الذي مركزه B و زاويته $180°$ على الترتيب

2) أحسب بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة قيس الزاوية $\widehat{BAM}$ ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{BOM}$

3) أحسب الطول $A'M$

الحل :

1) صورتي A و M بالدوران الذي مركزه B و زاويته $180°$:



الدوران الذي مركزه B و زاويته $180°$ هو التناظر المركزي بالنسبة إلى النقطة B
معناه أن النقطتان $A’$ و A متناظرتان بالنسبة إلى النقطة B ، النقطتان M و $M’$ متناظرتان بالنسبة إلى النقطة B.

2) حساب بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة قيس الزاوية $\widehat{BAM}$

لدينا $[AB]$ قطر للدائرة (C) المحيطة بالمثلث AMB، ما يعني أن المثلث AMB قائم في M.

و منه في المثلث القائم AMB لدينا :

$Sin\widehat{BAM} = \frac{BM}{AB} = \frac{4}{8}$ و منه : $Sin\widehat{BAM} = 0,5$

مستعملين الآلة الحاسبة و بالضغط على اللمسات :

$0,5$	Sin^{-1}	$2ndf$

نجــــــــــــد : $\widehat{BAM} = 30°$

⇐ استنتاج قيس الزاوية $\widehat{BO}$

الزاوية $\widehat{BAM}$ محيطية في الدائرة (C) تحصر القوس $\widehat{MB}$

و الزاوية $\widehat{BOM}$ مركزية في الدائرة (C) تحصر نفس القوس $\widehat{MB}$

و كون الزاوية المحيطية في دائرة هو نصف قيس الزاوية المركزية التي تحصر معها نفس القوس

فإن : $\widehat{BAM} = \frac{1}{2}\widehat{BOM}$

و منـــــــــــه : $\widehat{BOM} = 2 \times \widehat{BAM}$

أي : $\widehat{BOM} = 2 \times 30$

نجد : $\widehat{BOM} = 60°$

3) حساب الطول $A'M$

صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه B و زاويته $180°$ هي النقطة A'

صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه B و زاويته $180°$ هي النقطة M'

صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه B و زاويته $180°$ هي النقطة B نفسها

إذن صورة المثلث AMB بهذا الدوران هو المثلث $A'M'B$ و كون الدوران يحفظ الأطوال و أقياس الزوايا فإن المثلث $A'M'B$ قائم في M'

من جهة أخرى زاوية هذا الدوران الذي مركزه B هي $180°$ ما يعني أنه تناظر مركزي، و منه النقط M، B، M' على استقامة واحدة.

و بالتالي المثلث $MM'A'$ قائم في M' ، و حسب نظرية فيثاغورث لدينا:

$A'M^2 = M'A'^2 + MM'^2$ و منه : $A'M^2 = M'A'^2 + 8^2$

في المثلث القائم AMB لدينا العلاقة لدينا : $AM^2 = AB^2 - MB^2$

و منه : $AM^2 = 8^2 - 4^2$ و منه : $AM^2 = 48$ و منه : $AM = \sqrt{48}$

صورة $[AM]$ بالدوران المعطى هي $[A'M']$ إذن : $AM = A'M'$

و منه : $A'M^2 = \left(\sqrt{48}\right)^2 + 8^2$

و منه : $A'M^2 = 48 + 64$ أي : $A'M^2 = 112$

و منـــــــــــه : $A'M = \sqrt{112}cm$ أي : $A'M = 4\sqrt{7}cm$

التمرين الثالث :

BEM مثلث متقايس الأضلاع و (C) الدائرة المحيطة به مركزها O و نصف قطرها $OB = \sqrt{3}cm$

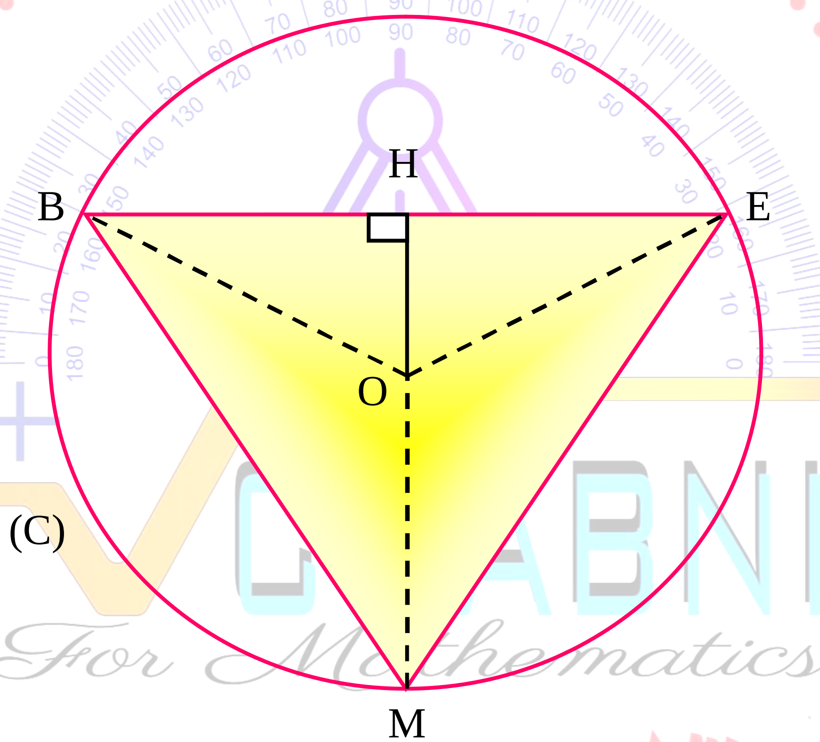
1) أحسب القيمة المضبوطة لطول ضلع المثلث BEM

2) أنشئ النقط R، S و T صور النقط B، E و M بالدوران الذي مركزه O و زاويته $60°$ في الاتجاه السالب

3) أحسب قيس الزاوية $\widehat{BRE}$

الحل :

1) حساب القيمة المضبوطة لطول ضلع المثلث BEM :



من الشكل لدينا :

الزاوية $\widehat{BME}$ محيطية تحصر القوس $\widehat{BE}$ و الزاوية $\widehat{BOE}$ مركزية تحصر نفس القوس $\widehat{BE}$

إذن : $\widehat{BME} = \frac{1}{2}\widehat{BOE}$ $\boxed{\widehat{BOE} = 2 \times \widehat{BME}}$

المثلث BEM متقايس الأضلاع معناه أن : $\widehat{BME} = 60°$

من العلاقة السابقة نجد أن : $\widehat{BOE} = 2 \times \widehat{BME}$ و منه : $\widehat{BOE} = 120°$

من جهة أخرى، في المثلث BOE، $[OH]$ ارتفاع متعلق بالضلع $[BE]$ و منصفا للزاوية $\widehat{BOE}$

و منه : $\widehat{HOB} = 60°$

في المثلث القائم HOB في H لدينا : $\widehat{HBO} = 90° - 60° = 30°$

لدينا العلاقة : $cos\widehat{HBO} = \frac{BH}{OB} = \frac{BH}{\sqrt{3}}$ أي : $cos30° = \frac{BH}{\sqrt{3}}$

أي : $BH = \sqrt{3} \times cos30°$

و منه : $BH = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ و منه : $BH = \frac{(\sqrt{3})^2}{2}$ و منه : $BH = \frac{3}{2}$

نستنتج أن : $BE = 2 \times BH$ أي : $BE = 2 \times \frac{3}{2}$ نجـــــد : $BE = 3cm$

2) إنشاء النقط R، S و T صور النقط B، E و M بالدوران الذي مركزه O و زاويته $60°$ في الاتجاه السالب :

صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه O و زاويته $60°$ في الاتجاه السالب هي النقطة R

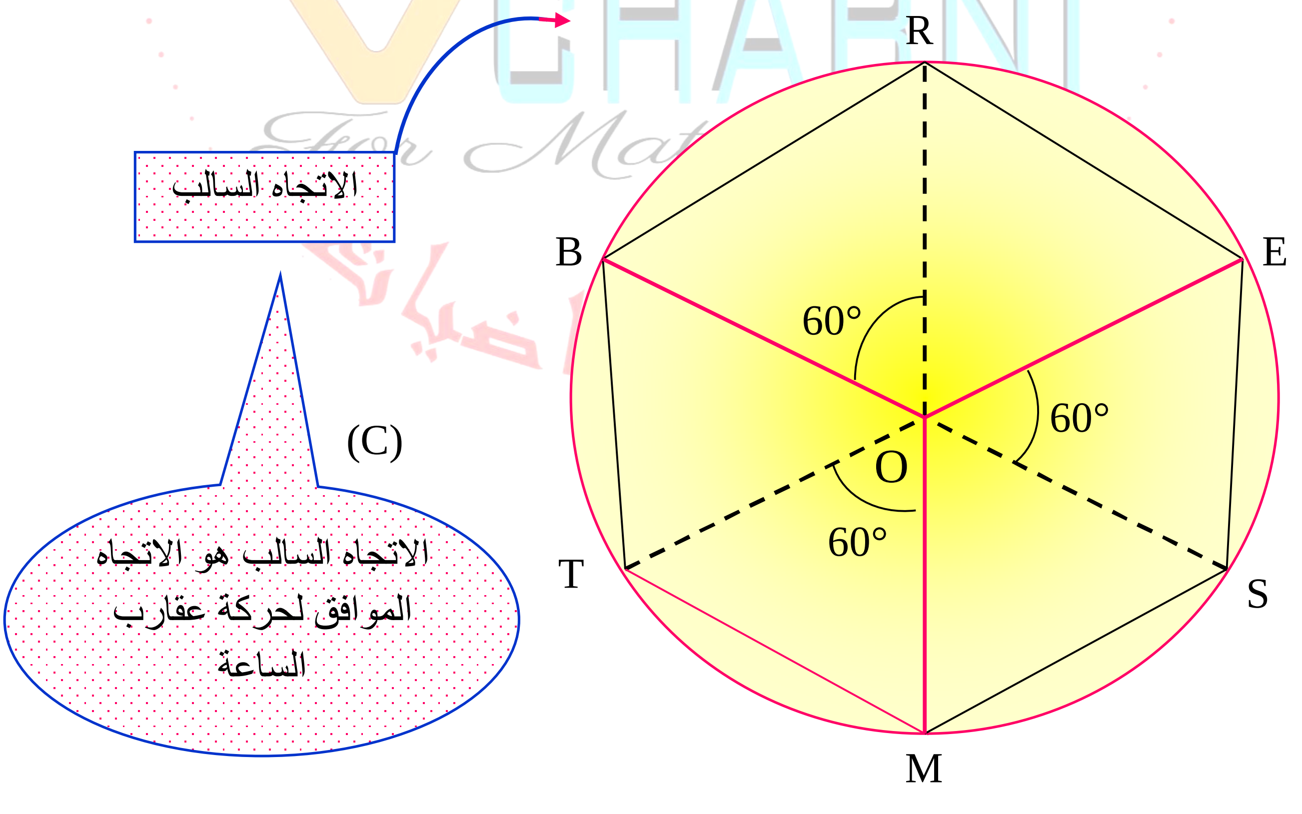
حيث : $OB = OR$ و $\widehat{BOR} = 60°$

صورة النقطة E بالدوران الذي مركزه O و زاويته $60°$ في الاتجاه السالب هي النقطة S

حيث : $OE = OS$ و $\widehat{EOS} = 60°$

صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه O و زاويته $60°$ في الاتجاه السالب هي النقطة T

حيث : $OM = OT$ و $\widehat{MOT} = 60°$



3) حساب قيس الزاوية $\widehat{BRE}$:

الدائرة (C) تشمل كل رؤوس المضلع $BRESMT$ فهي محيطة به، ينتج أن المضلع $BRESMT$ مضلعا منتظما

عدد أضلاع المضلع $BRESMT$ هو 6 إذن قيس الزاوية المركزية $\widehat{ROE}$ هو $\frac{\ ^{\circ}}{6}$

أي : $60°$ ، ينتج أن المثلث ROE متقايس الأضلاع و منه : $\widehat{ORE} = \widehat{OER} = 60°$

نستنتج أن : $\widehat{BRE} = 2 \times \widehat{ORE} = 2 \times 60°$

و بالتـــــــــــــــــــــــــالي : $\widehat{BRE} = 120°$

التمرين الرابع :

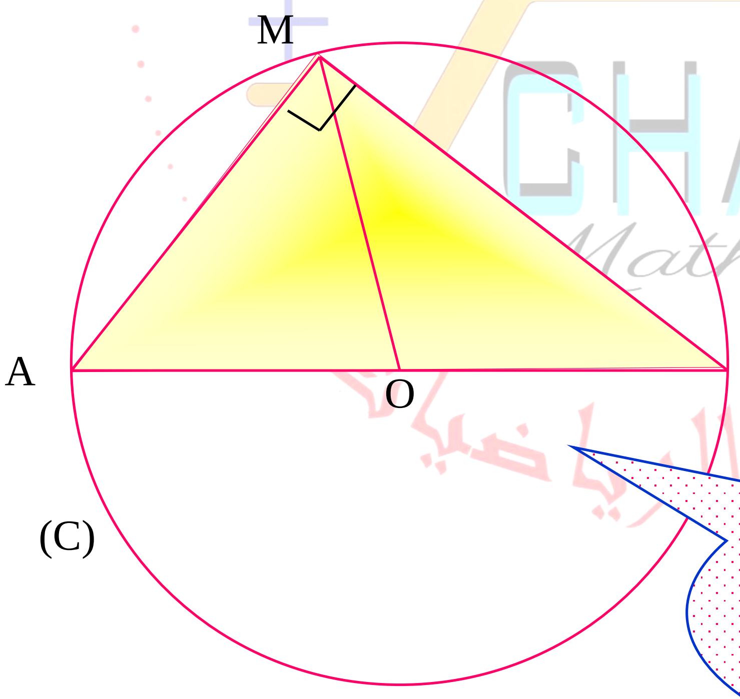
(C) دائرة مركزها O و قطرها $[AB]$ حيث : $AB = 6cm$ ، M نقطة من الدائرة حيث : $BM = 4{,}8cm$

1) بين أن المثلث AMB قائم في M

2) أحسب قيس الزاوية $\widehat{ABM}$ (بالتدوير إلى الوحدة)

$\Leftarrow$ استنتج قيس الزاوية $\widehat{AOM}$

الحل :



1) إثبات أن المثلث AMB قائم :

من الشكل لدينا $[AB]$ قطر للدائرة (C)

المحيطة بالمثلث AMB، نستنتج عندئذ

أن المثلث AMB قائم في M

إذا كان أحد أضلاع مثلث قطرا
للدائرة المحيطة به فإن هذا المثلث
قائم

2) حساب قيس الزاوية $\widehat{ABM}$ (بالتدوير إلى الوحدة) :

في المثلث القائم AMB

لدينا : $cos\widehat{ABM} = \frac{BM}{BA} = \frac{4,8}{6}$ و منه : $cos\widehat{ABM} = 0,8$

مستعملا الآلة الحاسبة، نضغط على اللمسات : $\boxed{0,8}$ $\boxed{cos^{-1}}$ $\boxed{2ndf}$

نجد : $\widehat{ABM} \approx 36,869°$

بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة نجــــــــــد $\widehat{ABM} = 37°$

$\Leftarrow$ استنتاج قيس الزاوية $\widehat{AOM}$

بما أن $\widehat{AOM}$ زاوية مركزية و $\widehat{ABM}$ زاوية محيطية و تحصران نفس القوس $\widehat{AB}$ نفسه فإن :

$\widehat{ABM} = \frac{1}{2}\widehat{AOM}$

و منه : $\widehat{AOM} = 2 \times \widehat{ABM}$

و منه : $\widehat{AOM} = 2 \times 37°$

و منه : $\widehat{AOM} = 74°$

التمرين الخامس :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ;\ I\ ;\ J)$

1) علم النقط $A(0;4)$ ، $B(-3;1)$ ، $C(5;-1)$

2) أحسب إحداثيتي النقطة E منتصف $[BC]$

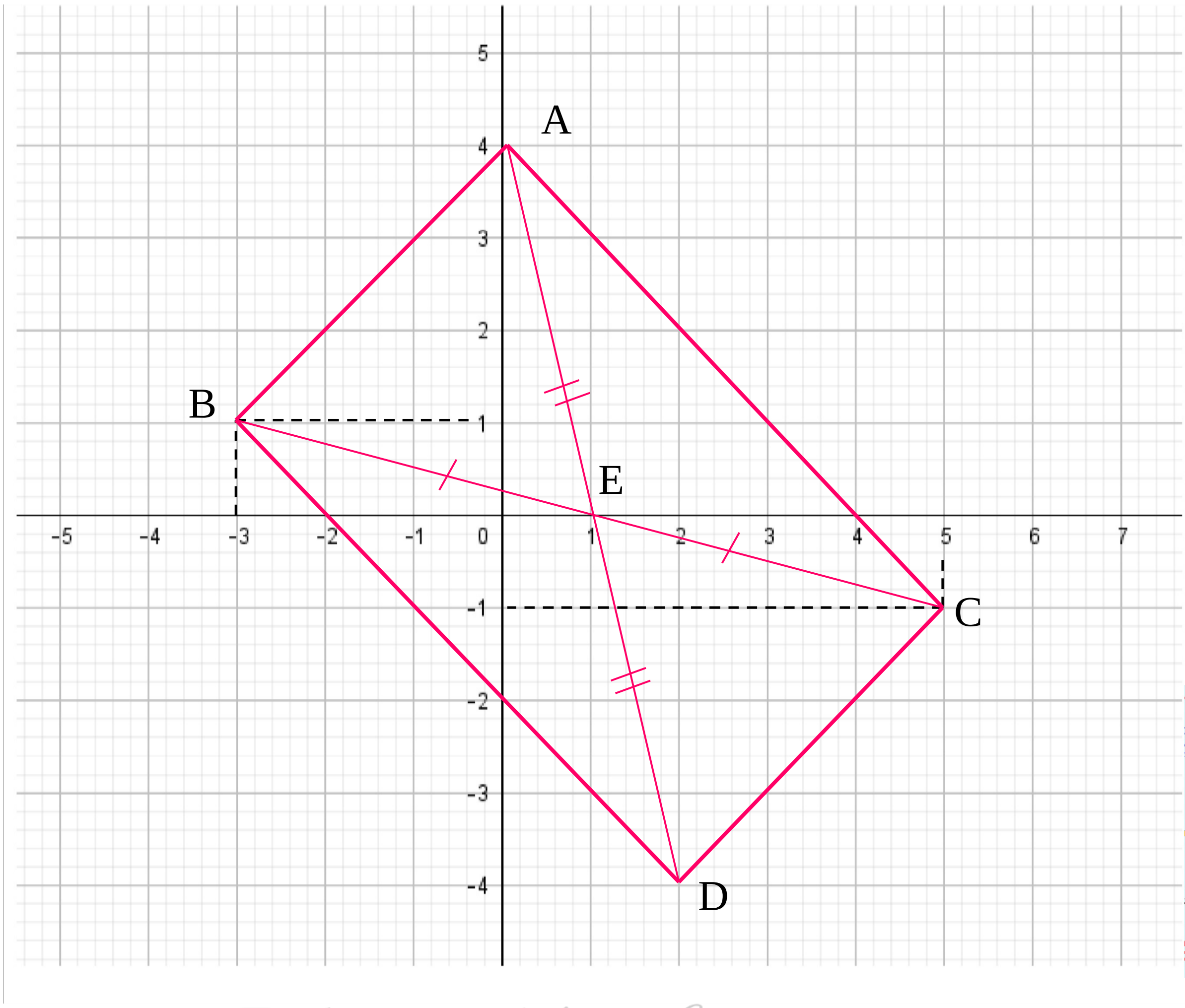
3) أنشئ النقطة D صورة A بالدوران الذي مركزه E و زاويته $180°$

$\Leftarrow$ استنتج إحداثيتي النقطة D

4) بين أن الرباعي $ABDC$ مستطيل

الحل :

1) تعليم النقط :



2) حساب إحداثيتي النقطة E منتصف $[BC]$:

لدينا : $E\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$ أي : $E\left(\frac{(-3)+5}{2};\frac{1+(-1)}{2}\right)$ و منـــــه : $E(1\,;0)$

3) إنشاء النقطة D صورة A بالدوران الذي مركزه E و زاويته $180°$:

D هي صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه E و زاويته $180°$ ، معناه أن النقطة D هي نظيرة A بالنسبة إلى E (أنظر الشكل أعلاه)

تذكير : الدوران الذي مركزه O و زاويته $180°$ هو التناظر المركزي بالنسبة إلى النقطة O

إحداثيتي النقطة D :

بما أن D هي صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه E و زاويته $180°$ فإن النقطتان A و D متناظرتان بالنسبة إلى E ، و منه : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ED}$

لدينا : $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix}$ و منه : $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-4 \end{pmatrix}$ نجـــــــد : $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

و لدينا : $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix} x_D - x_E \\ y_D - y_E \end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix} x_D - 1 \\ y_D - 0 \end{pmatrix}$

و بما أن $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ED}$ فإن : $x_D - 1 = 1$ و $y_D - 0 = -4$

و منـــــــــــه : $x_D = 2$ و $y_D = -4$

أي : $D(2\,;-4)$

ملاحظة : النقطتان A و D متناظرتان بالنسبة إلى النقطة E ما يعني أن النقطة E منتصف $[AD]$، و منه يمكن اعتماد طريقة حساب إحداثيتي منتصف قطعة مستقيم

4) لنبين بين أن الرباعي $ABDC$ مستطيل :

من نص التمرين لدينا E منتصف $[BC]$ ، و من الجواب السابق لدينا أيضا E منتصف $[AD]$ ، إذن قطرا الرباعي $ABDC$ متناصفان.
نستنتج أن الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع.

لنحسب طول القطرين $[AD]$ و $[BC]$:

لدينا : $AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$

و منه : $AD = \sqrt{(2-0)^2 + (-4-4)^2}$

و منه : $AD = \sqrt{(2)^2 + (-8)^2}$

و بالتالي : $AD = \sqrt{68} = \sqrt{4 \times 17}$ أي : $AD = 2\sqrt{17}$

و لدينا : $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

و منه : $BC = \sqrt{\left(5-(-3)\right)^2 + (-1-1)^2}$

و منه : $BC = \sqrt{(8)^2 + (-2)^2}$

و بالتالي : $BC = \sqrt{68}$ أي : $BC = 2\sqrt{17}$

وجدنا $AD = BC$.
نستنتج أن في متوازي الأضلاع $ABDC$ القطران $[AD]$ و $[BC]$ متناصفان و متقايسان، إذن هو مستطيل.

التمرين السادس :

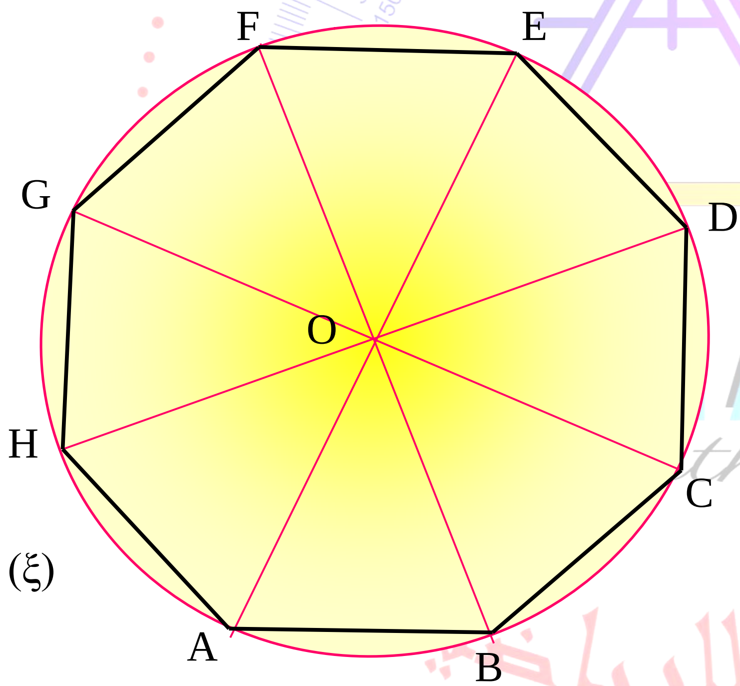
$ABCDEFGH$ ثماني منتظم، (ξ) دائرة محيطة به مركزها O و قطرها $8cm$

1) أحسب قيس الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$

2) أحسب طول ضلع هذا الثماني بالتدوير إلى الوحدة

3) جد صورة المثلث AOC بالدوران الذي مركزه O و زاويته $45°$ في الاتجاه الموجب؟

الحل :



1) حساب قيس الزاوية المركزية$\widehat{AOB}$

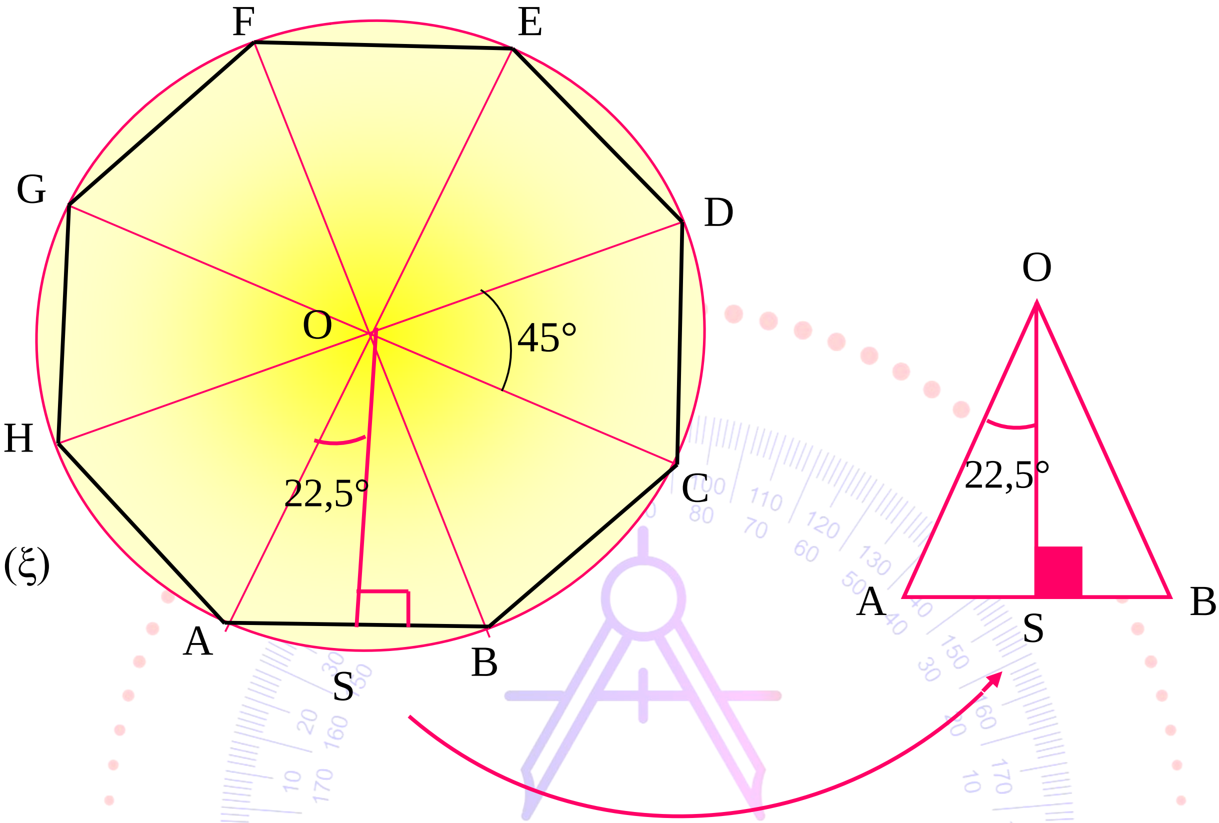
الزوايا المركزية في مضلع منتظم متقايسة.

و عدد أضلاع هذا المضلع هو 8

و منه : $\widehat{AOB} = \frac{^{\circ}}{8} = 45°$

إذن قيس الزاوية المركزية$\widehat{AOB}$هي $45°$

2) حساب طول ضلع هذا الثماني بالتدوير إلى الوحدة :



في المثلث المتساوي الساقين OAB، الارتفاع $[OS]$ المتعلق بالضلع $[AB]$ هو أيضا متوسط و منصف زاوية الرأس الأساسي، و منه S منتصف $[AB]$

و منـــــــه : $\widehat{SOA} = \frac{°}{2} = 22{,}5°$

في المثلث القائم SOA لدينا : $Sin\widehat{SOA} = \frac{AS}{OA} = \frac{AS}{4}$ (OA نصف قطر الدائرة)

من جهة أخرى لدينا : $Sin\widehat{SOA} = Sin22{,}5° \approx 0{,}38$

و منه : $\frac{AS}{4} = 0{,}38$ و بالتالي : $AS = 4 \times 0{,}38$ أي : $AS = 1{,}52$

وبما أن S منتصف $[AB]$ فإن : $AB = 2 \times AS = 2 \times 1{,}52$

نجـــــــد : $AB = 3{,}04cm$

بالتدوير إلى الوحدة نجد أن : $AB = 3cm$

و منه قيس كل ضلع هذا الثماني هو تقريبا $3cm$

3) صورة المثلث AOC بالدوران الذي مركزه O و زاويته $45°$ في الاتجاه الموجب :

صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه O و زاويته $45°$ في الاتجاه الموجب هي النقطة B لأن :

$OA = OB$ و $\widehat{AOB} = 45°$

صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه O و زاويته °45 في الاتجاه الموجب هي النقطة D لأن :
$\widehat{COD} = 45°$ و $OC = OD$
صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه O هي النقطة O نفسها
و بالتالي صورة المثلث AOC بالدوران الذي مركزه O و زاويته °45 في الاتجاه الموجب هي المثلث القائم BOD

لاحظ أن : $\widehat{BOD} = \widehat{BOC} + \widehat{COD} = 45° + 45° = 90°$