كتاب Epsilon في الرياضيات

للسنة الرابعة متوسط

← مواضيع اختبارات فصلية محلولة بالتفصيل ..

← مواضيع مقترحة لشهادة التعليم المتوسط..

← تمارين من اولمبياد الرياضيات الوطنية و الدولية محلولة بالتفصيل..

إعداد و تأليف : الأستاذ شابني حوسين

الطبعة جانفي 2024

مـقـدمـة

بسم الله الرحمان الرحيم و الصلاة و السلام على أشرف المرسلين و من تبعهم بإحسان إلى يوم الدين.. أمـــا بعـــد..

يسرنا أن نضع بين أدي تلاميذ السنة الرابعة متوسط هذا الكتاب المتواضع " إبسيلون في الرياضيات" و فق البرنامج المقرر من وزارة التربة الوطنية و الذي يحتوي على :

- مواضيع اختبارات فصلية محلولة بالتفصيل
- مواضيع مقترحة لشهادة التعليم المتوسط
- تمارين من أولمبياد الرياضيات الوطنية و الدولية محلولة بالتفصيل

و أملي من هذا العمل المتواضع أن يكون بذرة خير تزرع لتنمو، و أن يساعد تلاميذتنا على الاستيعاب و تنمية معارفهم لاجتياز شهادة التعليم المتوسط .

و في الأخير نسأل الله العلي القدير أن يكون هذا العمل مفتاح لتلاميذتنا الأعزاء ، مع أمانينا لهم بالنجاح و التوفيق في مشوارهم الدراسي..

الأستاذ : شابني حوسين

اختبارات فصلية

الفصل الأول

الموضوع الأول

التمرين الأول :

لتكن العبارة A و B حيث:

$$A = 7\sqrt{18} - 6\sqrt{50} + 3\sqrt{32} \quad ; \quad B = \frac{4}{2\sqrt{2}}$$

1) أكتب A على الشكل $a\sqrt{2}$ حيث a عدد طبيعي

2) نطق مقام النسبة B

3) بين أن : $A^2 - 9B^2 = 0$

التمرين الثاني :

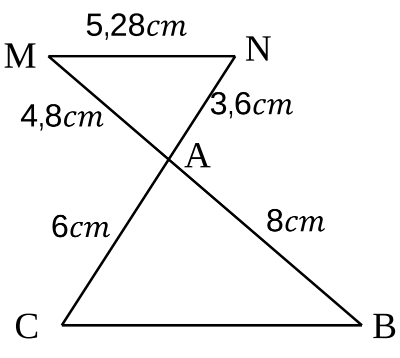
لتكن العبارة التالية : $E = (x-3)^2 + (x-3)(x+3)$

1) أنشر ثم بسط العبارة E

2) حلل العبارة E إلى جداء عاملين

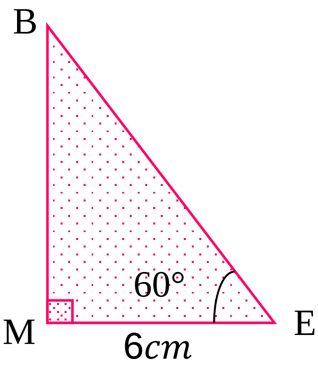
التمرين الثالث :

تمعن جيدا في الشكل :



1) بين أن : $(MN)//(BC)$

2) أحسب الطول BC



التمرين الرابع :

1) أحسب الطول BE

2) أحسب : $Sin\widehat{MBE}$

$\Leftarrow$ استنتج قيس الزاوية $\widehat{MBE}$

3) بين أن : $MB = 6\sqrt{3}cm$

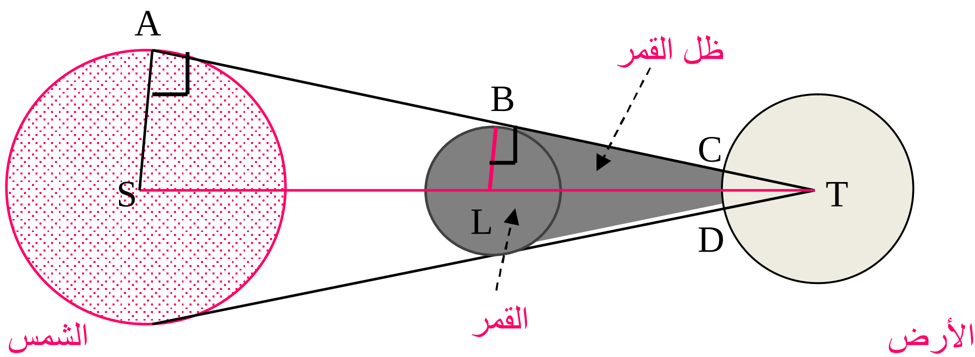
الوضعية الإدماجية :

الجزء الأول :

الكسوف هو ظاهرة تحجب فيها الشمس بمرور القمر بين الأرض و الشمس، و هي ظاهرة تحدث كل 6 أشهر، إلا أنها تلاحظ في أماكن معينة من الكرة الأرضية.

في 03 أكتوبر 2005 حدث كسوف كلي في الجزائر (كسوف حلقي)

إليك مخطط الكسوف :



إذا علمت أن :

نصف قطر الشمس هو $695000Km$ ، نصف قطر القمر هو $1736Km$ ، بعد مركز الشمس عن مركز الأرض هو $15 \times 10^7 Km$

$\Leftarrow$ أحسب بعد مركز القمر عن مركز الأرض

الجزء الثاني :

نصف قطر الكرة الأرضية هو $R = 6400Km$ ، و المسافة بين الأرض و الشمس تساوي $23400 \times R$ ، سرعة الضوء هي $300000Km/s$

أحسب بالثواني الزمن الذي يستغرقه الضوء لقطع المسافة بين الأرض و الشمس

الحل المفصل للموضوع الأول

حل التمرين الأول :

1) كتابة A عل الشكل $a\sqrt{2}$ حيث a عدد طبيعي :

$$A = 7\sqrt{18} - 6\sqrt{50} + 3\sqrt{32}$$
$$A = 7\sqrt{9 \times 2} - 6\sqrt{25 \times 2} + 3\sqrt{16 \times 2}$$
$$A = 7 \times 3\sqrt{2} - 6 \times 5\sqrt{2} + 3 \times 4\sqrt{2}$$
$$A = 21\sqrt{2} - 30\sqrt{2} + 12\sqrt{2}$$
$$A = (21 - 30 + 12)\sqrt{2}$$
$$A = 3\sqrt{2}$$

2) جعل مقام النسبة عددا ناطقا :

لجعل مقام النسبة $\frac{4}{2\sqrt{2}}$ عددا ناطقا نضرب كلا من البسط و المقام في $\sqrt{2}$

و منـــــــــه : $B = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{4\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2\times2} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$

3) نبين أن $A^2 - 9B^2 = 0$:

$$A^2 - 9B^2 = (3\sqrt{2})^2 - 9(\sqrt{2})^2$$
$$= 3^2 \times (\sqrt{2})^2 - 9 \times 2$$
$$= 9 \times 2 - 9 \times 2$$
$$= 18 - 18$$
$$= 0$$

إذن : $A^2 - 9B^2 = 0$

تذكير :

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

حل التمرين الثاني :

1) لننشر و نبسط العبارة E :

$$E = (x-3)^2 + (x-3)(x+3)$$
$$E = [x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2] + [x^2 - 3^2]$$
$$E = x^2 - 6x + 9 + x^2 - 9$$
$$E = 2x^2 - 6x$$

2) لنحلل العبارة E إلى جداء عامليn :

E مجموع جبري، فيه حدان هما $(x-3)^2$ و $(x-3)(x+3)$ و كل حد عبارة عن جداء عاملين هما $(x-3)(x-3)$ و $(x-3)(x+3)$ ، العامل المشترك هو $(x-3)$، نكتب :

$$E = (x-3)^2 + (x-3)(x+3)$$
$$E = (x-3)(x-3) + (x-3)(x+3)$$
$$E = (x-3)[(x-3) + (x+3)]$$
$$E = (x-3)(x-3+x+3)$$
$$E = (x-3)(2x)$$
$$E = 2x(x-3)$$

حل التمرين الثالث :

1) لنبين أن $(MN)//(BC)$:

لدينا : $\frac{AN}{AC} = \frac{3,6}{6} = 0,6$ و $\frac{AM}{AB} = \frac{4,8}{8} = 0,6$

يعني أن : $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ و بما أن النقط M، A، B و N، A، C على استقامة واحدة و بنفس الترتيب، فحسب النظرية العكسية لنظرية طالس فأن : $(MN)//(BC)$

2) لنحسب الطول BC :

و بما أن النقط M، A، B و N، A، C على استقامة واحدة و بنفس الترتيب و $(MN)//(BC)$، فحسب نظرية طالس لدينا : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = 0{,}6$

نحتفظ بالمساواة : $\frac{MN}{BC} = 0{,}6$ أي : $BC = \frac{MN}{0{,}6}$ و منه : $BC = \frac{5{,}28}{0{,}6}$

نجـــــــــــد : $BC = 8{,}8cm$

حل التمرين الرابع :

1) لنحسب الطول BE :

في المثلث القائم BEM لدينا : $Cos\widehat{BEM} = \frac{ME}{BE} = \frac{6}{BE}$

في المقابل لدينا $\widehat{BEM} = 60°$ و $Cos60° = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

إذن : $Cos\widehat{BEM} = Cos60° = \frac{1}{2} = \frac{6}{BE}$ ، من المساواة $\frac{1}{2} = \frac{6}{BE}$

نجـــــــــــد أن $BE = \frac{2\times 6}{1}$ و منـــــــه : $BE = 12cm$

2) لنحسب $Sin\widehat{MBE}$:

في المثلث القائم BEM لدينا : $Sin\widehat{MBE} = \frac{ME}{BE} = \frac{6}{12} = 0{,}5$

لإيجاد قيس الزاوية $\widehat{MBE}$ نستعمل الآلة الحاسبة بالضغط على اللمسات :

$2ndf$	Sin^{-1}	0,5

فنجـــــــــد : $\widehat{MBE} = 30°$

3) لنثبت أن $MB = 6\sqrt{3}cm$

نطبق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم BEM : $BE^2 = MB^2 + ME^2$

و منـــــــــــه : $MB^2 = BE^2 - ME^2$

و منـــــــــــه : $MB^2 = 12^2 - 6^2$

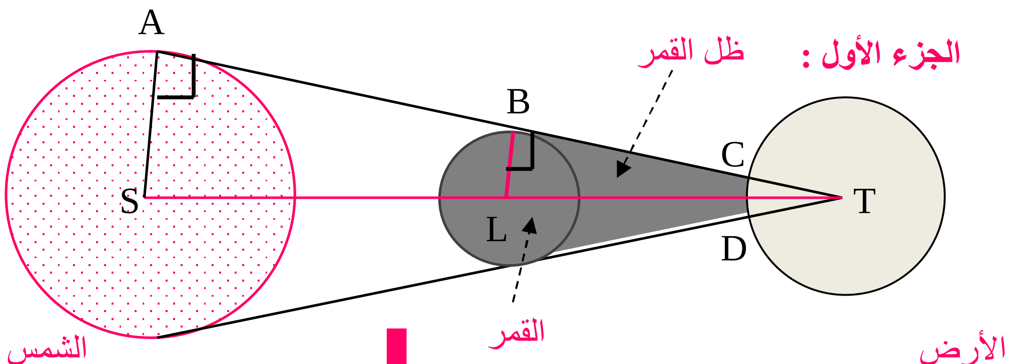
و بالتــــــــالي : $MB^2 = 144 - 36 = 108$

و منـــــــــــه : $MB = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = \sqrt{36} \times \sqrt{3}$

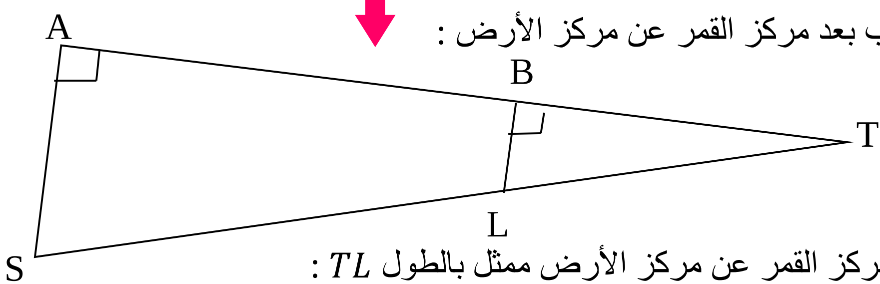
و منـــــــــه : $MB = 6\sqrt{3}cm$

حل الوضعية الإدماجية :

الجزء الأول :



حساب بعد مركز القمر عن مركز الأرض :



بعد مركز القمر عن مركز الأرض ممثل بالطول TL :

لنحسب الطول TL :

من المخطط لدينا : $(AT) \perp (BL)$ و $(AT) \perp (AS)$

معنــــــــــــــــــــاه : $(AS)//(BL)$

و بما أن النقط T، L، S و T، B، A على استقامة واحدة، إذن حسب نظرية طالس فإن :

$$\frac{TL}{TS}=\frac{TB}{TA}=\frac{BL}{AS}$$

حسب المعطيات الواردة في نص الوضعية لدينا :

نصف قطر الشمس هو $695000Km$ أي: $AS = 695000Km$

نصف قطر القمر هو $1736Km$ أي : $BL = 1736Km$

بعد مركز الشمس عن مركز الأرض هو $15 \times 10^7 Km$

أي : $TS = 15 \times 10^7 Km$

و منه : $\frac{1736}{695000}=\frac{TB}{TA}=\frac{TL}{15\times10^7}$ ، من المساواة $\frac{1736}{695000}=\frac{TL}{15\times10^7}$

نجـــــــــــــــد أن :

$TL=\frac{15\times10^7\times1736}{695000}$ و منـــــــــــه : $TL \approx 374676$

إذن بعد مركز الأرض عن مركز القمر هو تقريبا $374676Km$

الجزء الثاني :

حساب بالثواني الزمن الذي يستغرقه الضوء لقطع المسافة بين الأرض و الشمس :

المعطيات :

نصف قطر الكرة الأرضية هو $R = 6400Km$

المسافة بين الأرض و الشمس تساوي $23400 \times R$ ،

أي : $23400 \times R = 23400 \times 6400$

نجـــــــــد أن المسافة بين الأرض و الشمس تساوي 14976×10^4

سرعة الضوء هي $300000Km/s$

نترجم هذه الوضعية بجدول التناسبية التالي :

الزمن بالثواني	1	x
المسافة بـKm	300000	14976×10^4

و منـــــــــــــــه : $x = \frac{14976\times10^4}{300000}$ نجــــــــد : $x = 499{,}2$

إذن الزمن الذي يستغرقه الضوء لقطع المسافة بين الأرض و الشمس هو 499,2 ثانية.

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1) أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 420 و 175

2) أكتب الكسر $\frac{420}{175}$ عل شكل كسر غير قابل للاختزال

3) أحسب الفرق $\frac{420}{175} - \frac{17}{5}$

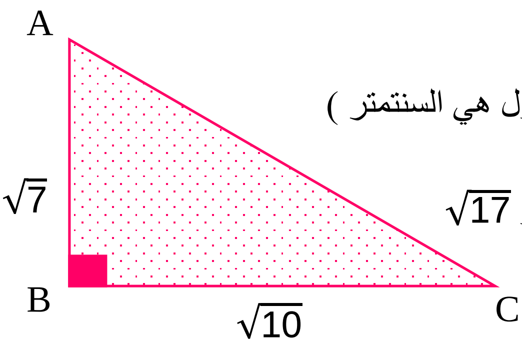
التمرين الثاني :

إليك العبارة E حيث : $E = 2x^2 - x - 80$

1) أحسب E من أجل : $x = \sqrt{45}$ ثم أكتب الناتج على الشكل $a + b\sqrt{5}$ حيث a و b عددين صحيحين

2) نطق مقام النسبة $\frac{3}{3-\sqrt{5}}$

التمرين الثالث :



المثلث ABC قائم في B (وحدة الطول هي السنتمتر)

1) أحسب الطول AC

2) قارن بين العددين $\sqrt{10} + \sqrt{7}$ و $\sqrt{17}$

التمرين الرابع :

الوحدة هي السنتمتر

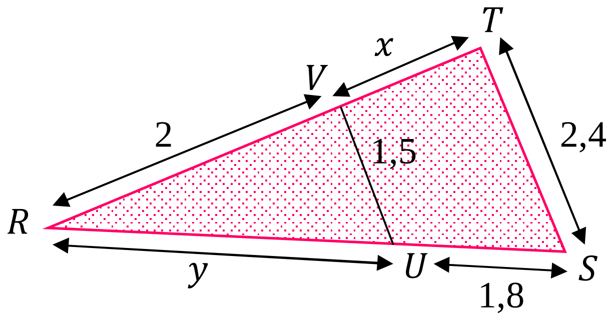
في الشكل المقابل، النقط R، U، S و R، V، T على استقامة واحدة و $(UV)//(ST)$

1) بين أن العدد x يحقق المعادلة $\frac{1{,}5}{2{,}4} = \frac{2}{2+x}$

$\Leftarrow$ استنتج الطول VT

2) بين أن العدد y يحقق المعادلة $1{,}5(y+1{,}8) = 2{,}4y$

$\Leftarrow$ استنتج الطول RU



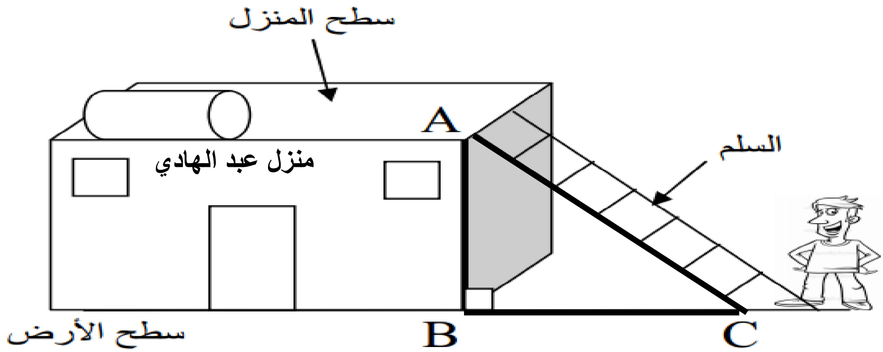
الوضعية الإدماجية :

الشكل المعطى يترجم وضعية التلميذ عبد الهادي استعمل سلما لصعود سقف المنزل من أجل تنظيف صهريج الماء علما أن :

$$BC = \sqrt{3}cm \;;\; AC = 2\sqrt{7}cm$$

1) بين أن ارتفاع الجدار $AB = 5cm$

2) أوجد ظل tan زاوية الصعود ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{ACB}$ بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة



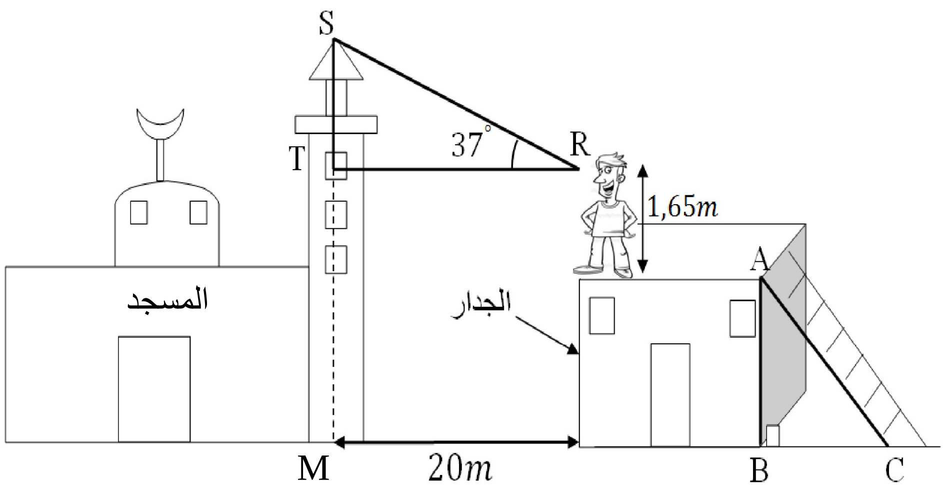
3) بعد الانتهاء من تنظيف وقف عبد الهادي على جدار منزله ينظر إلى أعلى مئذنة المسجد المقابل للمنزل متسائلا عن ارتفاعها عن سطح الأرض، فإذا علمت أن :

⇐ قيس زاوية رؤية عبد الهادي لأعلى المئذنة هي $37°$

⇐ بعد المئذنة عن الجدار الواقف عليه عبد الهادي هو $20m$

⇐ ارتفاع عيني عبد الهادي عن سقف المنزل هو $1,65m$

أحسب SM ارتفاع هذه المئذنة عن سطح الأرض مدورا إلى الوحدة



الحل المفصل للموضوع الثاني

التمرين الأول :

1) لنحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 420 و 175 :

نحسب $(420\ ;175)\ PGCD$ مستعملا خوارزمية إقليدس :

a	b	الباقي r
420	175	70
175	70	35
70	35	0

$420 = 175 \times 2 + 70$

$175 = 70 \times 2 + 35$

$70 = 35 \times 2 + 0$

أخر باقي غير معدوم هو 35، و بالتالي : $PGCD(420\,;175) = 35$

2) كتابة الكسر $\frac{420}{175}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال :

$$\frac{420}{175} = \frac{420 \div 35}{175 \div 35} = \frac{12}{5}$$

تذكير : لكتابة كسر على الشكل غير القابل للاختزال، نقسم كلا من بسطه و مقامه على القاسم المشترك

3) حساب الفرق $\frac{420}{175} - \frac{17}{5}$:

$$\frac{17}{5} - \frac{420}{175} = \frac{17}{5} - \frac{420 \div 35}{175 \div 35} = \frac{17}{5} - \frac{12}{5} = \frac{17-12}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

التمرين الثاني :

1) حساب E من أجل $x = \sqrt{45}$:

$$E = 2x^2 - x - 80 = 2\left(\sqrt{45}\right)^2 - \sqrt{45} - 80$$
$$= 2 \times 45 - \sqrt{9 \times 5} - 80$$
$$= 90 - \sqrt{9} \times \sqrt{5} - 80$$
$$= (90 - 80) - 3\sqrt{5}$$
$$= 10 - 3\sqrt{5}$$

إذن من أجل $x = \sqrt{45}$ نجـــــــد أن : $E = 10 - 3\sqrt{5}$

2) جعل مقام النسبة $\frac{3}{3-\sqrt{5}}$ عدد ناطقا :

لجعل مقام النسبة $\frac{3}{3-\sqrt{5}}$ عددا ناطقا نضرب حدي الكسر في مرافق المقام، أي في $(3 + \sqrt{5})$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$\frac{3}{3-\sqrt{5}}=\frac{3\times(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$

$$=\frac{9+3\sqrt{5}}{3^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{9+3\sqrt{5}}{9-5}=\frac{9+3\sqrt{5}}{4}$$

التمرين الثالث :

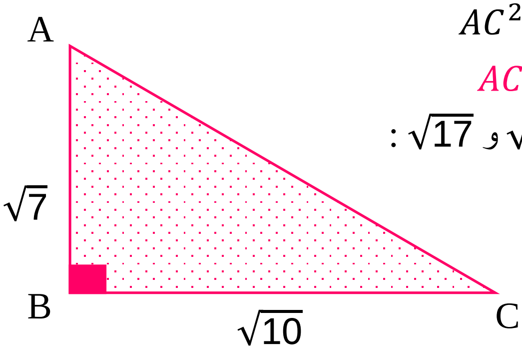
1) حساب AC :

المثلث ABC قائم في B، حسب نظرية فيثاغورث فإن : $AC^2=BC^2+AB^2$

و منه : $AC^2=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{7})^2$ و منه : $AC^2=10+7$

و منـــــــــــــه : $AC^2=17$

و منـــــــــــــه : $AC=\sqrt{17}cm$



2) لنقارن بين العددين $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ و $\sqrt{17}$:

في المثلث ABC

لدينا : $AC<AB+BC$

و منه : $\sqrt{17}<\sqrt{7}+\sqrt{10}$

تذكير : في مثلث، طول كل ضلع أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين.

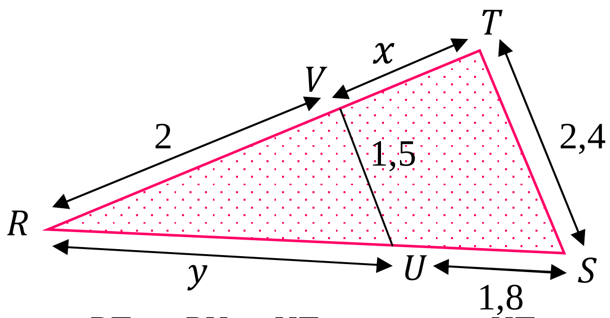
التمرين الرابع :

1) لنبين أن العدد x يحقق المعادلة $\frac{1,5}{2,4}=\frac{2}{2+x}$:

بما أن النقط R، U، S و R، V، T على استقامة

واحدة و بنفس الترتيب و $(UV)//(ST)$ ، فحسب نظرية طالس

: $\frac{UV}{TS}=\frac{RU}{RS}=\frac{RV}{RT}$



نحتفظ بالمساواة : $\frac{RV}{RT} = \frac{UV}{TS}$

x هو طول الضلع $[VT]$، أي : $x = VT$ و $RT = RV + VT$

أي : $RT = 2 + x$

و منـــــــــــــــــه تصبح المساواة : $\frac{1,5}{2,4} = \frac{2}{2+x}$ و هو المطلوب

لنستنتج الطول VT :

من المساواة السابقة نجـــــــد : $1,5(2 + x) = 2 \times 2,4$

و منـــــــــــــــــه : $3 + 1,5x = 4,8$

و منـــــــــــــــه : $1,5x = 4,8 - 3$ نجـــــــد : $x = 1,2cm$

إذن طول الضلع $[VT]$ هو $1,2cm$

2) لنبين أن y يحقق المعادلة $1,5(y + 1,8) = 2,4y$

y هو طول الضلع $[RU]$ أي : $y = RU$ ، و $RS = RU + US$

أي : $RS = y + 1,8$

من المساواة $\frac{UV}{TS} = \frac{RU}{RS}$ نجـــــــــــــــد : $\frac{1,5}{2,4} = \frac{y}{y+1,8}$

و منــــــــــه ينتـــــــــــج أن : $1,5(y + 1,8) = 2,4y$

لنستنتج الطول RU :

لنحل المعادلة $1,5(y + 1,8) = 2,4y$:

الجداءان المتصالبان
متساويان في كسر

$1,5(y + 1,8) = 2,4y$ معناه : $1,5y + 2,7 = 2,4y$

معناه : $1,5y - 2,4y = -2,7$

معناه : $-0,9y = -2,7$ معناه : $y = \frac{-2,7}{-0,9}$ أي : $y = 3$

إذن طول الضلع $[RU]$ هو $3cm$

حل الوضعية الإدماجية :

1) لنتثبت أن ارتفاع الجدار $AB = 5cm$:

المثلث ABC قائم في النقطة B، إذن حسب نظرية فيثاغورث لدينا :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

و منه : $AB^2 = AC^2 - BC^2$ أي : $AB^2 = (2\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2$

أي : $AB^2 = 2^2 \times (\sqrt{7})^2 - 3$ أي : $AB^2 = 4 \times 7 - 3 = 25$

و منه : $AB^2 = \sqrt{25} = 5$

إذن ارتفاع الجدار يساوي $5cm$

2) لنبحث عن ظل tan زاوية الصعود :

زاوية صعود عبد الهادي إلى سقف المنزل هي الزاوية $\widehat{ACB}$ ، و في المثلث القائم ABC لدينا :

$tan\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{\sqrt{3}}$ و منه : $tan\widehat{ACB} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

قيس الزاوية $\widehat{ACB}$:

لدينا : $tan\widehat{ACB} = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 1,9$

لإيجاد قيس الزاوية $\widehat{ACB}$ نستعمل الألة الحاسبة و بالضغط على اللمسات :

$1,9$	tan^{-1}	$2ndf$

نجد أن $\widehat{ACB} \approx 62,24°$ ، بالتدوير إلى الوحدة نجد : $\widehat{ACB} = 62°$

3) حساب SM ارتفاع المئذنة عن سطح الأرض :

لدينا : $SM = ST + 1,65 + AB$ و منه : $SM = ST + 1,65 + 5$

أي : $SM = ST + 6,65$

لنحسب الطول ST :

المثلث RST قائم في T، إذن لدينا : $tan\widehat{SRT} = \frac{ST}{RT}$

بعد المئذنة عن الجدار الواقف عليه عبد الهادي هو $20m$ معناه أن :

$RT = 20m$

زاوية رؤية عبد الهادي لأعلى المئذنة هي $37°$ معناه أن : $\widehat{SRT} = 37°$ و

$tan37° \approx 0,75$

إذن : $tan\widehat{SRT} = tan37° \approx 0,75 = \frac{ST}{RT} = \frac{ST}{20}$

و منه : $ST = 0,75 \times 20$ نجـــــد : $ST = 15$

إذن : $SM = 15 + 6,65$ نجـــــد : $SM = 21,65$

بالتدوير إلى الوحدة ارتفاع المئذنة عن سطح الأرض يكون فيه $22m$

الموضوع الثالث

التمرين الأول :

نضع :

$$A = \frac{1}{3} + \frac{14}{3} \div \frac{35}{12} \; ; \; B = \frac{81 \times 10^{-5} \times 10 \times (10^2)^3}{4 \times 10^4} \; ; \; C = \frac{462}{64}$$

1) أحسب العدد A و أكتب الناتج على شكل كسر غير قابل للاختزال

2) أحسب العدد B و أعط الكتابة العلمية له

3) أحسب $PGCD(462\,;64)$

$\Leftarrow$ ماذا تستنتج بالنسبة للكسر C؟

التمرين الثاني :

ليكن العددان الحقيقيان x و y حيث :

$$x = (\sqrt{6} + 3)(4 - \sqrt{6}) \quad ; \quad y = \sqrt{96} + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{24} - \sqrt{36}$$

1) أكتب كلا من العددين x و y على الشكل $a\sqrt{6} + b$ بحيث a و b عددان نسبيان

2) بين أن $x \times y + 30 = 0$

3) أجعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{6}-6}{\sqrt{6}}$ عددا ناطقا

التمرين الثالث :

1) أنشر و بسط العبارة E حيث : $E = (x + 2)(2x - 1)$

2) حلل العبارة F إلى جداء عاملين حيث :

$$F = 2x^2 + 3x - 2 - (2x - 1)(-6 - 2x)$$

3) حل المعادلة $F = 0$

التمرين الرابع :

BEM مثلث قائم في B حيث : $BE = (\sqrt{3} + 2)cm \quad ; \quad BM = 2\sqrt{3}cm$

1) أحسب الطول ME

2) لتكن الدائرة (C) محيطة بالمثلث BEM. أحسب مساحة القرص الذي تحيط به الدائرة (C) مدورا النتيجة إلى 0,1

الوضعية الإدماجية :

يملك محمد قطعة أرضية مستطيلة الشكل بعداها هما $MA = 200m$ و $MH = 150m$، تنازل عن الجزء DTC مقابل مبلغ مالي للبلدية (أنظر الشكل) لتشق طريقا موازيا لقطر القطعة الأرضية $[AH]$

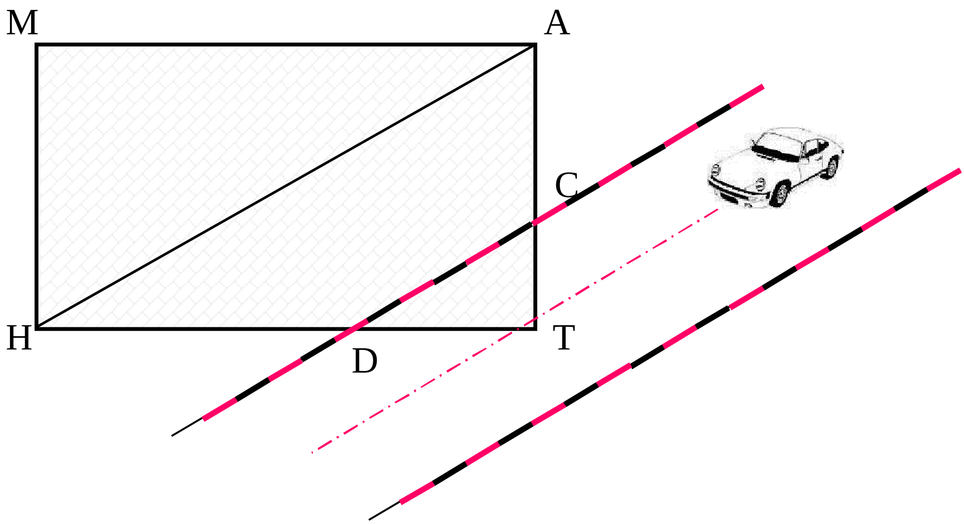
1) إذا علمت أن $TD = 50m$، أحسب الطول AH ثم أحسب الطول DC

2) أراد محمد أن يحيط بالقطعة الأرضية بعد تنازله للجزء DTC بسياج سعر المتر فيه 650دج

⇐ أحسب تكلفة السياج

3) يقف محمد في النقطة A مشاهدا في نفس الوقت الشجرتين المغروستين في النقطتين M و H

⇐ جد قيس الزاوية $\widehat{MAH}$ بالتدوير إلى الوحدة



الحل المفصل للموضوع الثالث

حل التمرين الأول :

1) لنحسب العدد A :

الأولوية للقسمة

$$A = \frac{1}{3} + \frac{14}{3} \div \frac{35}{12} = \frac{1}{3} + \frac{14}{3} \times \frac{12}{35}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$A = \frac{1}{3} + \frac{14 \times 12}{3 \times 35} = \frac{1}{3} + \frac{168}{105}$$

$$A = \frac{1 \times 35}{3 \times 35} + \frac{168}{105} = \frac{35}{105} + \frac{168}{105}$$

أصغر مقام المشترك هو 35

$$A = \frac{203}{105}$$

اختزال الناتج : لدينا $7 \times 29 = 203$ و $7 \times 15 = 105$ و منه :

$$A = \frac{203}{105} = \frac{29 \times 7}{15 \times 7} = \frac{29}{15}$$

في الضرب الاختزال مسموح، لذا نختزل هذا الكسر على 7

2) حساب العدد B :

$$B = \frac{81 \times 10^{-5} \times 10 \times (10^2)^3}{4 \times 10^4}$$

$$B = \frac{81 \times (10^{-5} \times 10^1) \times 10^{2\times3}}{4 \times 10^4}$$

$$B = \frac{81 \times 10^{-5+1} \times 10^6}{4 \times 10^4}$$

$$B = \frac{81 \times 10^{-4} \times 10^6}{4 \times 10^4}$$

$$B = \frac{81 \times 10^{-4+6}}{4 \times 10^4}$$

$$B = \frac{81 \times 10^2}{4 \times 10^4}$$

$$B = \frac{81}{4} \times \frac{10^2}{10^4}$$

$$B = 20{,}25 \times 10^2 \times 10^{-4}$$

$$B = 20{,}25 \times 10^{-2}$$

تذكير :

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$$

$$(10^m)^n = 10^{m\times n}$$

$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$

هذه القوة تصعد إلى البسط
مع تغير في إشارة أسها

الكتابة العلمية للعدد B :

تذكير : نعني بكتابة علمية لعدد عشري كتابته على الشكل $a \times 10^n$ حيث a عدد عشري مكتوب برقم واحد غير معدوم قبل الفاصلة و n عدد صحيح نسبي.

لدينا : $20{,}25 = 2{,}025 \times 10 = 2{,}025 \times 10^1$

و منه يكون العدد : $B = 20{,}25 \times 10^{-2} = 2{,}025 \times 10^1 \times 10^{-2}$

فنجــــــــــد أن : $B = 2{,}025 \times 10^{-1}$

الكتابة العلمية للعدد B هي $2{,}025 \times 10^{-1}$

3) لنحسب $PGCD(462\,;64)$

مستعملا خوارزمية القسمات المتتابعة (خوارزمية إقليدس) :

$$462 = 64 \times 7 + 14$$
$$64 = 14 \times 4 + 8$$
$$14 = 8 \times 1 + 6$$
$$8 = 6 \times 1 + 2$$
$$6 = 2 \times 3 + 0$$

a	b	الباقي r
462	64	14
64	14	8
14	8	6
8	6	2
6	2	0

أخر باقي غير معدوم هو 2 و منه : $PGCD(462\,;64) = 2$

وجدنا أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 462 و 64 يساوي 2، معناه أن العددين 462 و 64 غير أوليان فيما بينهما، ما يعني أن الكسر $\frac{462}{64}$ قابل للاختزال.

$$\frac{462}{64} = \frac{462 \div 2}{64 \div 2} = \frac{231}{32}$$

التمرين الثاني :

1) كتابة كلا من العددين x و y على الشكل $a\sqrt{6} + b$ بحيث a و b عددان نسبيان :

$$x = (\sqrt{6} + 3)(4 - \sqrt{6}) = \sqrt{6}(4 - \sqrt{6}) + 3(4 - \sqrt{6})$$
$$x = 4\sqrt{6} - (\sqrt{6})^2 + 12 - 3\sqrt{6}$$
$$x = (4 - 3)\sqrt{6} - 6 + 12$$
$$x = \sqrt{6} + 6$$

$$m\sqrt{a} \times n\sqrt{b} = m \times n \times \sqrt{ab}$$

$y = \sqrt{96} + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{24} - \sqrt{36}$

$y = \sqrt{16 \times 6} + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{4 \times 6} - 6$

$y = 4\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 6\sqrt{6} - 6$

$y = (4 + 3 - 6)\sqrt{6} - 6$

$y = \sqrt{6} - 6$

2) لنبين أن $x \times y + 30 = 0$

$$x \times y + 30 = (\sqrt{6} + 6)(\sqrt{6} - 6) + 30$$
$$= (\sqrt{6})^2 - (6)^2 + 30$$
$$= 6 - 36 + 30$$
$$= 0$$

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

3) لنجعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{6}-6}{\sqrt{6}}$ عددا ناطقا

للتخلص من الجذر في المقام نضرب حدي هذا الكسر في $\sqrt{6}$

$$\frac{\sqrt{6} - 6}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} \times (\sqrt{6} - 6)}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{6})^2 - 6\sqrt{6}}{6} = \frac{6 - 6\sqrt{6}}{6}$$

التمرين الثالث :

1) لننشر ونبسط العبارة E :

$E = (x + 2)(2x - 1)$

$E = 2x^2 - x + 4x - 2$

$E = 2x^2 + 3x - 2$

نستعمل الخاصية التوزيعية

2) لنحلل العبارة F :

$F = 2x^2 + 3x - 2 - (2x - 1)(-6 - 2x)$

لدينا مما سبق : $2x^2 + 3x - 2 = (x + 2)(2x - 1)$

و منه تصبح العبارة F من الشكل :

$$F = \underbrace{(x+2)(2x-1)}_{\boxed{\text{الحد الأول}}} - \underbrace{(2x-1)(-6-2x)}_{\boxed{\text{الحد الثاني}}}$$

العبارة F هي مجموع جبري فيه حدان، و كل حد عبارة عن جداء عاملين، و بملاحظة أن $(2x-1)$ هو العامل المشترك، نكتب :

$$F = (x+2)(2x-1) - (2x-1)(-6-2x)$$
$$F = (2x-1)[(x+2)-(-6-2x)]$$
$$F = (2x-1)(x+2+6+2x)$$
$$F = (2x-1)(3x+8)$$

3) لنحل المعادلة $F = 0$:

حل المعادلة $F = 0$ يؤول إلى حل المعادلة $(2x-1)(3x+8) = 0$

ينتج من المعادلة $(2x-1)(3x+8) = 0$

أن $2x - 1 = 0$ أو $3x + 8 = 0$

$2x - 1 = 0$ معنـــــــــــــاه : $x = \frac{1}{2}$

$3x + 8 = 0$ معنـــــــــــــاه : $x = -\frac{8}{3}$

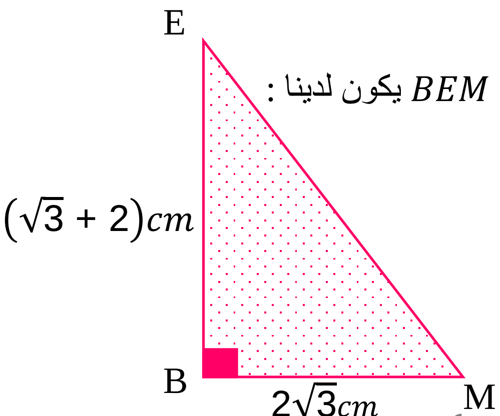
إذن للمعادلة $F = 0$ حلان هـــــــــــــمـا : $\frac{1}{2}$ و $-\frac{8}{3}$

التمرين الرابع :

1) حساب الطول ME :

بتطبيق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم BEM يكون لدينا :

$$ME^2 = BM^2 + BE^2$$



و منه : $ME^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}+2\right)^2$

و منه : $ME^2 = 2^2 \times \sqrt{3}^2 + \left(\sqrt{3}^2 + 2 \times 2\sqrt{3} + 2^2\right)$

و منه : $ME^2 = 4 \times 3 + 3 + 4\sqrt{3} + 4$

و منه : $ME^2 = 19 + 4\sqrt{3}$

و منه : $ME = \sqrt{19 + 4\sqrt{3}}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a \times b)^n = a^n \times b^n$

إذن طول الضلع ME يساوي $\left(\sqrt{19+4\sqrt{3}}\right) cm$

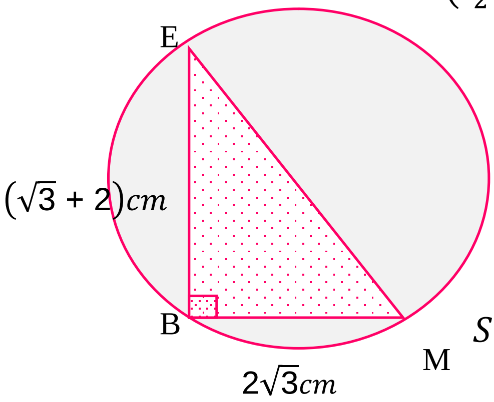
2) حساب مساحة القرص الذي تحيط به الدائرة (C) :

الدائرة (C) محيطة بالمثلث القائم BEM، ينتج أن الضلع $[ME]$ هو قطر للدائرة (C) و مركزها هو منتصف هذا الضلع.

تذكير : مساحة القرص تساوي جداء العدد π و مربع طول نصف قطر هذا القرص

نصف قطر هذا القرص هو نصف قطر الدائرة (C) أي $\frac{ME}{2} = \frac{\sqrt{19+4\sqrt{3}}}{2}$

لتكن S مساحة هذا القرص، نجد : $S = \pi \times \left(\frac{ME}{2}\right)^2$



و منه : $S = 3{,}14 \times \left(\frac{\sqrt{19+4\sqrt{3}}}{2}\right)^2$

و منه : $S = 3{,}14 \times \frac{\left(\sqrt{19+4\sqrt{3}}\right)^2}{2^2}$

و منه : $S = 3{,}14 \times \frac{19+4\sqrt{3}}{4}$

و منه : $S = \frac{3{,}14\left(19+4\sqrt{3}\right)}{4} \approx 20{,}35$

بالتدوير إلى 0,1 نجد : $S = 20{,}4 cm^2$

حل الوضعية الإدماجية :

1) حساب الطول AH :

$[AH]$ هو قطر المستطيل $MATH$ و عليه فهو وتر للمثلث القائم MAH،

و بتطبيق نظرية فيثاغورث في هذا المثلث نجد : $AH^2 = AM^2 + MH^2$

و منـــــــــــــــه : $AH^2 = (200)^2 + (150)^2$

و منـــــــــــــــه : $AH^2 = 40000 + 22500$

و منـــــــــــــــه : $AH^2 = 62500$ و منـــــــه : $AH = \sqrt{62500}$

نجـــــــــــــــد : $AH = 250m$

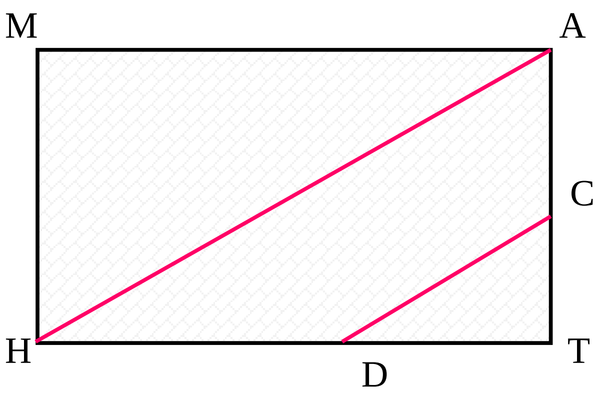
إذن الطول AH يساوي $250m$

لنحسب الطول DC :

الطريق موازٍ لقطر القطعة الأرضية، معناه أن $(CD)//(AH)$

و بما أن النقطة T، C، A و T،D ، H على استقامة واحدة و بنفس الترتيب،

فحسب نظرية طالس $\frac{CD}{AH} = \frac{TD}{TH} = \frac{TC}{TA}$



نحتفظ بالمساواة $\frac{CD}{AH} = \frac{TD}{TH}$

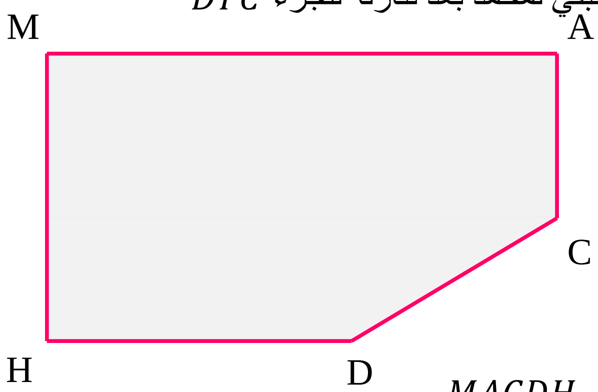
و منه : $\frac{CD}{250} = \frac{50}{200}$

و منه : $CD = \frac{250\times50}{200}$

نجـــــد : $CD = 62{,}5m$

2) حساب تكلفة السياج :

تكلفة السياج تساوي جداء محيط القطعة و سعر المتر الواحد من السياج، الشكل المقابل يمثل الجزء المتبقي لمحمد بعد تنازله للجزء DTC



ليكن P محيط الخماسي $MACDH$

$$P = MH + HD + DC + CA + MA$$

معنـــــاه : $P = 150 + HD + 62{,}5 + CA + 200$

في المقابل لدينا : $HD = TH - TD$ أي : $HD = 200 - 50$

فنجـــــــد : $HD = 150m$

يصبح $P = 150 + 150 + 62{,}5 + CA + 200$

من جهة أخرى لدينا مما سبق (حسب الجواب الأول) أن : $\frac{CD}{AH} = \frac{TD}{TH} = \frac{TC}{TA}$

و منه : $\frac{TD}{TH} = \frac{TC}{TA}$ أي : $\frac{50}{200} = \frac{TC}{150}$ و منه : $TC = \frac{150\times 50}{200}$

نجـــــــــد : $TC = 37{,}5m$

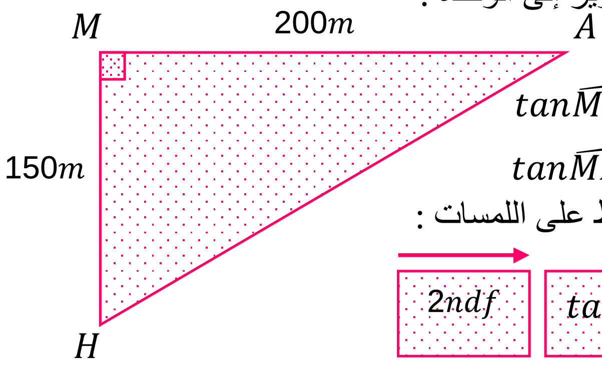
لكن : $CA = TA - TC$ أي : $CA = 150 - 37{,}5$ فنجد : $CA = 112{,}5$

إذن : $P = 150 + 150 + 62{,}5 + 112{,}5 + 200$

و منـــــه : $P = 675m$

إذن تكلفة السياج هي $438750 = 650 \times 675$ أي : 438750دج

3) قيس الزاوية $\widehat{MAH}$ بالتدوير إلى الوحدة :



في المثلث القائم MAH

لديـــنا : $tan\widehat{MAH} = \frac{MH}{MA} = \frac{150}{200}$

و منـــــــه : $tan\widehat{MAH} = 0{,}75$

باستعمال الآلة الحاسبة نضغط على اللمسات :

$\boxed{2ndf} \rightarrow \boxed{tan^{-1}} \quad \boxed{0{,}75}$

فنجد : $\widehat{MAH} \approx 36{,}869°$

بالتدوير إلى الوحدة نجد أن : $\widehat{MAH} = 37°$

الموضوع الرابع

التمرين الأول :

1) أحسب $(480\,;320\,;160)$ $PGCD$ مستعملا خوارزمية الفروق المتتابعة

2) أكتب النسبة $\frac{480}{320}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال بطريقتين مختلفتين

3) لدى بائع الزهور 480 وردة حمراء، 320 وردة بيضاء و 160 وردة صفراء، يريد أن يشكل أكبر عدد من الباقات متماثلة من حيث عدد الورود من كل لون

⇐ ما هو أكبر عدد من الباقات التي يمكن تشكيلها؟

⇐ ما هو عدد الورود لكل نوع التي تكون في كل باقة؟

التمرين الثاني :

لتكن العبارة G حيث : $G = (n+1)^2 - (n-1)^2$

1) أنشر و بسط العبارة G

2) حلل العبارة G

3) دون استعمال الآلة الحاسبة، أحسب العدد $101^2 - 99^2$

التمرين الثالث :

1) حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المعادلتين ذات المجهول x

$$x - 1 = \sqrt{7} - x\sqrt{7} \quad ; \quad (x+1)^2 = 4$$

2) $MATH$ مربع طول ضلعه xcm ، إذا أنقصنا من طول ضلعه $6cm$ نحصل على مربع مساحته $324cm^2$.

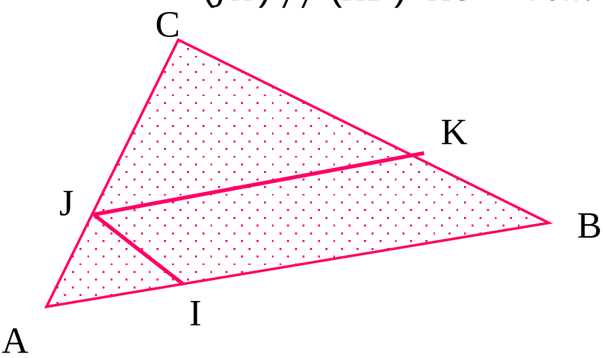
⇐ ما هو طول ضلع المربع $MATH$ ؟

التمرين الرابع :

إليك الشكل المقابل، حيث النقط : $AI = \frac{2}{7}AB$ و $I \in [AB]$

و $K\epsilon[BC]$، $IJ // BC$ و$J\epsilon[AC]$

$BC = 8cm$ ، $AC = 7cm$ ، $(JK) // (AB)$



1) بين أن $AJ = \frac{2}{7}AC$

⇐ استنتج الطول AJ

2) بين أن $CK = \frac{5}{7}BC$

⇐ استنتج الطول CK

الوضعية الإدماجية :

تعتبر دقلة نور من أجود التمور التي تنتجها الجزائر في العالم، و هي متواجدة بكثرة في ولاية بسكرة، أين قام أمين بزيارة أحد الحقول و هو متجولا رأى أحدى الأشجار مائلة كما هي موضحة في الشكل.

تميل هذه النخلة مشكلة مع سطح الأرض زاوية قدرها $70°$، عندما تقع عليها أشعة الشمس العمودية يكون طول ظل النخلة على الأرض $BC = 6m$

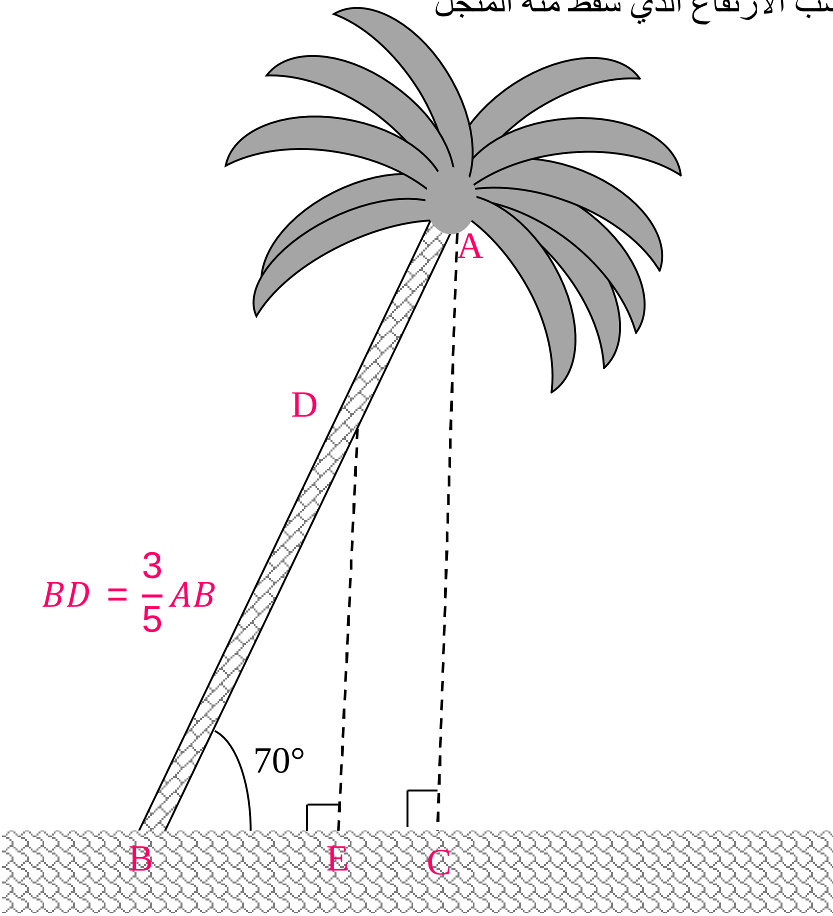
1) أحسب الارتفاع AC بالتدوير إلى الوحدة

2) أحسب طول جذع النخلة AB بالتدوير إلى الوحدة

صعد أمين النخلة و في يده منجل قصد جني التمر، و عند وصوله النقطة D و في غفلة منه وقع منه المنجل على الأرض عند النقطة E حيث $BD = \frac{3}{5}AB$

3) أحسب بعد المنجل عن جذع النخلة

4) أحسب الارتفاع الذي سقط منه المنجل



الحل المفصل للموضوع الرابع

التمرين الأول :

1) حساب $PGCD(480\,;320\,;160)$ مستعملا خوارزمية الفروق المتتابعة

ليكن a، b و c ثلاثة أعداد طبيعية.

$$PGCD(a\,;b\,;c) = PGCD(PGCD(a,b);c)$$

معناه : $PGCD(480\,;320\,;160) = PGCD(PGCD(480;320);160)$

لنحسب $PGCD(480\,;320)$ متبعين خوارزمية الفروق المتتابعة :

$$480 - 320 = 160$$
$$320 - 160 = 160$$
$$160 - 160 = 0$$

نتحصل على عددين متساويين

إذن : $PGCD(480\,;320) = 160$

و منه : $PGCD(480\,;320\,;160) = PGCD(160\,;160) = 160$

$a \neq 0$، $PGCD(a;a) = a$

أخيرا $PGCD(480\,;320\,;160) = 160$

2) كتابة النسبة $\frac{480}{320}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال بطريقتين مختلفتين :

الطريقة الأولى :

نقسم حدي الكسر (البسط و المقام) على قاسمهما المشترك الأكبر :

$PGCD(480\,;320) = 160$ إذن : $\frac{480}{320} = \frac{480 \div 160}{320 \div 160} = \frac{3}{2}$

الطريقة الثانية :

نستعمل قواعد قابلية القسمة :

$$\frac{480}{320} = \frac{480 \div 10}{320 \div 10} = \frac{48}{32} = \frac{48 \div 16}{32 \div 16} = \frac{3}{2}$$

3) أكبر عدد الباقات التي يمكن تشكيلها :

عدد الباقات التي يمكن تشكيلها هو قاسم مشترك للأعداد 480، 320 و 160 لأنه عدد طبيعي، و من جهة أخرى يريد البائع تشكيل أكبر عدد من الباقات، إذن عدد الباقات هو القاسم المشترك الأكبر للأعداد 480، 320 و 160 ، يعني 160 باقة

$\Leftarrow$ عدد الورود من كل نوع :

عدد الورود الحمراء في كل باقة : $480 \div 160 = 3$

عدد الورود البيضاء في كل باقة : $320 \div 160 = 2$

عدد الورود الصفراء في كل باقة : $160 \div 160 = 1$

إذن أكبر عدد من الباقات التي يمكن تشكيلها هو 160 باقة بحيث كل باقة تحتوي على 3 ورود حمراء، 2 من الورود البيضاء و وردة واحدة صفراء

التمرين الثاني :

1) نشر وتبسيط العبارة G :

$$\begin{aligned} G &= (n+1)^2 - (n-1)^2 \\ &= [n^2 + 2 \times 1 \times n + 1^2] - [n^2 - 2 \times 1 \times n + 1^2] \\ &= [n^2 + 2n + 1] - [n^2 - 2n + 1] \\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1 \\ &= 4n \end{aligned}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

2) تحليل العبارة G :

$$\begin{aligned} G &= (n+1)^2 - (n-1)^2 \\ &= [(n+1) - (n-1)][(n+1) + (n-1)] \\ &= [n + 1 - n + 1][n + 1 + n - 1] \\ &= 2 \times 2n \\ &= 4n \end{aligned}$$

3) حساب العدد $101^2 - 99^2$:

لدينـــــــــــا : $101 = 100 + 1$ و معناه : $101^2 = (100 + 1)^2$

و لدينا أيضا : $99 = 100 - 1$ معنـــــاه : $99^2 = (100 - 1)^2$

و منه حساب $101^2 - 99^2$ يوافق حساب $(100 + 1)^2 - (100 - 1)^2$

و اعتمادا على الجواب السابق لدينـــــــــا $(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 4n$

من أجل $n = 100$

نجـــــــــد أن : $(100 + 1)^2 - (100 - 1)^2 = 4 \times 100 = 400$

و منـــــــــــــه : $101^2 - 99^2 = 400$

التمرين الثالث :

$\sqrt{a^2} = a$

1) حل المعادلة :

$(x + 1)^2 = 4$ معناه : $\sqrt{(x + 1)^2} = \sqrt{4}$

معنـــــــــاه : $x + 1 = \sqrt{4}$

معنـــــــــاه : $x + 1 = 2$

و منـــــــــــه : $x = 2 - 1$ أي : $x = 1$

$x - 1 = \sqrt{7} - x\sqrt{7}$ معنـــــــــاه : $x + x\sqrt{7} = 1 + \sqrt{7}$

معنـــــــــاه : $x(1 + \sqrt{7}) = 1 + \sqrt{7}$

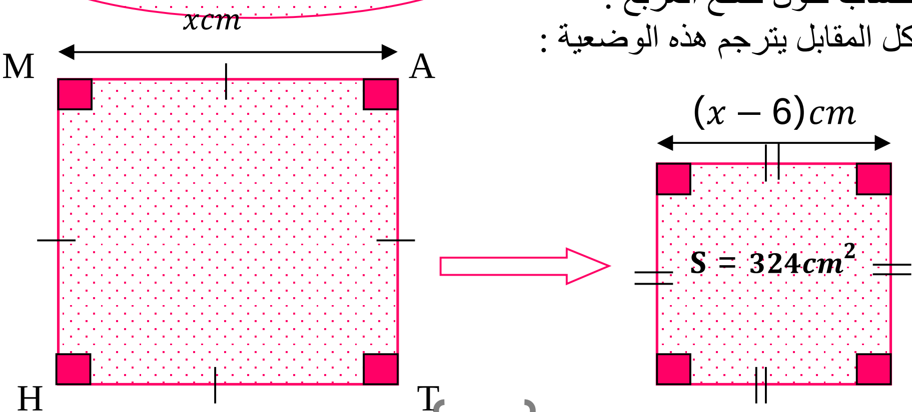
معنـــــــــاه : $x = \frac{1+\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}$

بتقسيم الطرفين على $(1 + \sqrt{7})$

و منـــــــــــه : $x = 1$

2) حساب طول ضلع المربع :

الشكل المقابل يترجم هذه الوضعية :



مساحة المربع تساوي مربع طول ضلعه، و طول ضلع المربع الناتج

هو $(x-6)cm$ و منـــــــه : $(x-6)^2 = 324$

إيجاد العدد x يؤول إلى حل المعادلة $(x-6)^2 = 324$

$(x-6)^2 = 324$ معناه : $x-6 = \sqrt{324}$

معناه : $x-6 = 18$

و منـــــــه : $x = 18+6$ أي : $x = 24$

إذن طول ضلع المربع $MATH$ يساوي $24cm$

التمرين الرابع :

1) لنبين أن $AJ = \frac{2}{7}AC$:

لدينا $(JI)//(BC)$، و النقط A، J، C و A، I، B على استقامة واحدة و بنفس الترتيب، فحسب نظرية طالس يكون : $\frac{AJ}{AC} = \frac{AI}{AB} = \frac{JI}{BC}$

نحتفظ بالمساواة $\frac{AJ}{AC} = \frac{AI}{AB}$

من المعطيات لدينا $AI = \frac{2}{7}AB = \frac{2AB}{7}$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a}{b}\times\frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

تصبح المساواة : $\frac{AJ}{AC} = \frac{\frac{2AB}{7}}{AB} = \frac{2AB}{7}\times\frac{1}{AB}$

و منـــــــه : $\frac{AJ}{AC} = \frac{2AB}{7AB}$ أي : $\frac{AJ}{AC} = \frac{2}{7}$

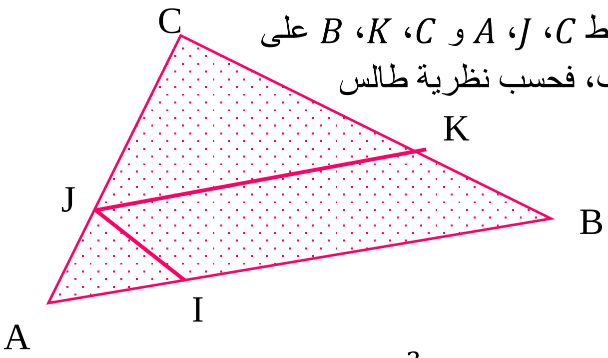
و منـــــــه : $AJ = \frac{2AC}{7}$ أي : $AJ = \frac{2}{7}AC$

الطول AJ :

بما أن $AC = 7cm$ فإن : $AJ = \frac{2}{7}\times 7 = 2$

طول الضلع $[AJ]$ يساوي $2cm$

2) بين أن $CK = \frac{5}{7}BC$:



بما أن $(AB)//(JK)$ و النقط C، J، A و C، K، B على استقامة واحدة و بنفس الترتيب، فحسب نظرية طالس

فإن : $\frac{CJ}{CA} = \frac{CK}{CB} = \frac{JK}{AB}$

نحتفظ بالمساواة $\frac{CJ}{CA} = \frac{CK}{CB}$

من الشكل لدينا : $CJ = CA - AJ$ مع $AJ = \frac{2}{7}CA$ (حسب الجواب الأول)

و منـــــــه : $CJ = CA - \frac{2}{7}AC$

و منـــــــه : $CJ = \frac{7}{7} \times CA - \frac{2}{7}AC$

و منـــــــه : $CJ = \frac{7CA}{7} - \frac{2CA}{7} = \frac{(7-2)CA}{7} = \frac{5CA}{7}$

و بالتالي المساواة $\frac{CJ}{CA} = \frac{CK}{CB}$ تصبح : $\frac{\frac{5CA}{7}}{CA} = \frac{CK}{CB}$ أي : $\frac{CK}{BC} = \frac{5CA}{7CA}$

و منـــــــه : $\frac{CK}{BC} = \frac{5}{7}$

الجداءان المتصالبان في كسر متساويان و منه : $7 \times CK = 5 \times BC$

و منه : $CK = \frac{5BC}{7}$ أي : $CK = \frac{5}{7}BC$

الطول CK :

بما أن $BC = 8cm$ فإن : $CK = \frac{5}{7} \times 8 = \frac{40}{7}$

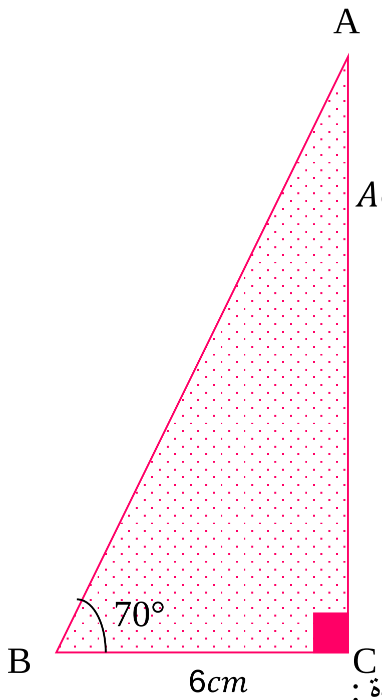
إذن طول الضلع $[CK]$ هو $\frac{40}{7}cm$

حل الوضعية الإدماجية :

1) حساب الارتفاع AC بالتدوير إلى الوحدة :

الضلع $[BC]$ يمثل ظل الشجرة على سطح الأرض بعد وقوع أشعة الشمس العمودية عليها، ما يعني أن المثلث ABC قائم في النقطة C

و ظل الشجرة يساوي $BC = 6cm$، و منه في المثلث القائم ABC لدينا



النسبة : $tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{6}$

و منه : $AC = BC \times tan\widehat{ABC}$

مع $tan\widehat{ABC} = tan70° \approx 2{,}747$

و منه : $AC = 6 \times 2{,}747$ أي : $AC = 16{,}482$

بالتدوير إلى الوحدة نجد $AC = 16cm$

2) حساب طول جذع النخلة AB بالتدوير إلى الوحدة :

نطبق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم ABC :

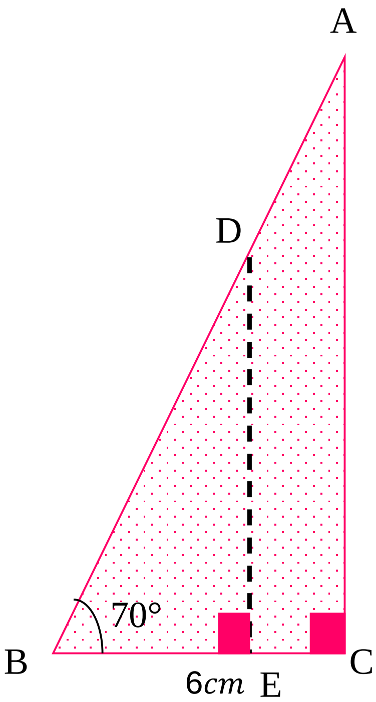
$AB^2 = BC^2 + AC^2$ و منه : $AB^2 = 6^2 + 16^2$

و منه : $AB^2 = 36 + 256 = 292$ و منه : $AB = \sqrt{292} \approx 17{,}088$

بالتدوير إلى الوحدة نجد $AB = 17cm$

3) حساب بعد المنجل عن جذع النخلة :

بعد المنجل عن جذع النخلة ممثل بالضلع $[BE]$



سقوط المنجل يشكل مسار عمودي مع سطح الأرض، معناه أن $(DE)//(AC)$ و بما أن النقط A، D، B و C، E، B على استقامة واحدة و بنفس الترتيب، فحسب نظرية طالس ينتج : $\frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA}$

من المساواة $\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA}$ يكون : $BE = \frac{BD \times BC}{BA}$

من نص الوضعية لدينا $BD = \frac{3}{5}AB = \frac{3\times 17}{5} = 10,2$

إذن : $BE = \frac{10,2\times 6}{17}$ نجـــد : $BE = 3,6cm$

4) حساب الارتفاع الذي سقط منه المنجل :

سقوط المنجل من يد أمين كان من النقطة D

و منه من المساواة السابقة ينتج أن : $DE = \frac{BE \times AC}{BC}$

بالتطبيق العددي نجد $DE = \frac{3,6\times 16}{6} = \frac{57,6}{6}$ و منــــه : $DE = 9,6cm$

الموضوع الخامس

التمرين الأول :

1) تحقق إذا كان العددين 756 و 441 أوليان فيما بينهما أم لا

2) هل الكسر $\frac{756}{441}$ قابل للاختزال؟ إذا كان نعم، اجعله كسر غير قابل للاختزال

3) أحسب العدد D حيث : $D = \frac{756}{441} + \frac{19}{21}$

التمرين الثاني :

بين أن : $\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}-\sqrt{11}} = 2\sqrt{33} + 11$

التمرين الثالث :

1) أنشر و بسط العبارة M حيث : $M = x^2 + 10x + 25 - (3x + 4)^2$

2) حلل العبارة M

3) حل المتراجحة : $34x + 51 \geq 0$ و مثل مجموعة حلولها

التمرين الرابع :

إليك العدد $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و الذي يسمى العدد الذهبي

1) أعط مدور هذا العدد إلى $0{,}001$

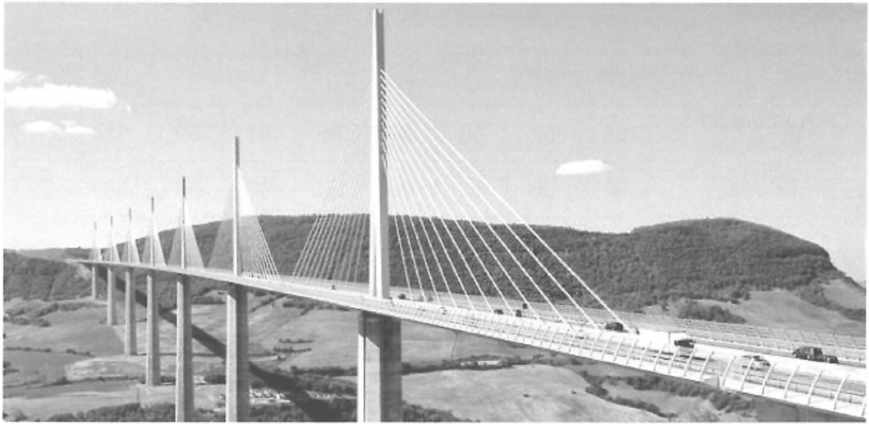
2) بين أن $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$

⇐ استنتج أن $\varphi = \frac{1}{\varphi-1}$

3) ماذا تعرف عن العدد الذهبي؟ !!

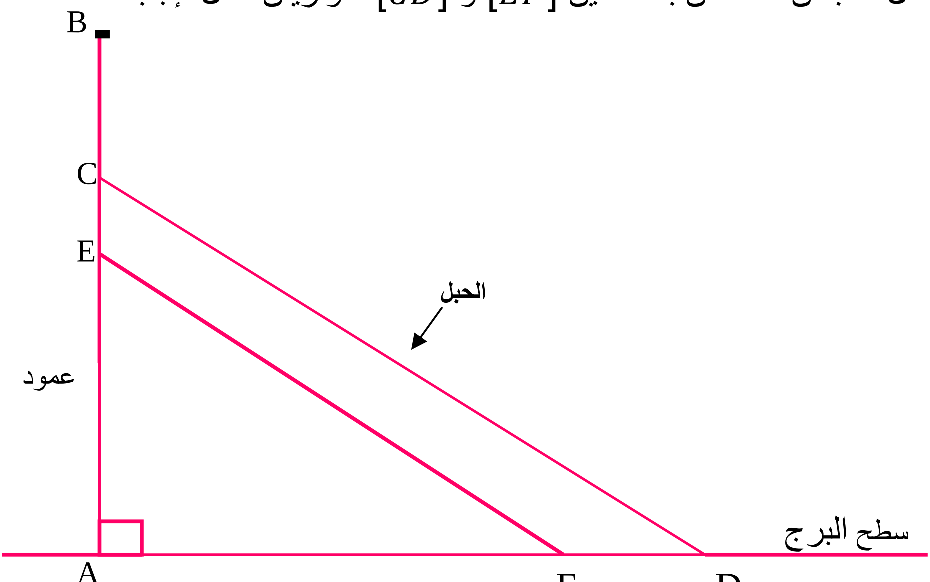
الوضعية الإدماجية :

الصورة المقابلة تمثل جسر **'ميلو'** الذي يقع على وادي نهر تارن في فرنسا و هو أعلى و أطول جسر في العالم، و هو يتشكل من 7 أبراج (أعمدة) حيث كل برج متصل بـ22 حبلا تسمى خطوط الرجل.



الشكل ليس مرسوم بالأبعاد الحقيقية، و نعطي $AB = 89m$ ، $AC = 76m$
و $EC = 5m$ ، $FD = 12m$ و $AD = 154m$

1) أحسب طول الحبل CD مدورا النتيجة إلى الوحدة
2) أحسب قيس الزاوية $\widehat{CDA}$ بالتدوير إلى الوحدة
3) هل الحبلان الممثلان بالضلعين $[EF]$ و $[CD]$ متوازيان؟ عل إجابتك



الحل المفصل للموضوع الخامس

حل التمرين الأول :

1) العددان 756 و 441 كلاهما يقبلان القسمة على 3 لأن (18=6+5+7 و 18 يقبل القسمة على 3) و (9=1+4+4 و 9 يقبل القسمة على 3)، معناه أن العددان 756 و 441 لهما على الأقل قاسما مشتركا غير 1، أي

$PGCD(756\,;441) \neq 1$ ما يعني أنهما غير أوليان فيما بينهما.

تذكير : يقبل عدد طبيعي القسمة على 3 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 3

تذكير : a و b عددان أوليان فيما بينهما معناه أن قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1

2) الكسر $\frac{756}{441}$ قابل للاختزال لأن العددان 756 و 441 غير أوليان فيما بينهما

لكتابة الكسر $\frac{756}{441}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال، نقسم حدي هذا الكسر (البسط و المقام) على القاسم المشترك الأكبر لهما.

لنحسب $PGCD(756\,;441)$:

a	b	الباقي r
756	441	315
441	315	126
315	126	63
126	63	0

أخر باقي غير معدوم هو 63 و بالتالي :

$$PGCD(756;441) = 63$$

و منـــــــــه : $\frac{756}{441} = \frac{756\div 63}{441\div 63} = \frac{12}{7}$

3) حساب العدد D :

$$D = \frac{756}{441} + \frac{19}{21}$$

$$D = \frac{756 \div 63}{441 \div 63} + \frac{19}{21}$$

$$D = \frac{12}{7} + \frac{19}{21}$$

لاحظ أن
$\frac{756}{441} = \frac{12}{7}$

$$D = \frac{12 \times 3}{7 \times 3} + \frac{19}{21}$$

أصغر مقام
مشترك هو 21

$$D = \frac{36}{21} + \frac{19}{21}$$

$$D = \frac{36 + 19}{21}$$

$$D = \frac{55}{21}$$

حل التمرين الثاني :

1) لنبين أن $\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}-\sqrt{11}} = 2\sqrt{33} + 11$:

نجعل أولا مقام النسبة $\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}-\sqrt{11}}$ عددا ناطقا بضرب حدي هذا الكسر في $2\sqrt{3} + \sqrt{11}$ و عليه :

$$\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3} - \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}(2\sqrt{3} + \sqrt{11})}{(2\sqrt{3} - \sqrt{11})(2\sqrt{3} + \sqrt{11})}$$

$$= \frac{2\sqrt{11 \times 3} + (\sqrt{11})^2}{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{11})^2}$$

تذكر أن :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$
$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$$= \frac{2\sqrt{33} + 11}{2^2 \times (\sqrt{3})^2 - 11}$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$= \frac{2\sqrt{33} + 11}{4 \times 3 - 11} = \frac{2\sqrt{33} + 11}{12 - 11} = \frac{2\sqrt{33} + 11}{1}$$

$$= 2\sqrt{33} + 11$$

و هو المطلوب

التمرين الثالث :

1) نشر و تبسط العبارة M :

$$M = x^2 + 10x + 25 - (3x + 4)^2$$

$$M = x^2 + 10x + 25 - ((3x)^2 + 2 \times 3x \times 4 + 4^2)$$

$$M = x^2 + 10x + 25 - (9x^2 + 24x + 16)$$

$$M = x^2 + 10x + 25 - 9x^2 - 24x - 16$$

$$M = -8x^2 - 14x + 9$$

عند حذف القوسين نغير إشارة
كل حل موجود بين القوسين
لأنهما مسبوقان بالإشارة (-)

القوسان مسبوقان
بالإشارة (-) لذا يجب
وضع الأقواس عند نشر
الحد $(3x + 4)^2$

2) لنحلل العبارة M : $M = x^2 + 10x + 25 - (3x + 4)^2$

لدينا $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2$ و هي من

الشكل $a^2 + 2ab + b^2$ حيث $a = x$ و $b = 5$

و منــــــــــــــــــــته : $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

تصبح العبارة M من الشكل : $M = (x + 5)^2 - (3x + 4)^2$

نفكر في المتطابقة الشهيرة $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

فنضــــــــــــــــــــع $a = x + 5$ و $b = 3x + 4$

و منه :

$$M = (x + 5)^2 - (3x + 4)^2$$

$$M = [(x + 5) + (3x + 4)][(x + 5) - (3x + 4)]$$

$$M = [x + 5 + 3x + 4][x + 5 - 3x - 4]$$

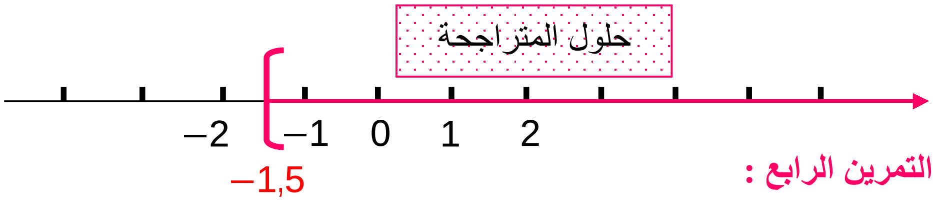
$$M = (4x + 9)(-2x + 1)$$

3) لنحل المتراجحة $34x + 51 \geq 0$

نطرح العدد 51 من طرفي المتراجحة $34x + 51 \geq 0$ فنحصل

على $34x \geq -51$ و منه : $x \geq \frac{-51}{34}$ فنجد أن $x \geq -1{,}5$

ينتج أن حلول المتراجحة $34x + 51 \geq 0$ هي كل الأعداد الأكبر من أو تساوي $-1{,}5$



التمرين الرابع :

1) مدور العدد الذهبي $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033$ بالتدوير إلى 0,001 نجد أن $\varphi = 1{,}618$

2) لنبين أن $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$:

$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ معناه أن : $\varphi^2 = \varphi + 1$ و منه :

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{(2)^2} = \frac{1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2}{4}$$

$$= \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{2 \times 3 + 2 \times \sqrt{5}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{2 \times 2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

و من جهة أخرى لدينا :

$$\varphi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}+2}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

و أخيرا $\varphi^2 = \varphi + 1$ و بالتالي $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$

من مميزات العدد الذهبي φ أنه إذا أضفنا إليه 1 سنحصل على مربعه، و لهذا

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

3) لنستنتج أن $\varphi = \frac{1}{\varphi-1}$

$\varphi = \frac{1}{\varphi-1}$ معناه $\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi-1}$ و منه ينتج : $\varphi(\varphi - 1) = 1 \times 1$

و منه : $\varphi^2 - \varphi = 1$

الجداءان المتصالبان

في كسر متساويان

و منه : $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ (أنظر الجواب السابق)

و بالتالـــــــــــــي : $\varphi = \frac{1}{\varphi-1}$

4) العدد الذهبي :

العدد الذهبي الذي يرمز له عادة بالرمز φ ، يساوي $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و قيمته التقريبية إلى 0,001 هي 1,618

يظهر العدد الذهبي في العديد من الإنجازات الإنسانية، لتفسير هذا العدد هندسيا، نعتبر مستطيلا طوله L و عرضه l، حيث يتميز هذا المستطيل بتناسب ضلعيه و فق العدد الذهبي، يستعمل هذا التناسب في اللوحات الفنية التشكيلية مما يضفي عليها طابعا جماليا مميزا.

و سمي بـ φ في سنة 1914 وفاء لذكرى المهندس **فيدياس** النحات الذي قام بتزيين المبنى العريق **البارثينون** في أثينا في القرن الخامس قبل الميلاد، يتشكل من مستطيلات بعداها L و l يحققان $\frac{L}{l} = \varphi$

استعمله أيضا المهندسين و أكثر العقول عبقرية **ليوناردو دا فينشي** لكن ما سر كل هذا الاهتمام و ما سر استعماله؟ إن تسميته **بالعدد الذهبي** ربما يدل على ندرته و

لكن حتما انه من أثمن الأعداد على الإطلاق، فإذا استعملته في بناء هندسي مثلا فستلبس عملك ذهبا و نتيجة لهذا سيبدو خاطفا للبصر.

حل الوضعية الإدماجية :

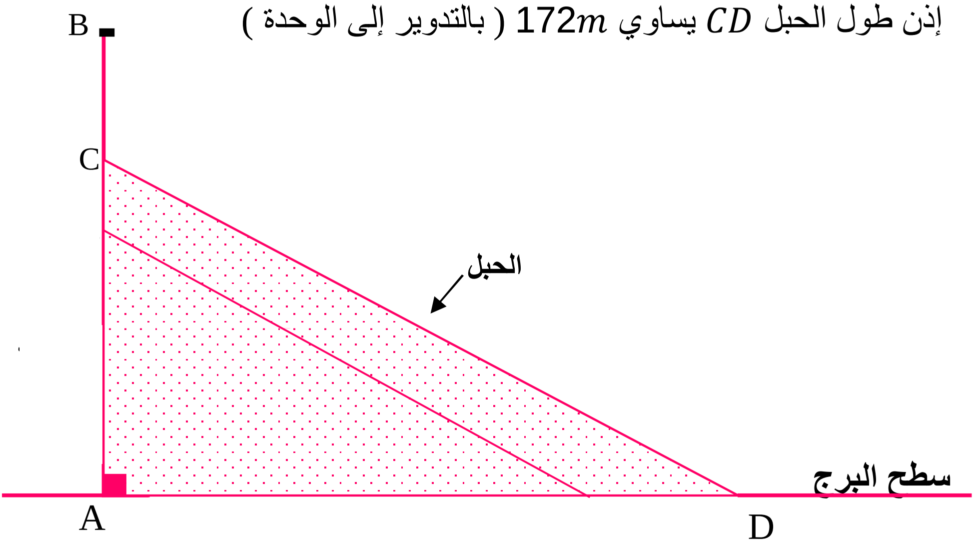
1) حساب طول الحبل CD :

نطبق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم ACD

$CD^2 = AD^2 + AC^2$ و منه : $CD^2 = 154^2 + 76^2$

و منه : $CD^2 = 29492$ و منه : $CD = \sqrt{29492} \approx 171{,}732$

إذن طول الحبل CD يساوي $172m$ (بالتدوير إلى الوحدة)



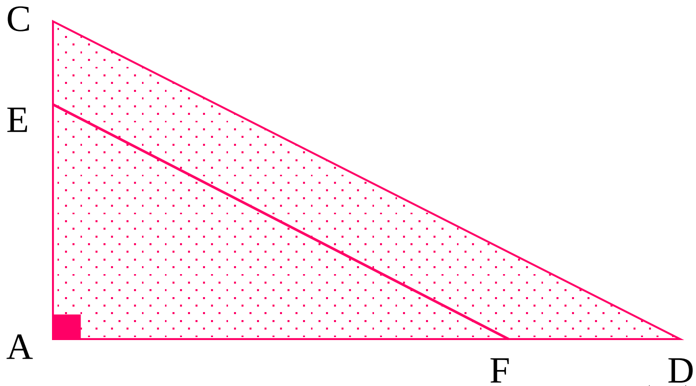
2) حساب قيس الزاوية $\widehat{CDA}$ بالتدوير إلى الوحدة :

في المثلث القائم ACD لدينا : $tan\widehat{CDA} = \frac{AC}{AD} = \frac{76}{154} \approx 0{,}49$

و بالضغط على اللمسات في الآلة الحاسبة

$\boxed{2ndf}$ $\boxed{tan^{-1}}$ $\boxed{0{,}49}$

نجد أن $\widehat{CDA} \approx 26{,}104°$ ، نأخذ $\widehat{CDA} = 26°$ بالتدوير إلى الوحدة



3) توازي الحبلين $[EF]$ و $[CD]$:

لدينا :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{71}{76} \approx 0{,}93$$

$$\frac{AF}{AD} = \frac{142}{154} \approx 0{,}92$$

النسبتان غير متساويتان

و منه الحبلان الممثلان بالضلعين $[EF]$ و $[CD]$ غير متوازيان.

الفصل الثاني

الموضوع الأول

التمرين الأول :

لتكن العبارة G حيث :

$$G = 49 - (2x - 5)^2$$

1) أنشر و بسط العبارة G
2) حلل العبارة G
3) حل المعادلة $(x - 3) \times G = 0$

التمرين الثاني :

m و n عددان طبيعيان حيث : $560m = 320n$

1) أحسب الكسر $\frac{m}{n}$
2) أعط الناتج على شكل كسر غير قابل للاختزال

التمرين الثالث :

BEM مثلث قائم في E حيث :

$BE = 4cm$ و $\widehat{BME} = 30°$

1) أحسب BM و EM
2) مستعملا العلاقة $cos^2a + sin^2a = 1$ و $tan\, a = \frac{sin\, a}{cos\, a}$، عين القيمة المضبوطة لـ$cos30°$ و $tan30°$

التمرين الثالث : وحدة الطول هي السنتمتر

في معلم متعامد و متجانس $(O\,;I\,;J)$

1) علم النقط : $E(4\,;4)$ ، $F(7\,;5)$ ، $G(8\,;2)$
2) أحسب الأطوال EF، FG و GE
3) بين طبيعة المثلث EFG

الوضعية الإدماجية :

يعتبر الدوري الإسباني لكرة القدم من بين أفضل و أقوى الدوريات في العالم لضمه فرق كبيرة منها فريقي ريال مدريد و برشلونة، و تختلف سعر الذاكر للدخول إلى الملعب من فريق إلى فريق، فمثلا يقترح ملعب الكامب نو صيغتين لدخول المتفرجين إلى هذا الملعب

<u>الصيغة الأولى</u> : دفع 30 أورو لكل مقابلة يحضرها

<u>الصيغة الثانية</u> : دفع 100 أورو كاشتراك سنوي و 20 أورو لكل مقابلة يحضرها

الفريق يلعب 38 مباراة ضمن الدوري

الجزء الأول :

1) ما هي أفضل صيغة لمتفرج يحضر 5 مقابلات؟ علل
2) ما هي أفضل صيغة لمتفرج يحضر 30 مباراة؟ علل
3) ليكن x عدد المقابلات التي يحضرها متفرج خلال السنة، و $f(x)$ المبلغ المدفوع بالصيغة الأولى و $g(x)$ المبلغ المدفوع بالصيغة الثانية
عبر عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة x

الجزء الثاني :

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;I\,;J)$

1) مثل المستقيمين (D_2) و (D_1) الممثلين للدالتين f و g

(حيث $1cm$ على محور الفواصل يمثل مقابلتين، و $1cm$ على محور التراتيب يمثل 50 أورو)

2) بقراءة بيانية :

⇐ عين المبلغ الذي سيدفعه المتفرج لـ5 مقابلات بالصيغة الأولى

⇐ عين عدد المباريات إذا كان المبلغ المدفوع بالصيغة الثانية هو 400 أورو

3) حل المعادلة $f(x) = g(x)$ ثم فسر هذا الحل

4) عين بيانيا عدد المباريات التي من أجلها تكون الصيغة الأولى أفضل، ثم الصيغة الثانية أفضل.

الحل المفصل للموضوع الأول

حل التمرين الأول :

1) نشر و تبسيط العبارة G :

$$G = 49 - (2x-5)^2 = 49 - [(2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2]$$
$$= 49 - (4x^2 - 20x + 25)$$
$$= 49 - 4x^2 + 20x - 25$$
$$= -4x^2 + 20x + 24$$

الحد $(2x-5)^2$ مسبوق بالإشارة $(-)$، لذا يجب وضع الأقواس عند نشره

تحذف الأقواس بمراعاة جداء

2) لنحلل العبارة G :

العبارة G هي مجموع جبري فيه حدان هما $(2x-5)^2$ و 49 مع $49 = 7^2$

و منـــــــه العبارة : $G = 49 - (2x-5)^2 = 7^2 - (2x-5)^2$

و هي من الشكل $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ و منـــــــــــــــــــه :

$$G = 49 - (2x-5)^2 = 7^2 - (2x-5)^2$$
$$= [7 - (2x-5)][7 + (2x-5)]$$
$$= (7 - 2x + 5)(7 + 2x - 5)$$
$$= (12 - 2x)(2 + 2x)$$

3) لنحل المعادلة $(x-3)\times G=0$:

$(x-3)\times G=0$ معناه : $(x-3)\times(12-2x)(2+2)=0$ فينتج من المعادلة أن :

$(x-3)=0$ أو $(12-2x)=0$ أو $(2+2x)=0$

أي : $x=3$ أو $x=\frac{-12}{-2}=6$ أو $x=\frac{-2}{2}=-1$

للمعادلة $(x-3)\times G=0$ ثلاثة حلول و هي : -1 و 6 و 3

حل التمرين الثاني :

1) لنحسب الكسر $\frac{m}{n}$:

$560m=320n$ الجداءان المتصالبان متساويان فينتج : $\frac{m}{n}=\frac{320}{560}$

2) لنختزل الكسر $\frac{m}{n}$:

نجعل هذا الكسر كسر غير قابل للاختزال بقسمة حديه على قاسمهما المشترك الأكبر

a	b	الباقي r
560	320	240
320	240	80
240	80	0

أخر باقي غير معدوم هو 80 و بالتالي القاسم المشترك الأكبر للعددين 560 و 320 هو 80

$PGCD(560;320)=80$ و عليـــــه :

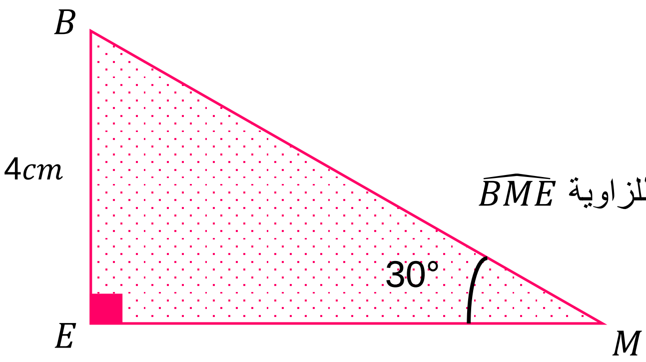
$$\frac{m}{n}=\frac{320}{560}=\frac{320\div 80}{560\div 80}=\frac{4}{7}$$

حل التمرين الثالث :

1) لنحسب الأطوال :

$\Leftarrow$ حساب BM :

في المثلث BEM القائم في E، الضلع $[BM]$ هو وتره



و $[BE]$ هو الضلع المقابل للزاوية $\widehat{BME}$

إذن : $sin\widehat{BME} = \frac{BE}{BM}$

أي : $sin30° = \frac{4}{BM}$

و بالتالي : $BM = \frac{4}{sin30°} = \frac{4}{0,5}$ فنجـــد : $BM = 8cm$

$sin30° = 0,5$

⇐ حساب EM :

نطبق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم BEM :

$$EM^2 = BM^2 - BE^2$$

معناه : $EM^2 = 8^2 - 4^2$

معناه : $EM^2 = 64 - 16 = 48$

معناه : $EM = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3}$ و منـــه : $EM = 4\sqrt{3}cm$

2) تعيين القيمة المضبوطة لـ$cos30°$:

$cos^2a + sin^2a = 1$ يعني أن : $cos^2 30° + sin^2 30° = 1$

و منه : $cos^2 30° + (0,5)^2 = 1$ أي : $cos^2 30° + 0,25 = 1$

و منه : $cos^2 30° = 1 - 0,25 = 0,75 = \frac{3}{4}$

$0,75 = \frac{3}{4}$

و منه : $cos30° = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$

و منـــــه : $cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

⇐ القيمة المضبوطة لـ$tan30°$:

$\sin 30° = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$ يعني أن : $\tan 30° = \frac{\sin\ °}{\cos\ °}$

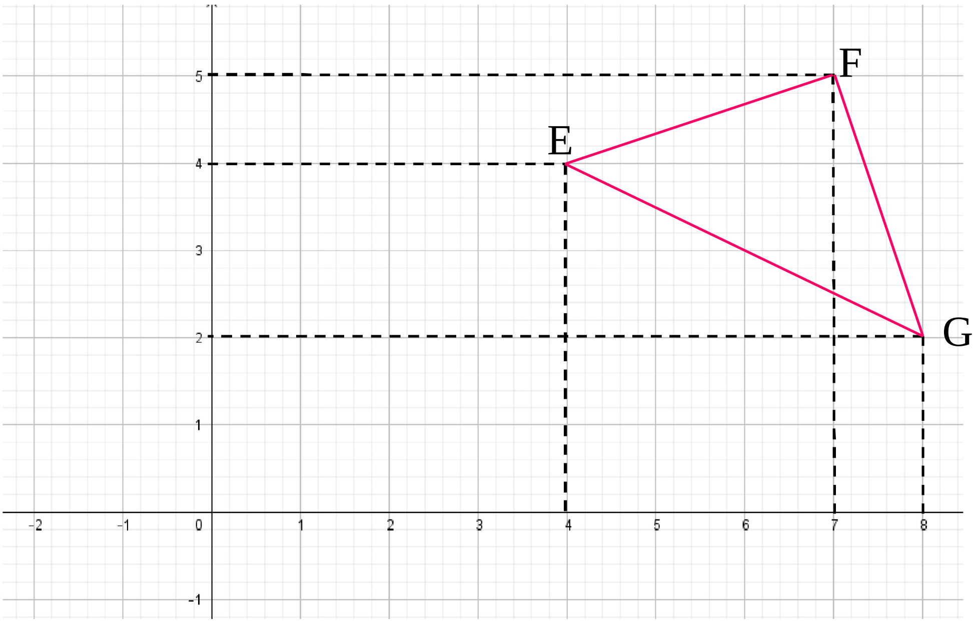
و منه : $\tan 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

و منــــــــــــــــــــــــه : $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

نجعل مقام النسبة عددا ناطقا

حل التمرين الرابع :

1) تعليم النقط :



2) لنحسب الأطوال :

⇐ لنحسب الطول EF :

لدينا : $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 7-4 \\ 5-4 \end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

و منه : $EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$

و منه : $EF = \sqrt{(3)^2 + (1)^2}$

و منـــــــــــــه : $EF = \sqrt{10}cm$

⇐ الطول FG :

لدينا : $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} x_G - x_F \\ y_G - y_F \end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} 8-7 \\ 2-5 \end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

و منه : $FG = \sqrt{(x_G - x_F)^2 + (y_G - y_F)^2}$

و منه : $FG = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2}$

و منـــــــــــــه : $FG = \sqrt{10}cm$

⇐ الطول GE :

لدينا $:\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix} x_E - x_G \\ y_E - y_G \end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix} 4-8 \\ 4-2 \end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

و منه : $GE = \sqrt{(x_E - x_G)^2 + (y_E - y_G)^2}$

و منه : $GE = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2}$

و منـــــــــــــه : $GE = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5}$ أي : $GE = 2\sqrt{5}cm$

3) لنبين طبيعة المثلث EFG :

لدينا : $EF^2 + FG^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10 + 10$

أي : $EF^2 + FG^2 = 20$ و $GE^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2 = 20$

و منه : $EF^2 + FG^2 = GE^2$ ينتج أن المثلث EFG قائم في F حسب النظرية العكسية لنظرية فيثاغورث

و من جهة أخرى لدينا : $EF = FG = \sqrt{10}cm$ ، يعني أن المثلث EFG متساوي الساقين في F

نتيجة : المثلث EFG قائم و متساوي الساقين في F

حل الوضعية الإدماجية :

الجزء الأول :

1) الصيغة الأفضل لمتفرج يحضر 5 مقابلات :

⇐ المبلغ المدفوع بالصيغة الأولى هو : $prix_1 = 30 \times 5 = 150$

⇐ المبلغ المدفوع بالصيغة الثانية هو : $prix_2 = 20 \times 5 + 100 = 200$

أفضل صيغة لمتفرج يحضر 5 مقابلات هي الصيغة التي يدفع فيها أقل مبلغ أي الصيغة الأولى

2) الصيغة الأفضل لمتفرج يحضر 20 مقابلة :

⇐ المبلغ المدفوع بالصيغة الأولى هو : $prix_1 = 30 \times 20 = 600$

⇐ المبلغ المدفوع بالصيغة الثانية هو : $prix_2 = 20 \times 20 + 100 = 500$

الصيغة الأفضل لمتفرج يحضر 20 مقابلة هي الصيغة الثانية

(لأن $prix_1 > prix_2$)

3) التعبير عن $f(x)$ و $g(x)$:

⇐ الدالة $f(x)$:

$f(x)$ هو المبلغ المدفوع بالصيغة الأولى.

بما أن المتفرج يدفع 30 أورو للمقابلة الواحدة، فإن المبلغ الذي سيدفعه لـx مقابلة هو $30x$ أورو

و بالتالي : $f(x) = 30x$

⇐ الدالة $g(x)$:

$g(x)$ هو المبلغ المدفوع بالصيغة الثانية.

يدفع المتفرج للمقابلة الواحدة 20أورو مع 100أورو كاشتراك سنوي، إذن المبلغ الذي سيدفعه لـx مقابلة هو $20x + 100$ و بالتالي : $g(x) = 20x + 100$

الجزء الثاني :

1) تمثيل المستقيمين الممثلين للدالة f و g :

$(D_1) : y = 30x$

x	0	10
y	0	300
$(x\,;y)$	$O(0\,;0)$	$A(10\,;300)$

$y = 30 \times 0 = 00$
$y = 300 \times 10 = 300$

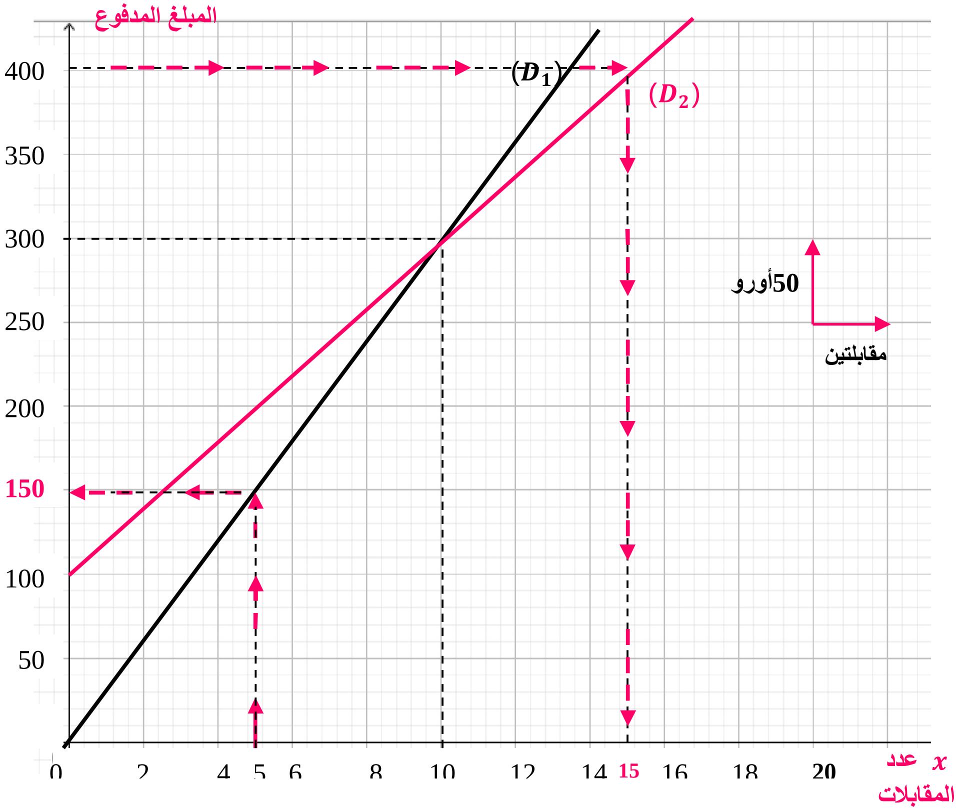
التمثيل البياني للدالة الخطية f هو المستقيم (D_1) الذي يمر من المبدأ O و من النقطة $A(10\,;300)$

$(D_2) : y = 20x + 100$

x	0	10
y	100	300
$(x\,;y)$	$M(0\,;100)$	$N(10\,;300)$

$y = 20 \times 0 + 100 = 100$
$y = 20 \times 10 + 100 = 300$

التمثيل البياني للدالة التألفية g هو المستقيم (D_2) الذي يمر من النقطتين $M(0\,;100)$ و $N(10\,;300)$



2) القراءة البانية :

⇐ المبلغ الذي سيدفعه المتفرج بالصيغة الأولى لحضوره لـ5 مقابلات هو : 150أورو

⇐ عدد المباريات إذا كان المبلغ المدفوع بالصيغة الثانية هو 400أورو هي : 15 مباراة

3) لنحل المعادلة $f(x) = g(x)$:

$f(x) = g(x)$ معناه : $30x = 20x + 100$

معناه : $30x - 20x = 100$ أي : $10x = 100$

و منـــــــــــــــــه : $x = \frac{100}{10}$ أي : $x = 10$

يمثل هذا الحل عدد المباريات التي من أجلها يتساوى فيه المبلغ بالصيغتين، أي يدفع المتفرج مبلغ 300أورو مقابل حضوره 10 مباريات في كلا من الصيغتين.

4) تعيين عدد المباريات التي من أجلها تكون الصيغة الأولى أفضل ثم الصيغة الثانية أفضل :

بيانيا، يظهر المنحنى (D_1) للدالة f تحت (D_2) للدالة g من أجل $x < 10$

معناه أن $f(x) < g(x)$ من أجل $x < 10$ ، و منه المتفرج الذي يريد حضور أقل من 10 مباريات عليه أن يختار الصيغة الأولى.

في المقابل، يظهر المنحنى (D_2) للدالة g تحت المنحنى (D_1) للدالة f من أجل $x > 10$

معناه أن $f(x) > g(x)$ من أجل $x > 10$ ، و منه المتفرج الذي يريد حضور أكثر من 10 مباريات عليه أن يحتار الصيغة الثانية.

النتيجة :

x عدد المباريات.

من أجل $10 > x$ تكون الصيغة الأولى أفضل من الصيغة الثانية

من أجل $10 < x$ تكون الصيغة الثانية أفضل من الصيغة الأولى

من أجل $10 = x$ تكون الصيغتين متساويتين

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

نعتبر العددين A و B حيث :

$$A = \frac{14}{36} \times \frac{5}{14} - \left(\frac{10}{6} - 2\right)^2 \quad ; \quad B = \frac{3 \times 10^2 \times 5 \times 10^4}{12 \times (10^3)^3}$$

1) أكتب العدد A على شكل كسر غير قابل للاختزال

2) أعط الكاتبة العلمية للعدد B

التمرين الثاني :

بمناسبة عيد المرأة، يريد السيد حسام تقديم باقة أزهار لزوجته، فعرض عليه البائع ما يلي :

⇐ باقة مشكلة من 8 أزهار الياسمين و 5 ورود بثمن إجمالي يقدر بـ142دج

⇐ باقة مشكلة من 5 أزهار الياسمين و 7 ورود بثمن إجمالي يقدر بـ143دج

أحسب ثمن زهرة الياسمين الواحدة و ثمن الوردة الواحدة

التمرين الثالث : وحدة الطول هي السنتمتر cm

MNP مثلث قائم في M حيث : $MN = 3{,}6$ و $PN = 6$

1) أحسب قيس الزاوية $\widehat{MPN}$ بالتدوير إلى الوحدة

2) أحسب الطول MP ثم استنتج مساحة المثلث MPN

3) لتكن النقطة H المسقط العمودي لـM على المستقيم (PN)

⇐ عبر عن مساحة المثلث MPN بدلالة MH ثم استنتج الطول MH

التمرين الرابع :

RST مثلث متساوي الساقين قاعدته $[ST]$

1) أنشئ E حيث : $\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT}$

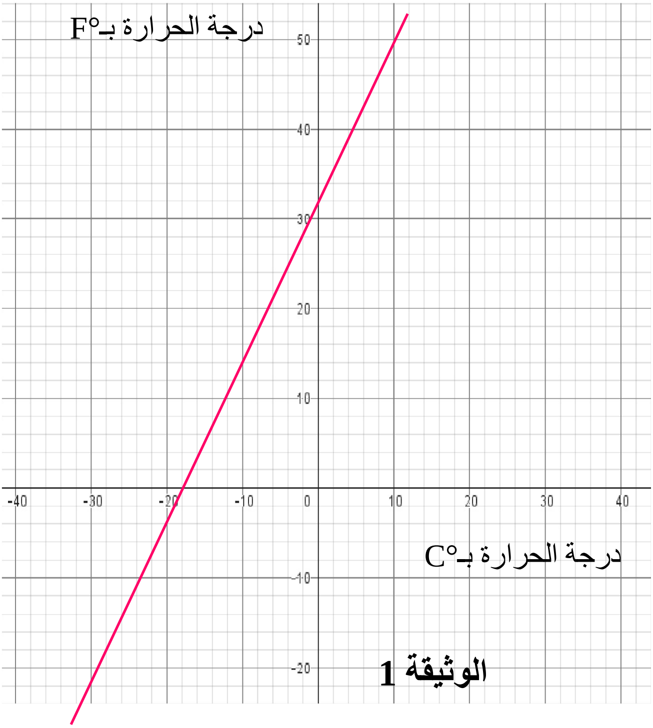
2) بين أن الرباعي $RSET$ معين

3) أنشئ M حيث : $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{TM}$

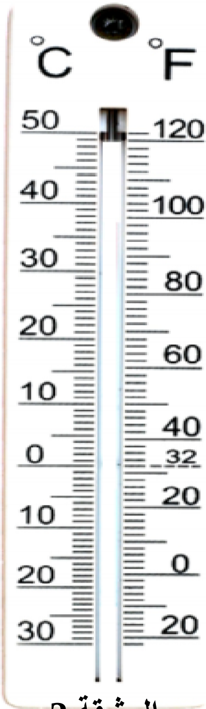
4) أثبت أن $\overrightarrow{TS} + \overrightarrow{TM} = \vec{0}$

الوضعية الإدماجية :

يوجد عدة وحدات لقياس درجات الحرارة، فمثلا في الجزائر نستعمل وحدة السلسيوس (C°) و في الولايات المتحدة الأمريكية نستعمل وحدة الفهرنهايت (F°) ، إليك التمثيلين الآتيين :



الوثيقة 1



الوثيقة 2

1) اعتمادا على التمثيلين السابقين، تحقق إذا كان توجد تناسبية بين درجة الحرارة بالسلسيوس (°C) و درجة الحرارة بالفهرنهايت (°F) مع التعليل

2) ليكن x درجة الحرارة بـ°C و $f(x)$ درجة الحرارة بـ°F ، نعطي ثلاث اقتراحات :

الاقتراح الأول	الاقتراح الثاني	الاقتراح الثالث
$f(x) = x + 32$	$f(x) = 1{,}8x + 32$	$f(x) = 2x + 30$

أي من الاقتراحات الثلاثة تترجم هذه الوضعية؟

3) لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = 1{,}8x + 32$

$\Leftarrow$ أحسب $f(10)$ و $f(-40)$

4) هل توجد قيمة بحيث درجة الحرارة بـ (°C) تساوي درجة الحرارة بـ (°F) ؟

الحل المفصل للموضوع الثاني

حل التمرين الأول :

1) كتابة العدد على شكل كسر غير قابل للاختزال :

$$A = \frac{14}{36} \times \frac{5}{14} - \left(\frac{10}{6} - 2\right)^2$$

$$A = \frac{14 \times 5}{\cancel{36} \times 14} - \left(\frac{10}{6} - \frac{12}{6}\right)^2$$

$$A = \frac{5}{36} - \left(\frac{\cancel{10} - 12}{6}\right)^2$$

$$A = \frac{5}{36} - \frac{4}{36}$$

$$A = \frac{5-4}{36}$$

$$A = \frac{1}{36}$$

أصغر مقام
مشترك هو 6

في عملية الضرب يمكن الاختزال

$$\frac{\cancel{a} \times b}{\cancel{a} \times c} = \frac{b}{c}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

2) الكتابة العلمية للعدد B :

نعني بكتابة علمية لعدد عشري كتابته على الشكل $a \times 10^n$ حيث a عدد عشري مكتوب برقم واحد غير معدوم قبل الفاصلة و n عدد صحيح نسبي

$$B = \frac{3 \times 10^2 \times 5 \times 10^4}{12 \times (10^3)^3}$$

$$B = \frac{3 \times 5 \times 10^{2+4}}{3 \times 4 \times 10^{3\times3}}$$

$$B = \frac{5 \times 10^6}{4 \times 10^9} = \frac{5}{4} \times \frac{10^6}{10^9}$$

$$B = \frac{5}{4} \times 10^{6-9}$$

$$B = 1{,}25 \times 10^{-3}$$

$$10^n \times 10^m = 10^{n+m}$$

$$(10^n)^m = 10^{n\times m}$$

$$\frac{10^n}{10^m} = 10^n \times 10^{-m} = 10^{n-m}$$

إذن الكتابة العلمية للعدد B هي $B = 1,25 \times 10^{-3}$

حل التمرين الثاني :

ليكن x ثمن الزهرة الواحدة للياسمين و y ثمن الوردة الواحدة، إذن ثمن 8 أزهار الياسمين هو $8x$ دج و ثمن 5 ورود هو $5y$ دج

باقة مشكلة من 8 أزهار الياسمين و 5 ورود بـ142 دج يعني أن $8x + 5y = 142$

ثمن 5 أزهار من الياسمين هو $5x$ دج ثمن 7 ورود هو $7y$ دج

باقة مشكلة من 5 أزهار الياسمين و 7 ورود بـ143 دج يعني أن : $5x + 7y = 143$

لنحل الجملة : مستعملا طريقة التعويض

$$\begin{cases} 8x + 5y = 142 & (1) \\ 5x + 7y = 143 & (2) \end{cases}$$

من المعادلة الأولى $8x + 5y = 142$ ينتج أن : $8x = 142 - 5y$

أي : $x = \frac{142-5y}{8}$

نعوض في المعادلة الثانية x بـ $\frac{142-5y}{8}$ فنجد : $5\left(\frac{142-5y}{8}\right) + 7y = 143$

و منه : $\frac{710-25y}{8} + 7y = 143$ و منه : $\frac{710-25y}{8} + \frac{56y}{8} = \frac{1144}{8}$

و منه : $710 - 25y + 56y = 1144$

و منه : $-25y + 56y = 1144 - 710$

و منـــــــــــه : $31y = 434$ أي : $y = 14$

و من جهة أخرى $x = \frac{142-5y}{8} = \frac{142-5\times14}{8} = \frac{142-70}{8} = \frac{72}{8}$

أي : $x = 9$

إذن ثمن الزهرة الواحدة من الياسمين هو 9دج و ثمن الوردة الواحدة هو 14دج

كما يمكن حل الجملة السابقة بطريقة الجمع و التعويض :

$$\begin{cases} 8x + 5y = 142 & \mathbf{1} \\ 5x + 7y = 143 & \mathbf{2} \end{cases}$$

نقوم بحلها بهذه الطريقة كإضافة :

قصد التخلص من العدد x مثلا نضرب طرفي المعادلة 1 في 5 و طرفي المعادلة 2 في (-8) فنحصل على الجملة :

$$\begin{cases} 40x + 25y = 710 & \mathbf{1} \\ -40x - 56y = -1144 & \mathbf{2} \end{cases}$$

بجمع طرفا لطرف المعادلتين نجد :

$$40x + 25y - 40x - 56y = 710 - 1144$$

و منـــــــــــه : $28y - 56y = -434$

و منـــــــــــه : $-31y = -434$ أي : $y = 14$

نعوض y بـ14 في إحدى المعادلتين فنجد : $8x + 5 \times 14 = 142$

و منـــــــــــه : $8x + 70 = 142$

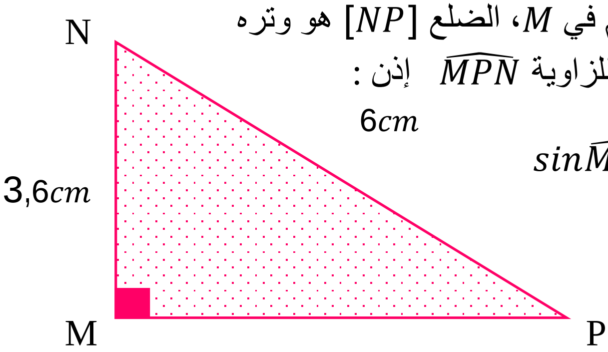
و منه : $8x = 142 - 70 = 72$ و منـــــــــــه : $8x = 72$

أي : $x = 9$

إذن الثنائية $(9 ; 14)$ هي حل للجملة السابقة.

حل التمرين الثالث :

1) حساب قيس الزاوية $\widehat{MPN}$ بالتدوير إلى الوحدة :



في المثلث القائم MNP القائم في M، الضلع $[NP]$ هو وتره

و $[MN]$ هو الضلع المقابل للزاوية $\widehat{MPN}$ إذن :

$$\sin\widehat{MPN} = \frac{MN}{NP} = \frac{3,6}{6} = 0,6$$

بالضغط على اللمسات في الآلة الحاسبة

$\boxed{2ndf}$ $\boxed{\sin^{-1}}$ $\boxed{0,6}$

نجد : $\widehat{MPN} \approx 36,869°$ بالتدوير إلى الوحدة نجــــد أن : $\widehat{MPN} = 37°$

2) حساب الطول MP :

بتطبيق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم MNP

نجــــــد : $MP^2 = NP^2 - MN^2$

و منه : $MP^2 = (6)^2 - (3,6)^2$ و منه : $MP^2 = 23,04$

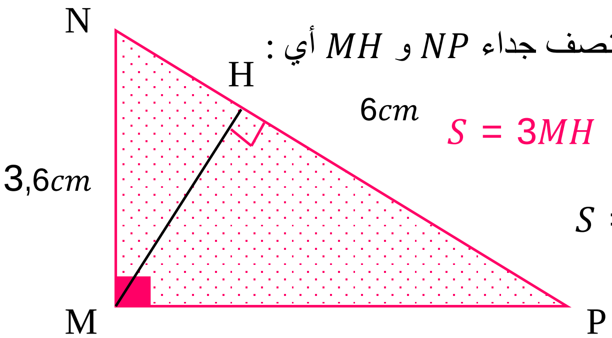
و منه : $MP = \sqrt{23,04} = 4,8$ إذن : $MP = 4,8cm$

لتكن S مساحة المثلث MNP

$$S = \frac{MN \times MP}{2} = \frac{3,6 \times 4,8}{2} = \frac{17,28}{2} = 8,64$$

إذن مساحة المثلث MNP تساوي $8{,}64cm^2$

3) لنعبر عن مساحة المثلث MNP بدلالة MH :



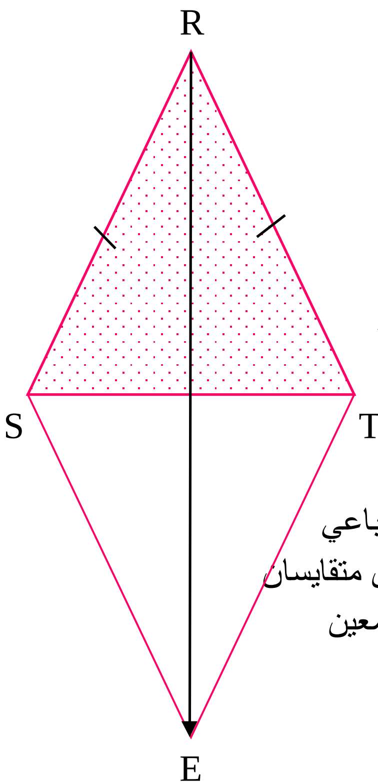
مساحة المثلث MNP تساوي نصف جداء NP و MH أي :

$S = \frac{NP \times MH}{2} = \frac{6MH}{2}$ أي : $S = 3MH$

في المقابل لدينا $S = 8{,}64cm^2$

و منه : $3MH = 8{,}64$ أي : $MH = \frac{8{,}64}{3}$ فنجد : $MH = 2{,}88cm$

حل التمرين الرابع :



1) إنشاء النقطة E حيث $\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT}$:

لجمع شعاعين لهما نفس المبدأ نطبق
قاعدة متوازي الأضلاع، حيث النقطة

E هي الرأس الرابع للمتوازي الأضلاع $RSET$

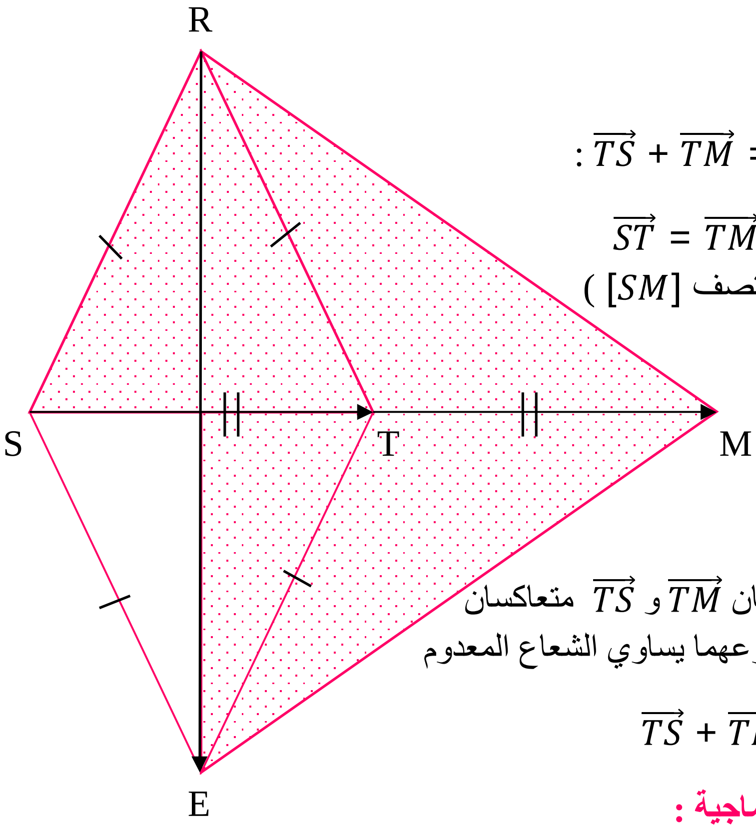
2) لنبين أن الرباعي $RSET$ معين :

لدينا المثلث RST متساوي الساقين رأسه الأساسي R، يعني أن $RS = RT$ ، و كون الرباعي $RSET$ متوازي أضلاع فيه كل ضلعان متتاليان متقايسان معناه : $RS = SE = TE = RT$ ، إذن هو معين

3) إنشاء النقطة M حيث $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{TM}$:

$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{TM}$ معناه أن النقطة T منتصف $[SM]$

إذن نعين النقطة M بحيث تكون النقطة T منتصف القطعة $[SM]$



4) لنثبت أن $\overrightarrow{TS} + \overrightarrow{TM} = \vec{0}$:

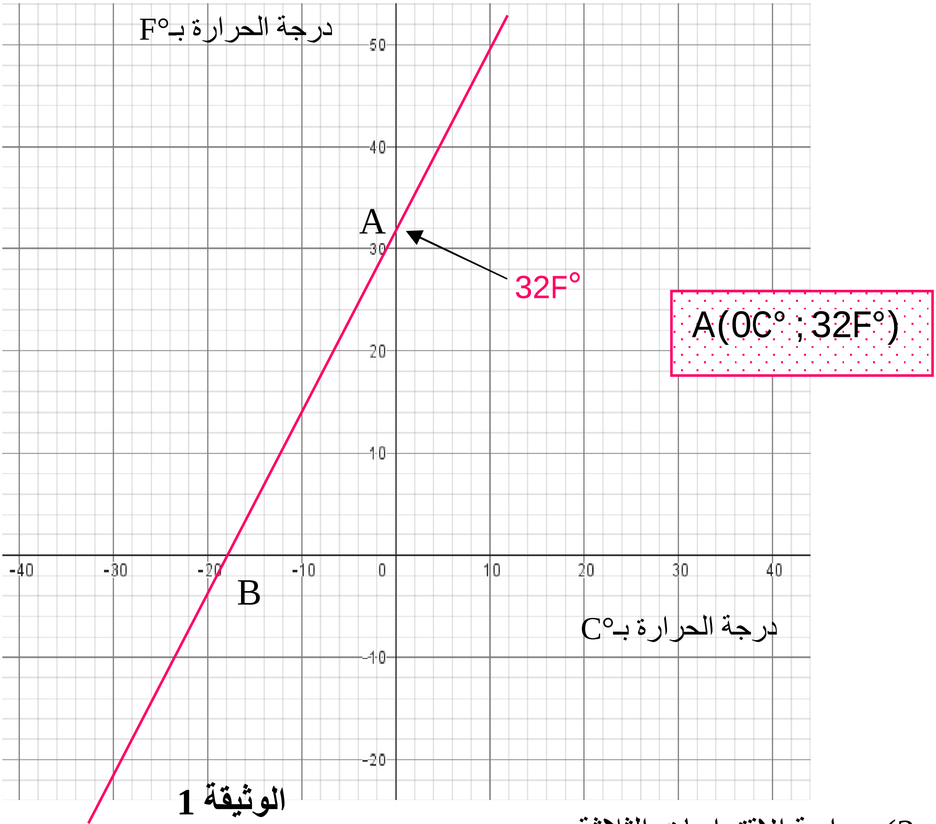
لدينا مما سبق أن $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{TM}$
(لأن النقطة T منتصف $[SM]$)

نستنتج أن الشعاعان $\overrightarrow{TM}$ و $\overrightarrow{TS}$ متعاكسان
ما يعني أن مجموعهما يساوي الشعاع المعدوم

و بالتالي $\overrightarrow{TS} + \overrightarrow{TM} = \vec{0}$

حل الوضعية الإدماجية :

1) نظرا لأن المنحنى الذي يمثل درجة الحرارة بوحدة (F°) ليس مستقيما يمر من مبدأ المعلم، فإننا نستنتج أنه لا توجد تناسبية بين درجة الحرارة بوحدة السلسيوس(C°) و درجة الحرارة بوحدة الفهرنهايت (F°)



الوثيقة 1

2) دراسة الاقتراحات الثلاثة :

بقراءة بيانية،

لدينا ، $10C°$ توافق $50F°$، يعني °10 بوحدة السلسيوس توافق °50 بوحدة الفهرنهايت، و حسب الاقتراح الأول لدينا $f(10) = 10 + 32 = 42 \neq 50$

إذن الاقتراح الأول خاطئ

و لدينا أيضا، $0C°$ توافق $32F°$ ، يعني °0 بوحدة السلسيوس توافق °32 بوحدة الفهرنهايت،وحسب الاقتراح الثالث لدينا $f(0) = 2 \times 0 + 30 = 30 \neq 32$

إذن الاقتراح الثالث خاطئ

بعملية الإلغاء، نجد الاقتراح المتبقي هو الاقتراح الثاني أي $f(x) = 1{,}8x + 32$

3) حساب $f(10)$ و $f(-40)$:

$$f(10) = 1{,}8 \times 10 + 32 = 50$$
$$f(-40) = 1{,}8 \times (-40) + 32 = -72 + 32 = -40$$

4) اعتمادا على الجواب (3) وجدنا أن $f(-40) = -40$، هذا يعني أنه توجد قيمة بحيث درجة الحرارة المعبرة بوحدة السلسيوس تساوي درجة الحرارة المعبرة بوحدة الفهرنهايت، و منه $-40C° = -40F°$

الموضوع الثالث

التمرين الأول :

لتكن العبارة B حيث : $B = 4(5x-2)^2 + 25x^2 - 4$

1) أنشر و بسط العبارة B

2) حلل $25x^2 - 4$ ثم استنتج تحليلا للعبارة B

3) حل المتراجحة $B < 125x^2 - 68$

التمرين الثاني :

لتكن $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ و ليكن EFG مثلث حيث :

$$EF = 6cm \;;\; EG = 8cm \;;\; FG = 10cm$$

1) بين أن المثلث EFG قائم في نقطة يطلب تعيينها

2) أحسب مساحة هذا المثلث

3) نضع : $EF = a \,;\; EG = b \,;\; FG = c$ و ليكن p نصف محيط المثلث EFG

⇐ أحسب $\mathcal{A}$

⇐ ماذا تلاحظ؟ و ماذا تعرف عن $\mathcal{A}$ ؟

التمرين الثالث :

في معلم متعامد و متجانس وحدته $1cm$

1) علم النقط $A(1\,;-3)\,;\ B(5\,;5)\,;\ C(-5\,;0)$

2) أحسب الأطوال AB، AC و BC ثم بين أن المثلث ABC قائم في A

3) أحسب إحداثيتا النقطة M منتصف $[BC]$

4) ليكن $[AE]$ الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$

$\Leftarrow$ أحسب مساحة المثلث ABC

$\Leftarrow$ استنتج القيمة المضبوطة للطول AE

التمرين الرابع :

f دالة تألفية بحيث : $f(0) = 2$ و $f(1) = 5$

1) أحسب المعاملين a و b

2) عين العبارة الجبرية للدالة f

3) عين العدد الذي صورته بالدالة f هي 5

الوضعية الإدماجية : الوحدة هي المتر m

في إيطار المنافسة الرياضية بين أقسام السنة الرابعة متوسط, أراد أستاذ الرياضة إجراء مقابلة بين القسمين $4م_1$ و $4م_2$, فقبل نصف ساعة قسم الأستاذ القاعة عشوائيا إلى جزأين لغرض إجراء التسخينات كما هو موضح في الشكل أسفله :

الجزء الأول :

نضع $DM = x$

1) ما هي قيم x الممكنة؟

2) لتكن $f(x)$ مساحة المثلث BCM و $g(x)$ مساحة الجزء $ABMD$

أ) عبر عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة x

تدخل قائد فريق القسم 4م1 و طالب من الأستاذ تقسيم القاعة إلى جزأين متساويين من حيث المساحة

ب) ساعد الأستاذ لإيجاد الطول DM حتى يكون للجزأين نفس المساحة

الجزء الثاني :

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

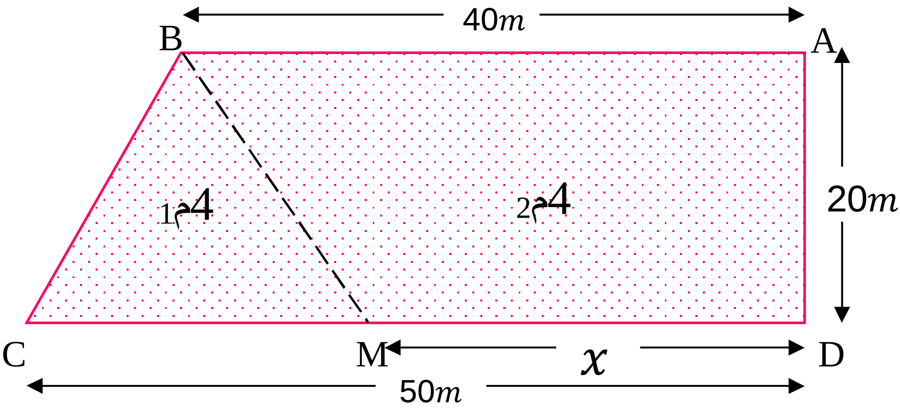
1) مثل بيانيا الدالتين :

$$g(x) = 10x + 400 \quad ; \quad f(x) = 500 - 10x$$

نأخذ : $1cm$ على محور الفواصل يمثل $2m$

$1cm$ على محور التراتيب يمثل $50m^2$

فسر بيانيا مساعدتك السابقة للأستاذ مع تحديد قيمة المساحة في هذه الحالة



الحل المفصل للموضوع الثالث

حل التمرين الأول :

1) نشر و تبسيط العبارة B :

$B = 4(5x - 2)^2 + 25x^2 - 4$

$B = 4((5x)^2 - 2 \times 5x \times 2 + 2^2) + 25x^2 - 4$

$B = 4(25x^2 - 20x + 4) + 25x^2 - 4$

$B = 100x^2 - 80x + 16 + 25x^2 - 4$

$B = 100x^2 + 25x^2 - 80x + 16 - 4$

$B = 125x^2 - 80x + 12$

2) تحليل $25x^2 - 4$:

لدينا : $25x^2 - 4 = (5x)^2 - (2)^2$ و هي من الشكل $a^2 - b^2$ ، إذن نكتب $25x^2 - 4$ على الشكل $(a + b)(a - b)$ أي :

$$25x^2 - 4 = (5x)^2 - (2)^2 = (5x + 2)(5x - 2)$$

تحليل العبارة B :

اعتمادا على الجواب السابق، تصبح العبارة B :

$(5x - 2)^2 = (5x - 2)(5x - 2)$

$B = 4(5x - 2)^2 + 25x^2 - 4$

$B = 4(5x - 2)^2 + (5x + 2)(5x - 2)$

$B = 4(5x - 2)(5x - 2) + (5x + 2)(5x - 2)$

$B = (5x - 2)[4(5x - 2) + (5x + 2)]$

$B = (5x - 2)(20x - 8 + 5x + 2)$

$B = (5x - 2)(25x - 6)$

العامل المشترك
هو $(5x - 2)$

3) لنحل المتراجحة $B < 125x^2 - 68$:

$B < 125x^2 - 68$ معناه : $125x^2 - 80x + 12 < 125x^2 - 68$

معناه : $125x^2 - 125x^2 - 80x < -68 - 12$

معناه : $-80x < -80$

نقسم طرفي المتراجحة $-80x < -80$ على العدد السالب (-80) فنحصل على متراجحة جديدة مختلفة الاتجاه أي : $\frac{-80}{-80} > \frac{-80x}{-80}$ فنجد : $x > 1$، ينتج أن حلول المتراجحة $B < 125x^2 - 68$ هي كل الأعداد x الأكبر من 1

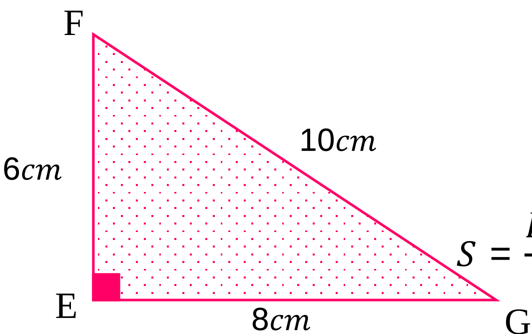
حل التمرين الثاني :

1) إثبات أن المثلث EFG قائم :

أطول ضلع في المثلث EFG هو $[FG]$ ، و منه : $FG^2 = 10^2 = 100$ و لدينا أيضا :

$EF^2 + EG^2 = (6)^2 + (8)^2 = 36 + 64$ أي : $EF^2 + EG^2 = 100$

و بما أن $FG^2 = EF^2 + EG^2$ فإن المثلث EFG قائم في النقطة E حسب النظرية العكسية لنظرية فيثاغورث.



2) حساب مساحة المثلث EFG :

لتكن S مساحة هذا المثلث، حيث

$$S = \frac{EF \times EG}{2} = \frac{6 \times 8}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

إذن مساحة المثلث EFG تساوي $S = 24cm^2$

3) حساب العدد $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ مع $a = 6cm$، $b = 8cm$ و $c = 10cm$ و p هو نصف محيط المثلث EFG

أي : $p = \frac{6+8+10}{2} = \frac{24}{2} = 12$ و منـــــــــــــــــــــــــه :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)}$$
$$= \sqrt{12 \times 6 \times 4 \times 2}$$
$$= \sqrt{576}$$
$$= 24$$

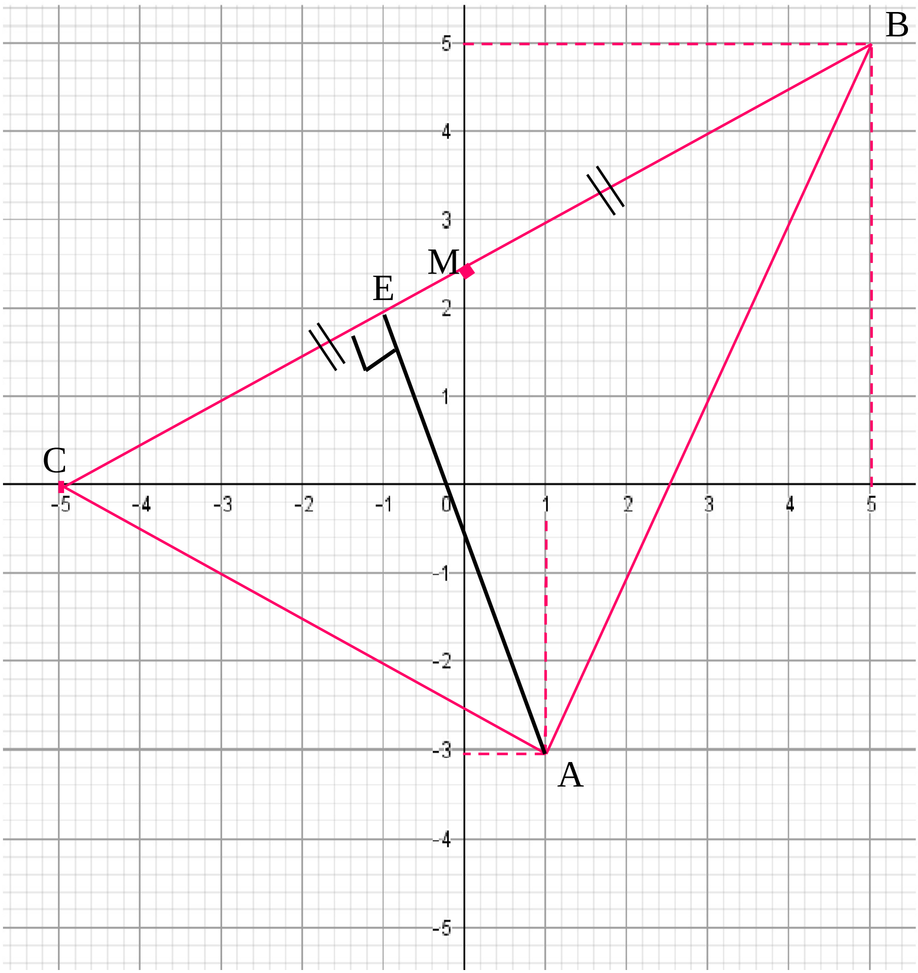
نلاحظ أن $S = \mathcal{A}$ يعني أن $\mathcal{A}$ يساوي مساحة المثلث EFG

$\mathcal{A}$ هي صيغة رياضية تستخدم لحساب مساحة المثلث من خلال معرفة أطوال أضلاعه الثلاثة، توصل إليها العالم اليوناني **هيرون الكسندري** و المعروف بـ هيرو.

هيرو هو عالم يوناني، يقال أنه ولد حوالي العام 150 قبل الميلاد في مصر القديمة و منهم من يقول أنه ولد عام 250 قبل الميلاد هناك اختلاف كبير على تاريخ ميلاده، لكن ملا خلاف عليه أنه قدم لنا 14 كتابا معروفا، حيث كان يكتب باللغات اليونانية و اللاتينية و العربية و كان من أشهر كتبه **كتاب المقاييس.**

حل التمرين الثالث :

1) تعليم النقط :



2) حساب الأطوال :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + \left(5-(-3)\right)^2}$$

$$AB = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5}$$

$$AB = 4\sqrt{5}$$

إذن : $AB = 4\sqrt{5}cm$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

$$AC = \sqrt{(-5-1)^2 + \left(0-(-3)\right)^2}$$

$$AC = \sqrt{(6)^2 + (3)^2} = \sqrt{45} = \sqrt{9} \times \sqrt{5}$$

$$AC = 3\sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-5-5)^2 + (0-5)^2}$$

$$BC = \sqrt{(-10)^2 + (-5)^2} = \sqrt{125} = \sqrt{25} \times \sqrt{5}$$

$$BC = 5\sqrt{5}$$

لدينا : $BC^2 = \left(\sqrt{125}\right)^2 = 125$ و لدينا أيضا :

$$AB^2 + AC^2 = \left(\sqrt{80}\right)^2 + \left(\sqrt{45}\right)^2 = 80 + 45$$

أي : $AB^2 + AC^2 = 125$

ومنـــــــــــه : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ، إذن حسب النظرية العكسية لنظرية فيثاغورث فإن المثلث ABC قائم في A

3) حساب إحداثيتا M منتصف $[BC]$:

$M(x_M ; y_M)$ منتصف $[BC]$ معناه أن :

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5 + (-5)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5 + 0}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

و منه إحداثيتا النقطة هما : $M(0 ; \frac{5}{2})$

4) مساحة المثلث ABC :

لتكن S مساحة المثلث ABC

$$S = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{4\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}}{2} = \frac{(4 \times 3) \times (\sqrt{5})^2}{2}$$

$$= \frac{12 \times 5}{2} = \frac{12}{2} \times 5$$

$$= 30$$

إذن مساحة المثلث ABC هي $30cm^2$

⇐ القيمة المضبوطة للطول AE :

$[AE]$ ارتفاع متعلق بالضلع $[BC]$ معناه : $S = \frac{AE \times BC}{2} = \frac{AE \times 5\sqrt{5}}{2} = 30$

و منه : $AE \times 5\sqrt{5} = 30 \times 2$

و منه : $AE \times 5\sqrt{5} = 60$

و منه : $AE = \frac{60}{5\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$

أي : $AE = \frac{12\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

إذن : $AE = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

حل التمرين الرابع :

1) تعيين المعاملين a و b :

نحسب a باستعمال تناسبية التزايدات

$$a = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{5 - 2}{1 - 0} = \frac{3}{1} = 3$$

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

f تألفية معناه أن : $f(x) = ax + b$ أي : $f(x) = 3x + b$

من جهة أخرى لدينا : $f(0) = 2$ أي : $3 \times 0 + b = 2$ أي : $b = 2$

2) العبارة الجبرية للدالة التألفية f من الشكل : $f(x) = ax + b$ و نستنتج مما سبق أن :

$$f(x) = 3x + 2$$

3) حساب العدد الذي صورته بالدالة f هي 5 :

ليكن x عدد صورته بالدالة f هي 5، معناه : $f(x) = 5$

معناه : $3x + 2 = 5$

معناه : $3x = 5 - 2$

معناه : $3x = 3$ و منـــــــــه : $x = 1$

لتعيين العدد x الذي صورته k بالدالة f نحل المعادلة :

$$f(x) = k$$

حل الوضعية الإدماجية :

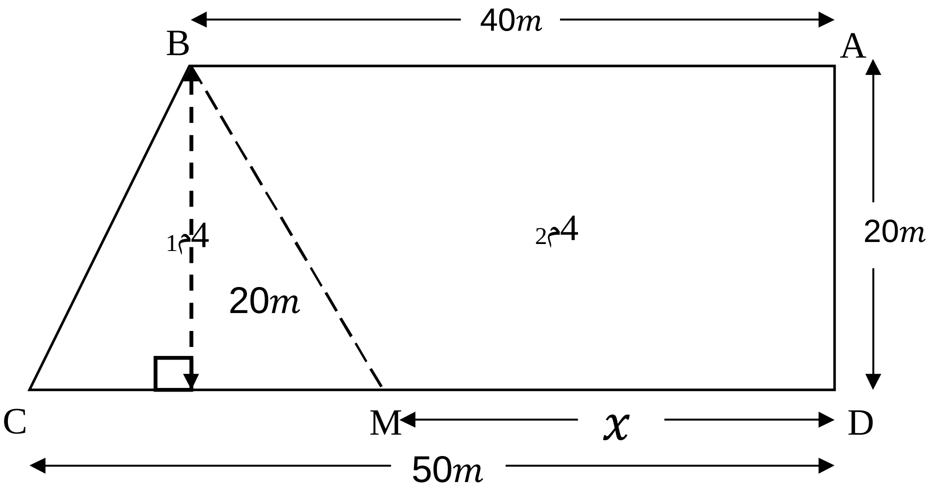
الجزء الأول :

1) القيمة الممكنة لـ x :

لدينا $DM = x$ ، و M نقطة متغيرة من $[CD]$ مع $CD = 50cm$

و منه : أصغر قيمة لـ x هي $0cm$ و أكبر قيمة لـ x هي $50cm$ ، و بالتالي : $0 \leq x \leq 50$

2) التعبير عن $f(x)$ و $g(x)$:



$f(x)$ هي مساحة المثلث BCM الذي ارتفاعه $[AD]$ و منـــــــــه :

$$f(x) = \frac{AD \times CM}{2} = \frac{AD \times (CD - MD)}{2}$$

$$CM = CD - MD$$
$$= 50 - x$$

$$= \frac{20(50 - x)}{2} = 500 - 10x$$

و منـــــــــــــه : $f(x) = 500 - 10x$

القاعدة الصغرى

القاعدة الكبرى

$g(x)$ هي مساحة الشبه المنحرف $ABMD$:

$$g(x) = \frac{(AB + MD) \times AD}{2} = \frac{(40 + x) \times 20}{2}$$

$$= \frac{800 + 20x}{2} = 400 + 10x$$

مساحة الشبه المنحرف تساوي نصف جداء الارتفاع و مجموع قاعدتيه الكبرى و الصغرى

و منـــــــــــــه : $g(x) = 400 + 10x$

3) مساعدة الأستاذ لإيجاد الطول DM حتى يكون للجزأين نفس المساحة :

إيجاد DM تعني إيجاد x ، للجزئيين نفس المساحة معناه أن : $f(x) = g(x)$

معناه : $500 - 10x = 400 + 10x$

معناه : $500 - 400 = 10x + 10x$

أي : $100 = 20x$ و منـــــــــــــه : $x = 5$

و بالتالي كي يكون للجزأين BCM و $ABMD$ نفس المساحة يجب أن يكون

$DM = 5m$

الجزء الثاني :

1) تمثيل الدالتين f و g :

$$(d): y_1 = 500 - 10x$$

$$f(0) = 500 - 10 \times 0 = 500$$
$$f(10) = 500 - 10 \times 10 = 400$$

x	0	10
y	500	400
$(x\,;y)$	$A(0\,;500)$	$B(10\,;400)$

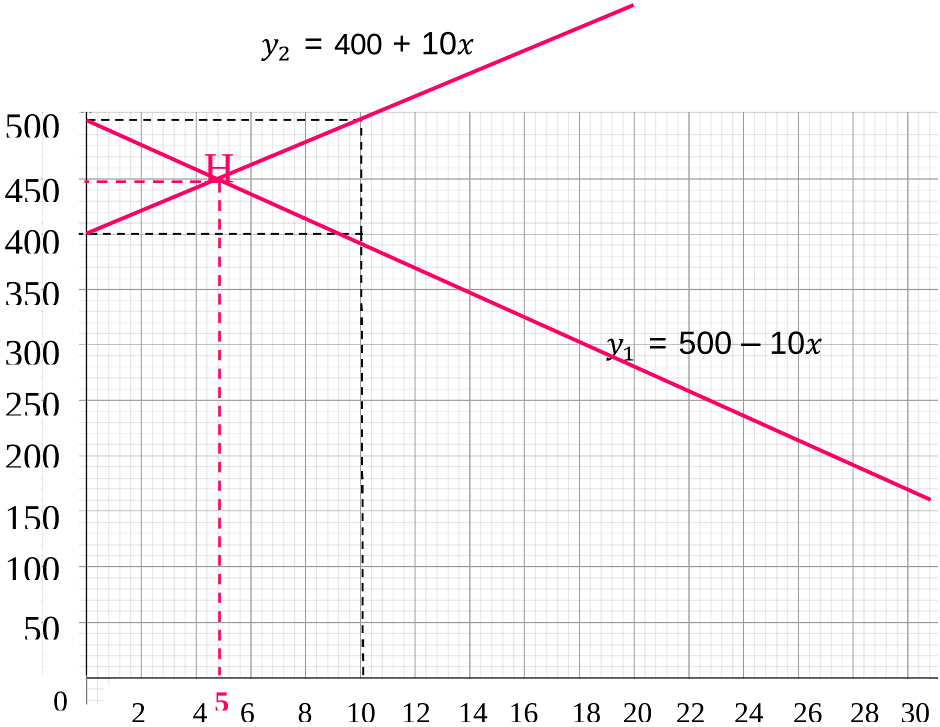
التمثيل البياني للدالة التألفية f هو المستقيم (d) الذي يمر من النقطتين $A(0\,;500)$ و $B(10\,;400)$

$$(d'):\ y_2 = 400 + 10x$$

$$g(0) = 400 + 10 \times 0 = 400$$
$$g(10) = 400 + 10 \times 10 = 500$$

x	0	10
y	400	500
$(x\,;y)$	$C(0\,;400)$	$D(10\,;500)$

التمثيل البياني للدالة التألفية g هو المستقيم (d') الذي يمر من النقطتين $C(0\,;400)$ و $D(10\,;500)$



2) التفسير البياني للمساعدة السابقة للأستاذ مع قيمة المساحة في هذه الحالة :

حسابيا يكون للجزأين BCM و $ABMD$ نفس المساحة من أجل $DM = 5m$

بيانيا : المستقيمين الممثلين للدالتين f و g يتقاطعان في النقطة $H(5\,;450)$ ،

أي في النقطة $x = 5$ ، و تبلغ قيمة المساحة في هذه الحالة $450m^2$.

الموضوع الرابع

التمرين الأول :

1) أنشر وبسط العبارة : $C = 20x^2 - 60x + 45 - (2x - 3)(x + 7)$

2) حلل $20x^2 - 60x + 45$

$\Leftarrow$ استنتج تحليلا للعبارة C

3) حل المعادلة $C = 0$

التمرين الثاني :

1) حل الجملة التالية :

$$\begin{cases} 8x + 3y = 39,5 \\ 7x + 9y = 50,5 \end{cases}$$

2) وكالة سياحية تقترح على زبائنها عرضين للذهاب في رحلة سياحية على شكل أفواج، العرض الأول يتكون الفوج من 8 أشخاص و 3 أطفال بسعر 3950دج، بينما العرض الثاني يتكون الفوج من 7 أشخاص و 9 أطفال بسعر 5050دج.

$\Leftarrow$ ما هي ثمن التذكرة الواحدة للشخص؟ و ثمن التذكرة الواحدة للطفل؟

التمرين الثالث :

f دالة حيث : $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$

1) ما طبيعة الدالة f ؟

2) ما هي صور العدد $\frac{3}{2}$ بالدالة f ؟

3) ما هو العدد الذي صورته بالدالة f هي 1؟

التمرين الرابع :

ليكن a قيس زاوية، بين أن : $(\cos a + \sin a)^2 = 1 + 2\cos a \times \sin a$

الوضعية الإدماجية :

يتقاضى مهندس في مؤسسة ابتكار البرمجيات أجرة شهرية قدرها 40000دج، و علاوة تقدر بـ500دج عن كل برمجية يبتكرها.

ليكن x عدد البرمجيات المبتكرة خلال شهر و $f(x)$ الراتب الشهري

1) أكمل الجدول الأتي :

x	1	4	8	12
y				

2) عبر عن $f(x)$ بدلالة x

3) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس، مثل بيانيا الدالة f

نعطي $1cm$ على محور الفواصل يمثل برمجيتين، $1cm$ على محور التراتيب يمثل 10000دج

3) أحسب عدد البرمجيات التي يبتكرها المهندس إذا كان راتبه الشهري 45000دج

4) عادة ما يكون الراتب الشهري للمهندس 45000دج، و لسبب ما لم يبتكر إلا 80% من عدد البرمجيات المعتادة.

$\Leftarrow$ فما هو عدد البرمجيات التي ابتكرها هذا المهندس؟

$\Leftarrow$ ما هو رابته الشهري في هذه الحالة؟

الحل المفصل للموضوع الرابع

حل التمرين الأول :

1) نشر و تبسيط العبارة C :

$$C = 20x^2 - 60x + 45 - (2x - 3)(x + 7)$$
$$C = 20x^2 - 60x + 45 - [2x(x + 7) - 3(x + 7)]$$
$$C = 20x^2 - 60x + 45 - (2x^2 + 14x - 3x - 21)$$
$$C = 20x^2 - 60x + 45 - (2x^2 + 11x - 21)$$
$$C = 20x^2 - 60x + 45 - 2x^2 - 11x + 21$$
$$C = 18x^2 - 71x + 66$$

2) لنحلل $20x^2 - 60x + 45$:

$$20x^2 - 60x + 45 = 5(4x^2 - 12x + 9)$$
$$= 5((2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2)$$

أي أن هذه العبارة من الشكل $5(a^2 - 2ab + b^2)$ ، فتحليلها يكون من الشكل : $5(a - b)^2$ أي : $5(2x - 3)^2$

و منــــــــــــــــــــه : $20x^2 - 60x + 45 = 5(2x - 3)^2$

⇐ تحليل العبارة C :

لدينا مما سبق أن : $20x^2 - 60x + 45 = 5(2x - 3)^2$ و منه تصبح العبارة C :

$$C = 20x^2 - 60x + 45 - (2x - 3)(x + 7)$$
$$C = 5(2x - 3)^2 - (2x - 3)(x + 7)$$
$$C = 5(2x - 3)(2x - 3) - (2x - 3)(x + 7)$$
$$C = (2x - 3)[5(2x - 3) - (x + 7)]$$
$$C = (2x - 3)[10x - 15 - x - 7]$$
$$C = (2x - 3)(9x - 22)$$

العامل المشترك هو $(2x - 3)$

3) حل المعادلة $C = 0$:

$C = 0$ معناه : $(2x-3)(9x-22) = 0$

ينتج من هذه المعادلة أن : $9x - 22 = 0$ أو $2x - 3 = 0$

$(9x-22) = 0$ أي : $9x = 22$ ومنـــــــــه : $x = \frac{22}{9}$

$(2x-3) = 0$ أي : $2x = 3$ ومنـــــــــه : $x = \frac{3}{2}$

إذن للمعادلة $C = 0$ حلان و هما : $\frac{22}{9}$ و $\frac{3}{2}$

حل التمرين الثاني :

1) لنحل الجملة :

$$\begin{cases} 8x + 3y = 39{,}5 & (1) \\ 7x + 9y = 50{,}5 & (2) \end{cases}$$

نحل هذه الجملة بطريقة الجمع و التعويض :

للتخلص من y نضرب طرفي المعادلة الأولى في (-3) فنحصل على الجملة :

$$\begin{cases} -24x - 9y = -118{,}5 & (1) \\ 7x + 9y = 50{,}5 & (2) \end{cases}$$

بجمع طرفا لطرف المعادلتين نجد :

$-24x - 9y + 7x + 9y = -118{,}5 + 50{,}5$ أي : $-17x = -68$

و منـــــــــه : $x = 4$

نعوض x بـ4 في إحدى المعادلتين فنجد : $8 \times 4 + 3y = 39{,}5$

أي : $32 + 3y = 39,5$

أي : $3y = 7,5$ و منــــــــــــــــــــه : $y = 2,5$

إذن الثنائية $(4\ ;\ 2,5)$ هي حل للجملة المعطاة.
2) حساب ثمن التذكرة الواحدة للشخص و ثمن التذكرة الواحدة للطفل :

ليكن x ثمن التذكرة الواحدة للشخص، إذن ثمن 8 تذاكر هي $(8x)DA$ و ثمن 7 تذاكر هو $(7x)DA$

و y ثمن التذكرة الواحدة للطفل، إذن ثمن 3 تذاكر هي $(3y)DA$ و ثمن 9 تذاكر هو $(9y)DA$

حسب العرض الأول، المبلغ الإجمالي لـ8 تذاكر للأشخاص و 3 تذاكر للأطفال هو 3950دج، يعني أن : $8x + 3y = 3950$

و حسب العرض الثاني، المبلغ الإجمالي لـ7 تذاكر للأشخاص و 9 تذاكر للأطفال هو 5050دج، يعني أن : $7x + 9y = 5050$

لدينا الجملة :

$$\begin{cases} 8x + 3y = 3950 & (1) \\ 7x + 9y = 5050 & (2) \end{cases}$$

أي :

$$\begin{cases} 8x + 3y = 39,50 \times 100 & (1) \\ 7x + 9y = 50,50 \times 100 & (2) \end{cases}$$

حسب الجواب السابق فإن حل الجملة

$$\begin{cases} 8x + 3y = 39,50 & (1) \\ 7x + 9y = 50,50 & (2) \end{cases}$$

هي الثنائية : $(4\ ;\ 2,5)$

ينتج أن حل الجملة

$$\begin{cases} 8x + 3y = 3950 & (1) \\ 7x + 9y = 5050 & (2) \end{cases}$$

هي الثنائية : $(400 ; 250)$

إذن : ثمن التذكرة الواحدة للشخص هو 400دج و ثمن التذكرة الواحدة للطفل هو 250دج

التحقق : $8 \times 400 + 3 \times 250 = 3950$

و $7 \times 400 + 9 \times 250 = 5050$

حل التمرين الثالث :

1) الدالة f من الشكل $ax + b$ و بالتالي هي دالة تألفية

2) حساب صورة العدد $\frac{3}{2}$ بالدالة f :

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} + 1 = 1$$

صورة العدد $\frac{3}{2}$ بالدالة f هو 1

3) حساب العدد الذي صورته بالدالة f هي 1 :

x عدد صورته بالدالة f هي 1 معناه : $f(x) = 1$ أي : $\frac{2}{3}x + 1 = 1$

أي : $\frac{2}{3}x = 0$

و منـــــــــــــه : $x = 0$

حل التمرين الرابع :

1) لنبين أن $(cos\, a + sin\ a)^2 = 1 + 2\, cos\, a \times sin\ a$:

باستعمال المتطابقة $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ نجـــــــــــد أن :

$$(\cos a + \sin a)^2 = \cos^2 a + \sin^2 a + 2 \times \cos a \times \sin a$$

لكن درسنا أن : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ فينتج أن :

$$(\cos a + \sin a)^2 = 1 + 2 \times \cos a \times \sin a$$

و هو المطلوب !!

حل الوضعية الإدماجية :

1) إكمال الجدول :

x	1	4	8	12
y	40500	42000	44000	46000

x هو عدد البرمجيات المبتكرة، و y هو الراتب الشهري للمهندس

$x = 1$ معناه : $y = 500 \times 1 + 40000 = 40500$

$x = 4$ معناه : $y = 500 \times 4 + 40000 = 42000$

$x = 8$ معناه : $y = 500 \times 8 + 40000 = 44000$

$x = 12$ معناه : $y = 500 \times 12 + 40000 = 46000$

2) التعبير عن $f(x)$:

x عدد البرمجيات المبتكرة خلال شهر و $f(x)$ الراتب الشهري، يتقاضى المهندس علاوة 500دج نظير برمجية واحدة يبتكرها، أي أنه يتقاضى علاوة من أجل x برمجية مبلغ قدره $500x$دج، و منه فإن الراتب الشهري الذي سيتقاضاه هو $500x + 40000$

و منــــــــــــه : $f(x) = 500x + 40000$

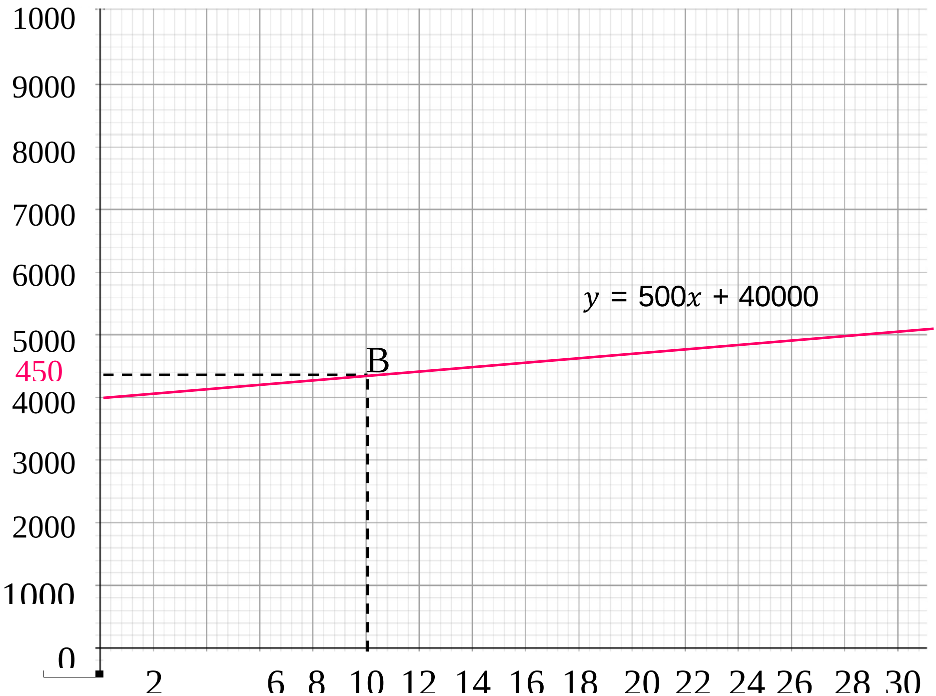
3) تمثيل الدالة f : $(D): y = 500x + 40000$

$f(x) = 500 \times 0 + 40000 = 40000$

$f(x) = 500 \times 10 + 40000 = 45000$

x	0	10
y	40000	45000
$(x\,;y)$	$A(0\,;40000)$	$B(10\,;45000)$

التمثيل البياني للدالة f هو المستقيم (D) الذي يمر من $A(0\,;40000)$ و $B(10\,;45000)$



4) حساب عدد البرمجيات التي يبتكرها المهندس إذا كان راتبه الشهري 45000دج :

عدد البرمجيات هو x، و الراتب الشهري هو y و منه :

$f(x) = 45000$ معناه : $500x + 40000 = 45000$

أي : $500x = 5000$

و منـــــــــــــــه : $x = 10$

إذن عدد البرمجيات التي يجب أن يبتكرها المهندس كي يكون راتبه الشهري 45000دج هو 10

5) عدد البرمجيات :

عدد البرمجيات التي توافق راتب شهري قدره 45000دج هو 10،

و منه : $10 \times \frac{80}{100} = 8$

الراتب الشهري في هذه الحالة هو 44000دج (أنظر الجدول في الجواب الأول)

الموضوع الخامس

التمرين الأول :

1) حلل العبارة $A = \frac{x^2}{4} - \frac{25}{9}$

2) لتكن العبارة T حيث :

$$T = 6(6x - 9) + 4(3 + 5x) - 6(11x - 7)$$

$\Leftarrow$ أحسب و بدون استعمال الحاسبة العبارة T من أجل : $x = 201{,}9$

التمرين الثاني :

h دالة تألفية حيث : $h(1) = 2$ و $h(-1) = 4$

1) أحسب المعاملين a و b بطريقتين

$\Leftarrow$ استنتج العبارة الجبرية للدالة h

التمرين الثالث :

ABC مثلث

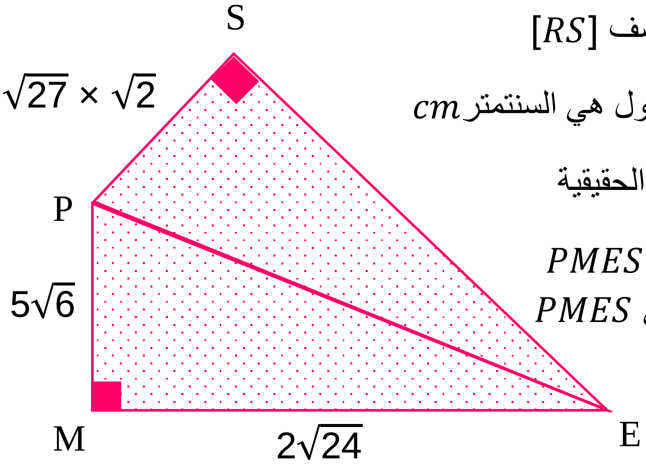
1) عين النقطتين R و S حيث : $\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{BC}$

2) بين أن $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{RA}$

$\Leftarrow$ استنتج أن A منتصف $[RS]$

التمرين الرابع : وحدة الطول هي السنتمتر cm

الشكل ليس مرسوم بأبعاده الحقيقية



1) أحسب محيط الرباعي $PMES$

2) أحسب مساحة الرباعي $PMES$

الوضعية الإدماجية :

تقدم السيد جيلالي إلى أحد المتاحف كي يشتغل فيها، فأقترح عليه مدير المتحف عرضين حول نمط التشغيل.

العرض الأول : أن يتقاضى مبلغ 800دج للساعة الواحدة

العرض الثاني : أن يتقاضى مبلغ 12000دج في الشهر مع علاوة تقدر بـ50دج للساعة الواحدة

يريد السيد جيلالي دراسة هذين العرضين

1) أنقل ثم أتمم الجدول :

		عدد الساعات التي يشتغل فيها خلال شهر	
		20	25
المبلغ الذي سيتقاضاه خلال شهر بـDA	العرض الأول		
	العرض الثاني		

2) ليكن x عدد الساعات التي اشتغل فيها السيد جيلالي خلال شهر في المتحف، عبر بدلالة x الراتب الشهري $f(x)$ الذي سيتقاضاه بالعرض الأول و $g(x)$ بالعرض الثاني

3) حل المعادلة $f(x) = g(x)$ ، ماذا يمثل ذلك الحل؟

4) في معلم متعامد و متجانس، مثل الدالتين $f(x)$ و $g(x)$

نعطي : $1cm$ على محور الفواصل يمثل $2h$ ، $1cm$ على محور التراتيب يمثل 3000دج

5) جد بيانيا أفضل عرض للسيد جيلالي إذا أراد أن يشتغل $22h$ في الشهر، ثم جد الراتب الذي سيتقاضاه بذلك العرض

6) أدرس بيانيا هذين العرضين.

الحل المفصل للموضوع الخامس

حل التمرين الأول :

1) تحليل العبارة A :

$$A = \frac{x^2}{4} - \frac{25}{9} = \frac{x^2}{2^2} - \frac{5^2}{3^2} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right)$$

العبارة من الشكل $a^2 - b^2$ و تحليلها

من الشكل $(a-b)(a+b)$

3) حساب T من أجل $x = 201{,}9$:

$$T = 6(6x - 9) + 4(3 + 5x) - 6(11x - 7)$$
$$T = 36x - 54 + 12 + 20x - 66x + 42$$
$$T = -10x$$

من أجل $x = 201{,}9$:

$$T = -10 \times 201{,}9$$
$$T = -2019$$

حل التمرين الثاني :

1) حساب المعاملين a و b :

الطريقة الأولى :

نستعمل تناسبية التزايدات لحساب المعامل a :

$$a = \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{h(-1) - h(1)}{-1 - 1} = \frac{4 - 2}{-2} = -1$$

و منــــــــــــــــــه : $h(x) = -x + b$

نحل إحدى المعادلتين $h(1) = 2$ أو $h(-1) = 4$: مثلا : $h(1) = 2$

معناه : $-1 + b = 2$ أي : $b = 2 + 1$ أي : $b = 3$

الطريقة الثانية :

بتوظيف جملة معادلتين نحسب المعاملين a و b :

h دالة تألفية، معناه أن $h(x) = ax + b$

لدينا : $\begin{cases} h(1) = 2 \\ h(-1) = 4 \end{cases}$ معناه : $\begin{cases} a + b = 2 & (1) \\ -a + b = 4 & (2) \end{cases}$

نجمع المعادلتين (1) و (2) طرفا لطرف فنجد : $a + b - a + b = 2 + 4$

أي : $2b = 6$ و منــــــــــــــــه : $b = 3$

نعوض b بقيمتها في المعادلة (1) مثلا، فنـــــجد : $a + 3 = 2$

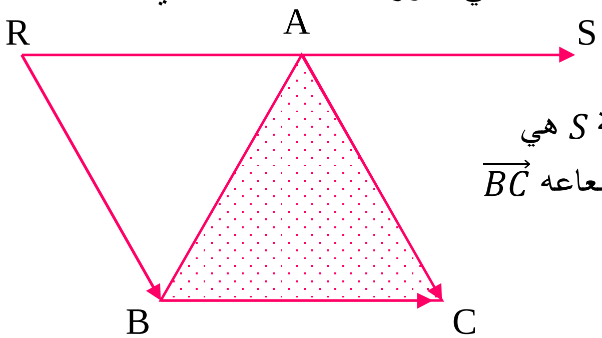
أي : $a = 2 - 3$

و منــــــــــــــــه : $a = -1$

و بالتالي فإن العبارة الجبرية للدالة h هي : $h(x) = -x + 3$

حل التمرين الثالث :

1) $\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{AC}$ يعني أن النقطة B هي صورة R بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{BC}$ يعني أن النقطة S هي صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$

2) لنبين أن $\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{AS}$:

لدينا : $\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{AC}$ ، ينتج أن الرباعي $ACBR$ متوازي أضلاع، و بالتالي فإن

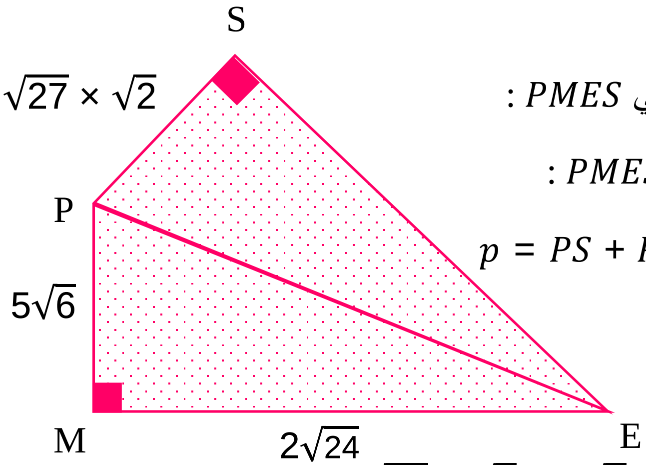
$\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{BC}$ ....(1)

من جهة أخرى لدينا $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{BC}$ ....(2)

من العلاقتين (1) و (2) نجــــــــــد أن : $\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{AS}$

⇐ بما أن $\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{AS}$ فإن النقطة A منتصف $[RS]$

حل التمرين الرابع :



1) حساب محيط الرباعي $PMES$:

ليكن p محيط الرباعي $PMES$:

$$p = PS + PM + ME + ES$$

معناه : $p = \sqrt{27} \times \sqrt{2} + 5\sqrt{6} + 2\sqrt{24} + ES$

حيث : $PS = \sqrt{27} \times \sqrt{2} = \sqrt{9 \times 3} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{3 \times 2} = 3\sqrt{6}$

و $ME = 2\sqrt{24} = 2\sqrt{4 \times 6} = 4\sqrt{6}$

و منه : $p = 3\sqrt{6} + 5\sqrt{6} + 4\sqrt{6} + ES$

$\Leftarrow$ لنحسب الطول ES :

بتطبيق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم SPE نجد :

$ES^2 = PE^2 - PS^2$ أي : $ES^2 = PE^2 - \left(3\sqrt{6}\right)^2$ ، يجب أن نحسب الطول PE أولا

و بتطبيق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم PME

نجد : $PE^2 = PM^2 + ME^2$

أي : $PE^2 = \left(5\sqrt{6}\right)^2 + \left(4\sqrt{6}\right)^2$ أي : $PE^2 = 150 + 96 = 246$

و منه : $PE = \sqrt{246}$

و منه : $ES^2 = (\sqrt{246})^2 - (3\sqrt{6})^2 = 192$

و منــــــــــــــه : $ES = \sqrt{192} = \sqrt{64 \times 3} = 8\sqrt{3}$

الطول $ES = 8\sqrt{3}cm$

إذن : $p = 3\sqrt{6} + 5\sqrt{6} + 4\sqrt{6} + 8\sqrt{3}$

و منه : $p = (3 + 5 + 4)\sqrt{6} + 8\sqrt{3}$ أي : $p = 12\sqrt{6} + 8\sqrt{3}cm$

2) حساب مساحة الرباعي $PMES$:

لتكن S مساحة الرباعي $PMES$ و S_{PME} مساحة المثلث PME، S_{PES} مساحة المثلث PES

فيكون لدينا : $S = S_{PME} + S_{PES}$

$$S_{PME} = \frac{PM \times ME}{2} = \frac{5\sqrt{6} \times 4\sqrt{6}}{2} = \frac{(5 \times 4)6^2}{2}$$

$$= \frac{20 \times 36}{2} = \frac{720}{2} = 360$$

$$S_{PES} = \frac{PS \times SE}{2} = \frac{3\sqrt{6} \times 8\sqrt{3}}{2} = \frac{(3 \times 8)\sqrt{6 \times 3}}{2}$$

$$= \frac{24\sqrt{9 \times 2}}{2} = 36\sqrt{2}$$

و منــــــــــه : $S = 360 + 36\sqrt{2}cm^2$

حل الوضعية الإدماجية :

1) إكمال الجدول :

عدد الساعات التي يشتغل فيها خلال شهر			
25	20		
20000	16000	العرض الأول	المبلغ الذي سيتقاضاه خلال شهر بـDA
13250	13000	العرض الثاني	

العرض الأول : يتقاضى مبلغ 800دج للساعة الواحدة

$$800 \times 20 = 16000 \quad ; \quad 800 \times 25 = 20000$$

العرض الثاني : يتقاضى مبلغ 12000دج في الشهر مع علاوة تقدر بـ50دج للساعة الواحدة

$$50 \times 20 + 12000 = 13000 \; ; \; 50 \times 25 + 12000 = 13250$$

2) التعبير عن $f(x)$ و$g(x)$ بدلالة x :

x هو عدد الساعات التي يشتغل فيها السيد جيلالي، و $f(x)$ المبلغ الذي سيتقاضاه بالعرض الأول :

من أجل ساعة واحد، يكون المبلغ 800دج، إذن من أجل x ساعة فإن المبلغ يكون $800x$ و بالتالي : $f(x) = 800x$

$g(x)$ هو المبلغ الذي سيتقاضاه بالعرض الثاني، من أجل ساعة واحدة يكون المبلغ :

$50 \times 1 + 12000 = 12050$ ، إذن من أجل x يكون المبلغ $50x + 12000$

و بالتالـــــــــــــــــــــي : $g(x) = 50x + 12000$

3) لنحل المعادلة $f(x) = g(x)$:

$f(x) = g(x)$ معناه : $800x = 50x + 12000$

معناه : $800x - 50x = 12000$

معناه : $750x = 12000$

نجـــــــــــد : $x = 16$

يعني عدد الساعات التي يشتغل فيها السيد جيلالي و التي يكون فيها العرضين متساويين هو 16 ساعة، و المبلغ الذي سيتقاضاه في هذه الحالة هو :

$$800 \times 16 = 50 \times 16 + 12000 = 12800$$

4) تمثيل الدالتين f و g في معلم متعامد و متجانس :

$$(D) : y_1 = 800x$$

$f(0) = 800 \times 0 = 0$

$f(10) = 800 \times 10 = 8000$

x	10
y	8000
$(x ; y)$	$A(10 ; 8000)$

إذن التمثيل البياني للدالة الخطية f هو المستقيم (D) الذي يمر من النقطة $A(10,8000)$

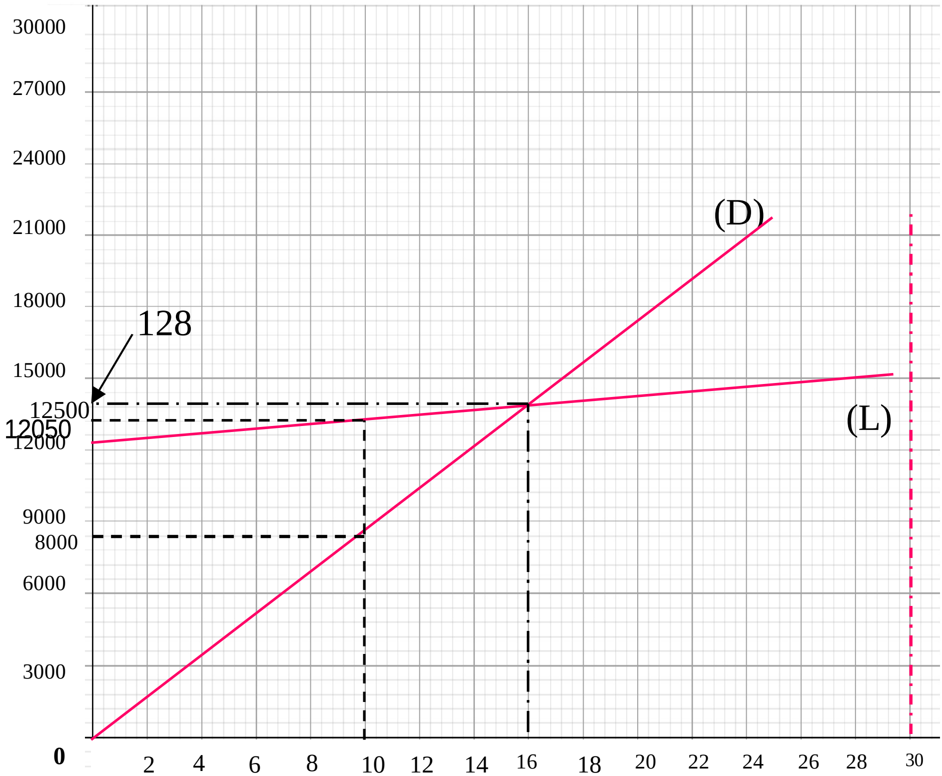
$$(L): y_2 = 50x + 12000$$

$g(0) = 50 \times 0 + 12000 = 12050$

$g(10) = 50 \times 10 + 12000 = 12500$

x	0	10
y	12050	12500
$(x ; y)$	$B(0 ; 12050)$	$C(10 ; 12500)$

التمثيل الباني للدالة التألفية g هو المستقيم (L) الذي يمر من $B(0\,;12050)$ و $C(10\,;12500)$



5) بيانيا المستقيم (L) تحت المستقيم (D) من أجل $x = 22h$ ، هذا يعني أن $f(x) > g(x)$ ، و بالتالي فإن أفضل عرض للسيد جيلالي إذا أراد أن يشتغل $22h$ هو العرض الأول.

المبلغ الذي سيتقاضاه في هذه الحالة هو $800 \times 22 = 17600$

أي : 17600دج

6) الدراسة البيانية لهذين العرضين :

من أجل $1 \leq x < 16$ يكون التمثيل البياني للدالة f تحت التمثيل البياني للدالة g، هذا يعني أن $g(x) > f(x)$، و بالتالي فإن العرض الثاني أفضل من العرض الأول إذا كان عدد الساعات التي يشتغلها السيد جيلالي أقل من 16 ساعة

من أجل $x > 16$ يكون التمثيل البياني للدالة f فوق التمثيل البياني للدالة g، هذا يعني أن $f(x) > g(x)$ ، و بالتالي فإن العرض الأول أفضل من العرض الثاني للسيد جيلالي إذا كان عدد الساعات التي يشتغلها السيد جيلالي أكبر من 16 ساعة

من أجل $x = 16$، التمثيلين البيانيين يتقاطعان في النقطة $(16 ; 12800)$ ، و بالتالي فإن العرض متساويين و كلاهما يتقاضى السيد جيلالي مبلغ 12800دج

الفصل الثالث

الموضوع الأول

التمرين الأول :

إليك العددين m و n : $n = 6 + 4\sqrt{5}$, $m = 3\sqrt{125} - 6\sqrt{20} - 1$

1) بسط العدد m ثم بين أن $m > 0$

2) بين أن : $(m-n)^2 = m \times n$

3) بين أن : $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{1}{m-n}$

التمرين الثاني :

إليك أطوال بعض لاعبي فريق كرة السلة بالسنتمتر cm :

210 ; 218 ; 195 ; 200 ; 195 ; 198 ; 188 ; 180 ; 206 ; 185 ; 187 ; 203

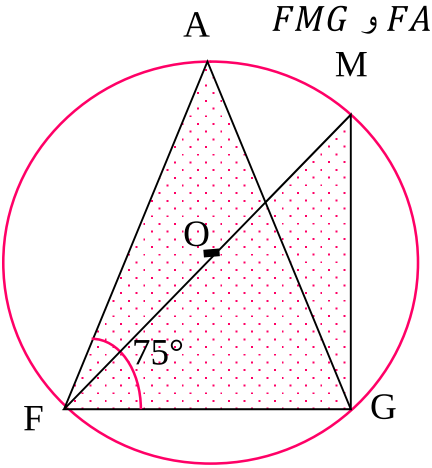
1) ما هو معدل هذه السلسلة الإحصائية؟ (بالتدوير إلى 0,01)
2) جد مدى و وسيط هذه السلسلة

التمرين الثالث :

في معلم متعامد و متجانس الذي وحدته $1cm$
1) علم النقط $B(1\,;2)$ ، $E(4\,;-1)$ و $M(5\,;3)$
2) أحسب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{BE}$
3) لتكن K منتصف $[BE]$ ، جد إحداثيتا النقطة K
4) بين أن $BM = ME$ ثم استنتج طبيعة المثلث BEM

التمرين الرابع :

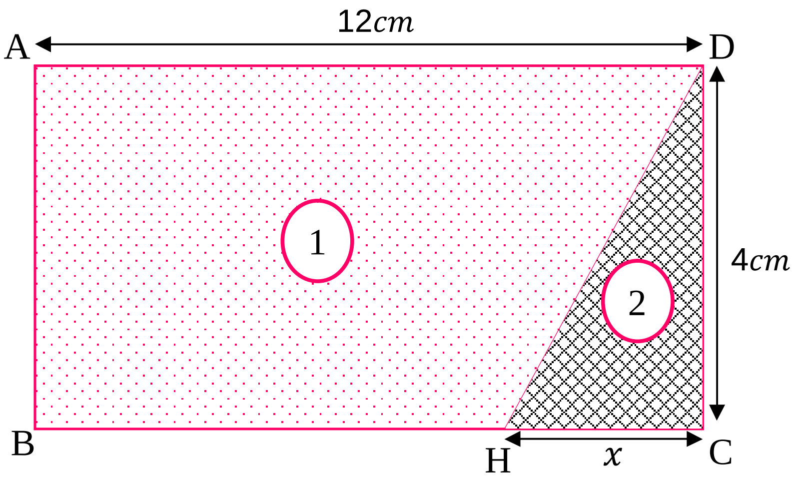
تمعن جيد في الشكل، حيث FAG مثلث متساوي الساقين في A و الدائرة (C) التي مركزها O محيطة بالمثلثين FAG و FMG



1) بين أن المثلث FMG قائم في G
2) أحسب قيس الزاوية $\widehat{FAG}$
$\Leftarrow$ استنتج قيس الزاوية $\widehat{FMG}$

الوضعية الإدماجية :

الشكل المقابل يمثل قاعة حفلات مستطيلة الشكل $ABCD$، نريد أن نخصص جزء منها لأغراض أخرى، الجزء على شكل مثلث قائم DCH



نسمي x طول HC بـm (المتر)

1) عين الدالة f التي تعبر عن مساحة الجزء 2 بدلالة x

⇐ ما طبيعة الدالة f ؟

2) عين الدالة g التي تعبر عن مساحة الجزء 1 بدلالة x

⇐ م طبيعة الدالة g ؟

3) أحسب مساحة كل جزء من أجل $x = 3,5$

⇐ جد الطول HC إذا كان مساحة الجزء 1 تساوي $30m^2$

⇐ جد الطول BH إذا كان مساحة الجزء 2 تساوي $8m^2$

4) في معلم متعامد و متجانس، مثل الدالتين f و g

5) (حيث : $1cm$ على محور الفواصل يمثل $1m$ و $1cm$ على محور التراتيب يمثل $5m^2$)

6) جد بيانيا قيم x حتى تكون مساحة الجزء 1 أقل من أو تساوي 30 متر مربع

الحل المفصل للموضوع الأول

حل التمرين الأول :

1) لنبسط العدد m :

$$m = 3\sqrt{125} - 6\sqrt{20} - 1 = 3\sqrt{25 \times 5} - 6\sqrt{4 \times 5} - 1$$
$$m = 3\sqrt{25} \times \sqrt{5} - 6 \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} - 1$$
$$m = 3 \times 5\sqrt{5} - 6 \times 2\sqrt{5} - 1$$
$$m = 15\sqrt{5} - 12\sqrt{5} - 1$$
$$m = (15 - 12)\sqrt{5} - 1$$
$$m = 3\sqrt{5} - 1$$

لنبين أن $m > 0$:

لدينا : $\sqrt{5} > 0$ و $3 > 1$ معناه أن $3 \times \sqrt{5} > 1$

و منـــــــــه : $3\sqrt{5} - 1 > 0$ و بالتالي $m > 0$

2) لنبين أن $(m - n)^2 = m \times n$:

$$m \times n = (3\sqrt{5} - 1) \times (6 + 4\sqrt{5})$$
$$= 3\sqrt{5} \times 6 + 3\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} - 1 \times 6 - 1 \times 4\sqrt{5}$$
$$= 18\sqrt{5} + (3 \times 4)\sqrt{5}^2 - 6 - 4\sqrt{5}$$
$$= 18\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 12 \times 5 - 6$$
$$= 14\sqrt{5} + 54$$

$$(m - n)^2 = (-\sqrt{5} - 7)^2 = (\sqrt{5} + 7)^2$$
$$= \sqrt{5}^2 + 2 \times \sqrt{5} \times 7 + 7^2$$
$$= 5 + 14\sqrt{5} + 49$$
$$= 14\sqrt{5} + 54$$

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

و منــــــــــــــــــه : $(m-n)^2 = m \times n = 14\sqrt{5} + 54$

3) لنبين أن $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{1}{m-n}$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{m}{m \times n} - \frac{n}{m \times n}$$
$$= \frac{m}{(m-n)^2} - \frac{n}{(m-n)^2}$$
$$= \frac{\cancel{m-n}}{(\cancel{m-n})(m-n)}$$
$$= \frac{1}{m-n}$$

لدينا $m \times n =$
$(m-n)^2$

في عملية الضرب يمكن أن
نختزل، في هذه الحالة
نختزل على $m-n$

و منـــــــــــه : $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{1}{m-n}$

حل التمرين الثاني :

1) حساب معدل هذه السلسلة :

ليكن M هو المعدل :

$$M = \frac{203 + 187 + 185 + 206 + 180 + 188 + 198 + 195 + 200 + 195 + 218 + 210}{12}$$

$$M = \frac{2365}{12}$$

$$M \approx 197{,}083$$

و منه معدل هذه السلسلة بالتدوير إلى 0,01 هو 197,08

2) تعيين مدى و وسيط هذه السلسلة :

يجب أن نرتب هذه السلسلة :

$$\underbrace{180; 185; 187; 188; 195; \quad 195}_{\boxed{\text{6 قيم}}} \; ; \; \underbrace{198 \quad ; 200; 203; 206; 210; 218}_{\boxed{\text{6 قيم}}}$$

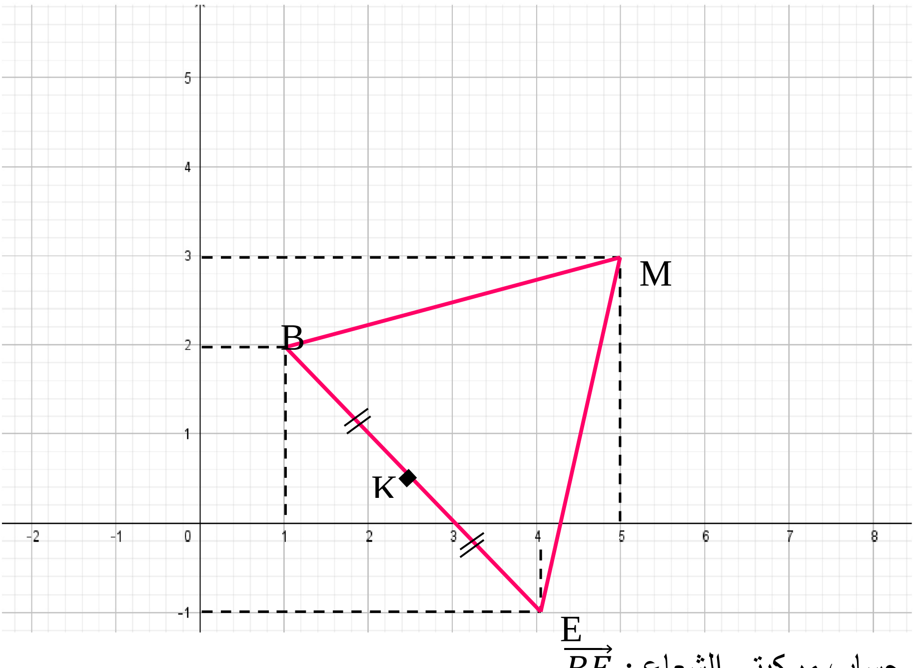
عدد قيم هذه السلسلة هو عدد زوجي، و منه القيم الوسيطية هي القيم المحصورة بين 195 و 198، و نأخذ عادة مركز القيمتين، أي : $196{,}5 = \frac{195+198}{2}$

إذن وسيط هذه السلسلة هو 196,5

مدى سلسلة هو الفرق بين أكبر و أصغر قيمة لها، أي : $218 - 180 = 38$

حل التمرين الثالث :

1) تعليم النقط :



2) حساب مركبتي الشعاع : $\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} x_E - x_B \\ y_E - y_B \end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 4-1 \\ -1-2 \end{pmatrix}$ و منـــــــه : $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

3) إحداثيتا النقطة K :

$K(x\,;y)$ منتصف $[BE]$ معناه :

$$x_K = \frac{x_B + x_E}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$y_K = \frac{y_B + y_E}{2} = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

إذن إحداثيتا النقطة K هما $K\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$

4) لنبين أن $BM = ME$:

$$ME = \sqrt{(x_E - x_M)^2 + (y_E - y_M)^2}$$

$$ME = \sqrt{(4-5)^2 + (-1-3)^2}$$

$$ME = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16}$$

$$ME = \sqrt{17}$$

$$BM = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2}$$

$$BM = \sqrt{(5-1)^2 + (3-2)^2}$$

$$BM = \sqrt{(4)^2 + (1)^2} = \sqrt{16+1}$$

$$BM = \sqrt{17}$$

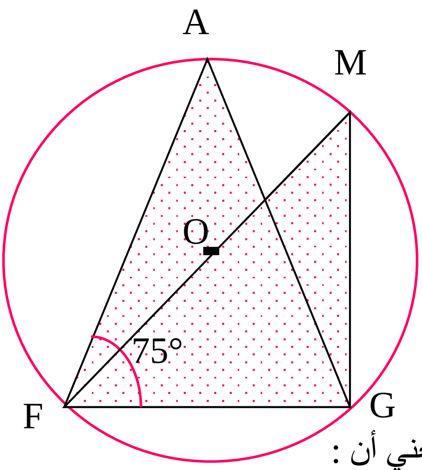
و منــــــــــــه : $BE = BM = \sqrt{17}cm$

⇐ نوع المثلث BEM :

$$BE = \sqrt{(x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$$

$$BE = \sqrt{18}$$

بما أن $BM = ME$ فإن المثلث BEM متساوي الساقين في M



حل التمرين الرابع :

1) لنبين أن المثلث FMG قائم في G :

لدينا $[BM]$ قطر للدائرة (C) المحيطة بالمثلث FMG، و منه نستنتج أن المثلث FMG قائم في G

2) لنحسب قيس الزاوية : $\widehat{FAG}$

المثلث FAG متساوي الساقين في A، هذا يعني أن :

$\widehat{AFG} = \widehat{AGF} = 75°$ و منـــــه : $\widehat{FAG} + \widehat{AFG} + \widehat{AGF} = 180°$

أي : $\widehat{FAG} + 75° + 75° = 180°$ أي : $\widehat{FAG} = 180° - 150°$

نجـــد : $\widehat{FAG} = 30°$

3) قيس الزاوية $\widehat{FMG}$:

إذا كان زاويتان محيطيتان في دائرة تحصران نفس القوس فهما متقايستان

بما أن الزاوية $\widehat{FAG}$ و $\widehat{FMG}$ زاويتان محيطيتان في الدائرة (C) و تحصران نفس القوس $\widehat{FG}$ فإن : $\widehat{FMG} = \widehat{FAG} = 30°$

حل الوضعية الإدماجية :

1) تعيين الدالة f التي تعبر عن مساحة الجزء 2 بدلالة x :

الجزء 2 عبارة عن مثلث قائم في C، و منــــه :

$$f(x) = \frac{4 \times x}{2} = 2x$$

إذن : $f(x) = 2x$

الدالة f من الشكل $f(x) = ax$ ، و بالتالي هي دالة خطية

2) تعيين الدالة g التي تعبر عن مساحة الجزء 1 بدلالة x :

لتكن S_{ABCD} مساحة القاعة $ABCD$ ، S_{DCH} مساحة الجزء 2 :

$$\begin{aligned} g(x) &= S_{ABCD} - S_{DCH} \\ &= AD \times DC - 2x \\ &= 12 \times 4 - 2x \\ &= 48 - 2x \end{aligned}$$

إذن : $g(x) = 48 - 2x$

كما يمكن تعيين الدالة g انطلاقا من مساحة الشبه المنحرف $ABHD$.

الدالة g من $g(x) = ax + b$ ، و بالتالي هي دالة تألفية.

3) حساب مساحة كل جزء من أجل $x = 3{,}5$:

مساحة الجزء 2 : $f(3{,}5) = 2 \times 3{,}5 = 7$

مساحة الجزء 1 : $g(3{,}5) = 48 - 2 \times 3{,}5 = 48 - 7 = 41$

⇐ حساب الطول HC :

لدينا $HC = x$ و $g(x) = 30$ معناه : $48 - 2x = 30$

أي : $-2x = 30 - 48 = -18$ و منـــــه : $x = HC = 9m$

⇐ حساب الطول BH :

لدينا $BH = BC - HC$ أي : $BH = 12 - x$ و $f(x) = 8$

معنــــــــاه : $2x = 8$

أي : $x = 4$ و منه : $BH = 12 - 4$ و بالتالي : $BH = 8cm$

4) تمثيل الدالتين في معلم متعامد و متجانس :

$$(D): y = 2x$$

x	5
y	10
$(x\,;y)$	$A(5,10)$

$f(5) = 2 \times 5 = 10$

التمثيل البياني للدالة الخطية f هو المستقيم (D) الذي يمر من المبدأ و النقطة $A(5\,;10)$

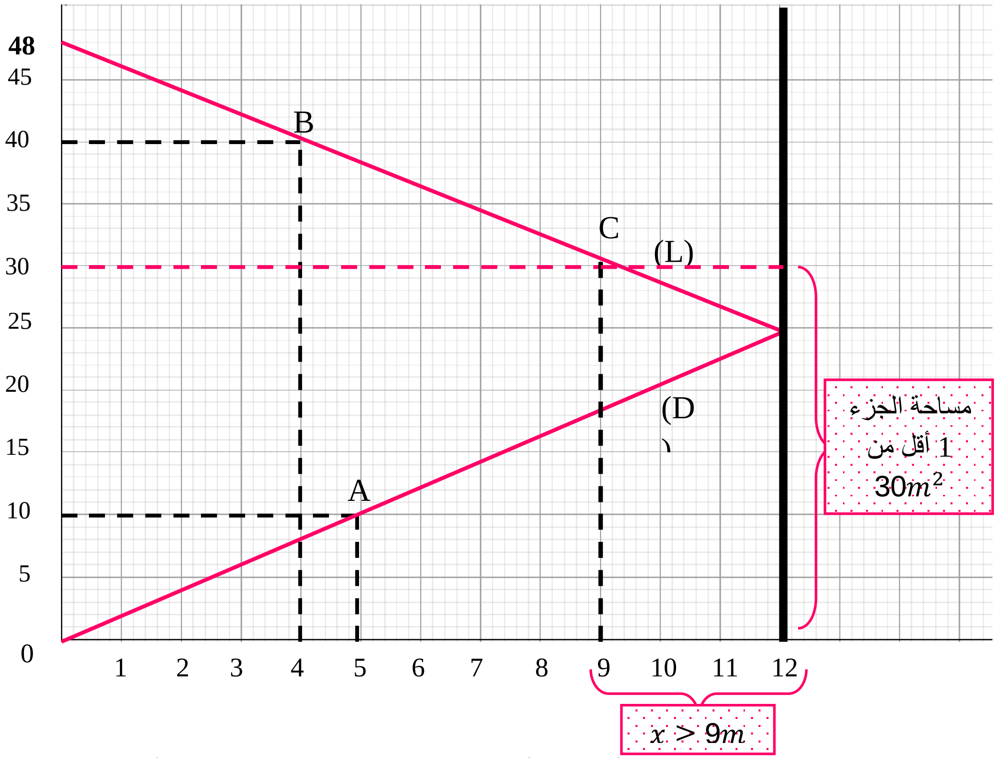
$$(L): y = 48 - 2x$$

$g(4) = 48 - 2 \times 4 = 48 - 8 = 40$

$g(5) = 48 - 2 \times 9 = 48 - 18 = 30$

x	4	9
y	40	30
$(x\,;y)$	$B(4\,;40)$	$C(5\,;30)$

التمثيل البياني للدالة التألفية g هو المستقيم (L) الذي يمر من $B(4\ ;40)$ و $C(9\ ;30)$



5) كي تكون مساحة الجزء 1 أقل من أو تساوي 30 متر مربع، يجب أن يكون $x \geq 9m$ أي : $9 \leq x \leq 12$

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1) أحسب $PGCD(2970\,;14850)$

2) أكتب العدد A على الشكل $a\sqrt{5}$ (a عدد نسبي صحيح) :

$$A = 2\sqrt{80} - \sqrt{125}$$

3) حل الجملة التالية :

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 5x - 7y = A \times \sqrt{5} \end{cases}$$

التمرين الثاني :

مستطيل طوله α و عرضه β، محيطه $300cm$ و مساحته $1450cm^2$

1) أحسب $(\alpha + \beta)^2$

2) بين أن : $\alpha^2 + \beta^2 = 19600$

$\Leftarrow$ استنتج طول قطر هذا المستطيل.

التمرين الثالث :

قام أستاذ التربية البدنية بحساب عدد دقات القلب لتلاميذ الرابعة متوسط، فكانت النتائج التالية :

عدد دقات القلب	$50 \leq n < 55$	$55 \leq n < 60$	$60 \leq n < 65$	$65 \leq n < 70$
التكرار	4	6	10	19

1) ما هو عدد تلاميذ القسم؟

2) أعط جدول التكرارات المجمعة الصاعدة و التكرارات النسبية المتزايدة

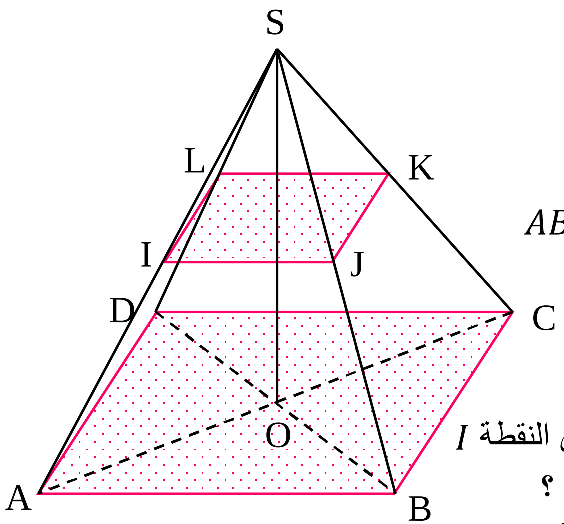
3) أحسب الوسط الحسابي المتوازن و الوسط الحسابي، ماذا تلاحظ؟

4) عين الفئة الوسيطية لعدد دقات القلب

5) عين الفئة المنوالية

6) مثل هذه المعطيات بمدرج تكراري

التمرين الرابع :



$SABCD$ هرم منتظم قاعدته

مربعة الشكل ذو المركز O

نعطي : $SA = 6cm$ ، $AB = 4cm$

1) أحسب ارتفاع هذه الهرم

2) I نقطة من الحرف $[SA]$

حيث $SI = 4cm$، نقطع

الهرم بمستو موازٍ لقاعدته و المار من النقطة I

⇐ ما هي طبيعة المقطع $IJKL$ ؟

⇐ أحسب ارتفاع الهرم $SIJKL$

الوضعية الإدماجية :

محطة التزحلق في الثلج في إحدى المدن السويسرية تقترح تسعيرتين لزبائنها :

التسعيرة الأولى : دفع 20€ لليوم الواحد

التسعيرة الثانية : الانضمام إلى النادي الرياضي بدفع 60€ مقابل تخفيض 30% من التسعيرة الأولى

1) محمد انضم إلى النادي الرياضي بعد دفع 60€، اشرح لماذا يجب أن يدفع 14€ نظير كل يوم؟

2) أكمل الجدول التالي :

عدد أيام التزحلق	5	8	
المبلغ بالتسعيرة الأولى	100		220
المبلغ بالتسعيرة الثانية	130		

3) نسمي x عدد أيام التزحلق، $f(x)$ المبلغ المدفوع بالتسعيرة الأولى و $g(x)$ المبلغ المدفوع بالصيغة الثانية، عبر عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة x

4) محمد انضم إلى النادي الرياضي و دفع مبلغ 242€، ما هو عدد الأيام التي قاضاها محمد في التزحلق؟

5) في معلم متعامد و متجانس، مثلث الدالتين f و g حيث :

($1cm$ على محور الفواصل يمثل 1 يوم، $1cm$ على محور التراتيب يمثل 25€)

6) بقراءة بيانية :

⇐ جد عدد الأيام التي من أجلها تكون التسعيرتين متساويتين، ما هو المبلغ الذي سيدفع؟

7) أدرس بيانيا هاتين التسعيرتين.

الحل المفصل للموضوع الثاني

حل التمرين الأول :

1) حساب $PGCD(2970\,;14850)$:

لدينا : $14850 = 2970 \times 5 + 0$

و بالتـــــــــــالي $PGCD(2970\,;14850) = 2970$

2) كتابة العدد A على الشكل $a\sqrt{5}$:

$$A = 2\sqrt{80} - \sqrt{125} = 2\sqrt{16 \times 5} - \sqrt{25 \times 5}$$

$$A = 2 \times \sqrt{16} \times \sqrt{5} - \sqrt{25} \times \sqrt{5}$$

$$A = 2 \times 4\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$$

$$A = (8-5)\sqrt{5}$$

$$A = 3\sqrt{5}$$

3) لنحل الجملة :

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 5x - 7y = A \times \sqrt{5} \end{cases}$$

$$3\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 3 \times (\sqrt{5})^2$$
$$= 3 \times 5$$
$$= 15$$

معناه :

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 5x - 7y = 3\sqrt{5} \times \sqrt{5} \end{cases}$$

أي :

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 & 1 \\ 5x - 7y = 15 & 2 \end{cases}$$

قصد التخلص من x نضرب طرفي المعادلة 1 في (5) ، و نضرب طرفي المعادلة 2 في (-3) و منه :

$$\begin{cases} 15x - 20y = 25 & 1 \\ -15x + 21y = -45 & 2 \end{cases}$$

نجمع طرفا لطرف المعادلتين 1 و 2 فنجـــــــــــد :

$-20y + 21y = 25 - 45$ أي : $y = -20$

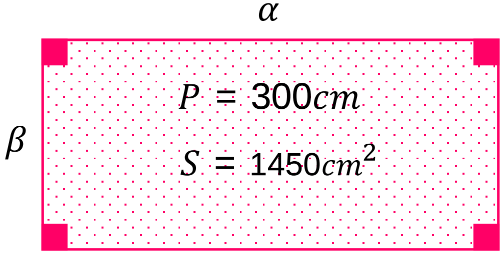
نعوض قيمة y بـ-20 في إحدى المعادلتين، نجد : $3x - 4 \times (-20) = 5$

أي : $3x + 80 = 5$ أي : $3x = -75$ أي : $x = -25$

الثنائية $(-20 \ ; -25)$ هي حل للجملة المعطاة.

التحقق : $3 \times (-25) - 4 \times (-20) = -75 + 80 = 5$

و $5 \times (-25) - 7 \times (-20) = -125 + 140 = 15$



حل التمرين الثاني :

1) حساب $(\alpha + \beta)^2$:

لدينا : $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)$

محيط المستطيل هذا المستطيل هو : $2(\alpha + \beta) = 300$

معناه أن نصف المحيط هو $\alpha + \beta = 150$

و منه : $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = 150 \times 150 = 150^2$

نجـــــــــــــد : $(\alpha + \beta)^2 = 22500$

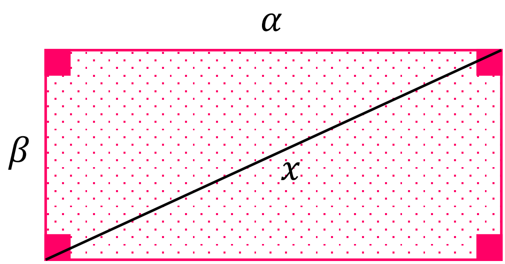
2) لنبين أن $\alpha^2 + \beta^2 = 19600$:

لدينا : $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$

نعلم أن مساحة هذا المستطيل هي $\alpha\beta = 1450$ أي أن : $2\alpha\beta = 2900$

من جهة أخرى لدينا : $(\alpha + \beta)^2 = 22500$

و بالتالي : $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2900 = 22500$



معنـــــــــاه : $\alpha^2 + \beta^2 + 2900 = 22500$

معنـــــــــاه : $\alpha^2 + \beta^2 = 22500 - 2900$

و منـــــــــــه : $\alpha^2 + \beta^2 = 19600$

$\Leftarrow$ طول قطر هذا المستطيل :

بتطبيق نظرية فيثاغورث في إحدى المثلثين نجد :

$x^2 = \alpha^2 + \beta^2$ و منـــــــــــه : $x^2 = 19600$

و منـــــــــــه : $x = \sqrt{19600}$

و منـــــــــــه : $x = 140$

حل التمرين الثالث :

1) عدد تلاميذ القسم هو مجموع التكرارات، أي : $4 + 6 + 10 + 19 = 39$

2) جدول التكرارات المجمعة الصاعدة و التكرارات النسبية المتزايدة :

عدد دقات القلب	$50 \leq n < 55$	$55 \leq n < 60$	$60 \leq n < 65$	$65 \leq n < 70$
التكرار	4	6	10	19
التكرارات المجمعة الصاعدة	4	10	20 $11 \rightarrow 20$	39
التكرارات النسبية المتزايدة	$\frac{4}{39} \approx 0{,}10$	$\frac{10}{39} \approx 0{,}25$	$\frac{20}{39} \approx 0{,}51$	$\frac{39}{39} = 1$
مراكز الفئات	$\frac{50+55}{2} = 52{,}5$	$= 57{,}5$	$62{,}5$	$67{,}5$

3) حساب الوسط الحسابي المتوازن و الوسط الحسابي :

ليكن M المتوسط الحسابي المتوازن لعدد دقات القلب :

$$M = \frac{(52{,}5 \times 4) + (57{,}5 \times 6) + (62{,}5 \times 10) + (67{,}5 \times 19)}{39}$$

$$M = \frac{2462{,}5}{39} \approx 63{,}14$$

ليكن M' الوسط الحسابي لعدد دقات القلب :

$$M' = \frac{52{,}5 + 57{,}5 + 62{,}5 + 67{,}5}{4} = 60$$

نلاحظ أن الوسط الحسابي المتوزان M يختلف عن الوسط الحسابي M' و لكنهما متقاربان

4) الفئة الوسيطية :

عدد التلاميذ هو 39 و هو عدد فردي، و $39 = 19 + 1 + 19$

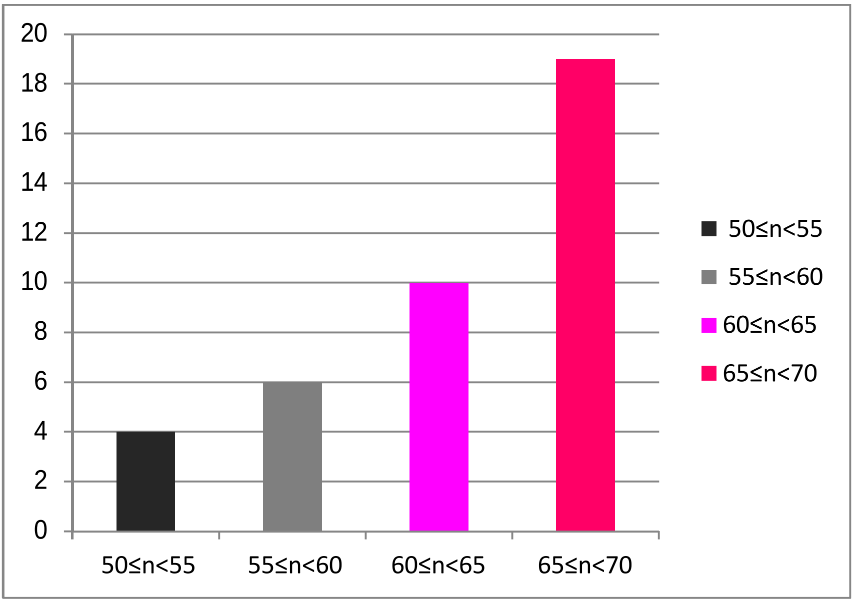
إذن الوسيط هو القيمة ذات الرتبة 20، و هذه القيمة موجود في الفئة $60 < n \leq 65$

المنوال هي القيمة ذات أكبر تكرار

إذن الفئة الوسيطية هي $60 < n \leq 65$

5) الفئة المنوالية هي $65 < n \leq 70$ ، لأن هذه الفئة لها أكبر تكرارا في هذه السلسلة الإحصائية

6) المدرج التكراري :



حل التمرين الرابع :

1) حساب ارتفاع هذه الهرم :

الهرم $SABCD$ منتظم، إذن ارتفاع هذا الهرم هو $[SO]$

المثلث ABC قائم في B ، فحسب نظرية فيثاغورث لدينا :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ أي : $AC^2 = 4^2 + 4^2 = 32$

أي : $AC = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2}$

نجــــــد : $AC = 4\sqrt{2}cm$

في المقابل لدينا النقطة O منتصف $[AC]$ ، هذا يعني أن :

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}cm$$

و بما أن $[SO]$ هو ارتفاع الهرم $SABCD$، إذن المثلث SOA قائم في O، و منه حسب نظرية فيثاغورث لدينا :

$SA^2 = SO^2 + AO^2$ و منـــــه : $SO^2 = SA^2 - AO^2$

و منـــــه : $SO^2 = 6^2 - (2\sqrt{2})^2$

و منـــــه : $SO^2 = 36 - 8 = 28$

و منه : $SO = \sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7}$ فنجـــــد : $SO = 2\sqrt{7}cm$

إذن ارتفاع الهرم $SABCD$ هو $2\sqrt{7}cm$

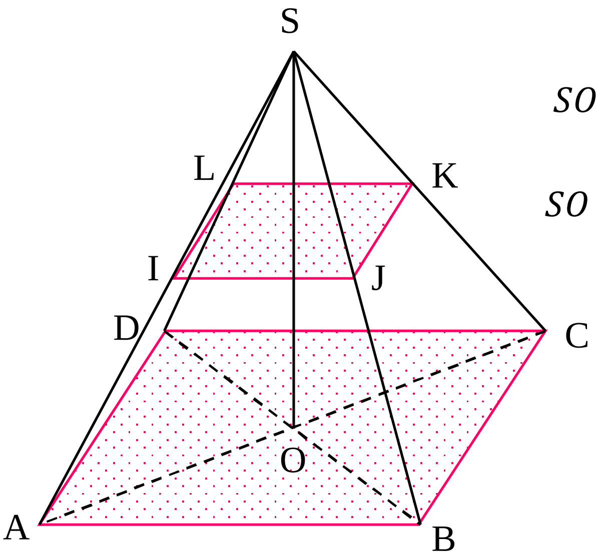
2) طبيعة المقطع $IJKL$ هو مربع.

مقطع هرم بمستو موازٍ لقاعدته هو مضلع له نفس طبيعة القاعدة

3) حساب ارتفاع الهرم $SIJKL$:

الهرم $SIJKL$ هو تصغير للهرم $SABCD$

بالنسبة $\frac{SI}{SA} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$



إذن : $SO \times \frac{2}{3} = 2\sqrt{7} \times \frac{2}{3}$

و منــــــــــه : $SO = \frac{4\sqrt{7}}{3}$

إذن ارتفاع الهرم $SIJKL$ هو

$$\frac{4\sqrt{7}}{3} cm$$

حل الوضعية الإدماجية :

1) لنشرح لماذا يجب أن يدفع 14€ نظير كل يوم بالتسعيرة الثانية :

بمجرد الانضمام إلى النادي الرياضي، يتم التخفيض بـ30% من التسعيرة الأولى،
هذا يعني أن المبلغ الذي سيدفع كل يوم بالتسعيرة الثانية هو :

$$\left(1 - \frac{30}{100}\right) \times 20 = \frac{70}{100} \times 20 = 14$$

2) إكمال الجدول :

عدد أيام التزحلق	5	8	$x = 11$
المبلغ بالتسعيرة الأولى	100	$y_1 = 160$	220
المبلغ بالتسعيرة الثانية	130	$y_2 = 172$	$y'_2 = 214$

لدينا : $20 \times x = 220$ أي : $x = 11$

لدينا : $y_1 = 8 \times 20$ أي : $y_1 = 160$

لدينا : $y_2 = 8 \times 14 + 60$ أي : $y_2 = 172$

لدينا : $y'_2 = 11 \times 14 + 60$ أي : $y'_2 = 214$

3) التعبير عن $f(x)$ و $g(x)$:

x هو عدد الأيام، و $f(x)$ المبلغ المدفوع بالتسعيرة الأولى : المبلغ الذي سيدفعه ليوم لواحد هو 20×1، إذن المبلغ الذي سيدفع لـ x يوم هو $20 \times x$

و منـــــــــــه : $f(x) = 20x$

$g(x)$ هو المبلغ المدفوع بالتسعيرة الثانية : المبلغ الذي سيدفع ليوم واحد هو $14 \times 1 + 60$، إذن المبلغ الذي سيدفعه لـx يوم هو $14 \times x + 60$

و منـــــــــــه : $g(x) = 14x + 60$

4) حساب عدد الأيام التي قاضاها محمد في التزحلق :

محمد انضم إلى النادي الرياضي ودفع مبلغ 242€، هذا يعني أنه اختار التسعيرة الثانية، إذن :

$14x + 60 = 242$ أي : $14x = 182$ و منـــــــــــه : $x = 13$

عدد الأيام التي قضاها محمد في التزحلق هو 13 يوم

5) التمثيل البياني للدالتين f و g :

$$(D): y = 20x$$

x	5
y	100
$(x\,;y)$	$A(5\,;100)$

$f(5) = 20 \times 5 = 100$

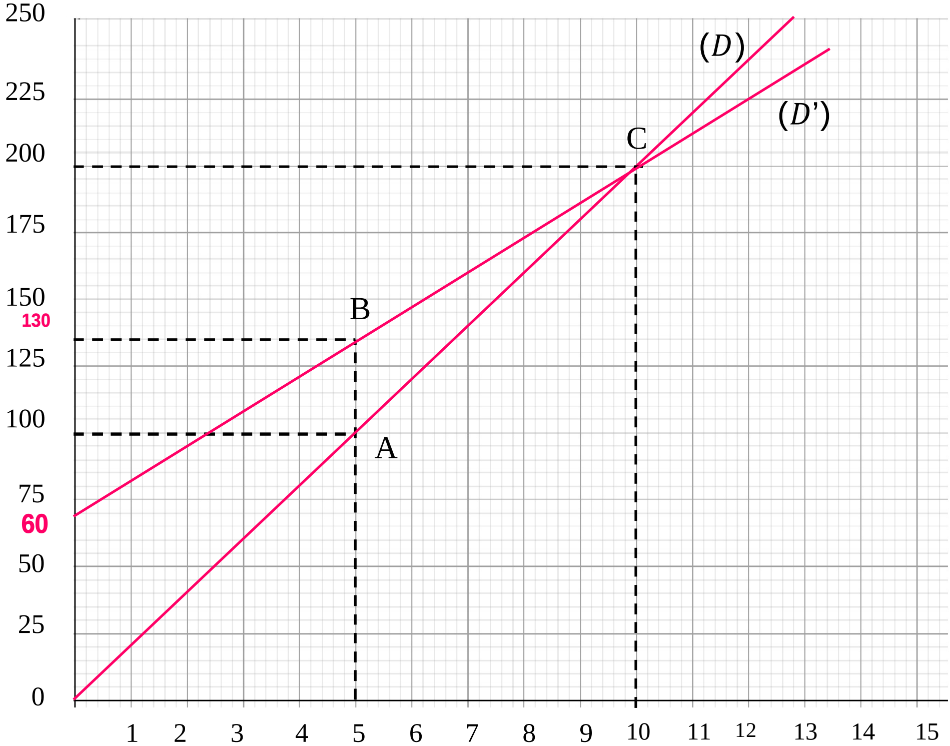
التمثيل البياني للدالة الخطية f هو المستقيم (D) المار من المبدأ و النقطة $A(5\,;100)$

$$(D'): y = 14x + 60$$

$$g(5) = 14 \times 5 + 60 = 130$$
$$g(10) = 14 \times 200 + 60 = 200$$

x	5	10
y	130	200
$(x\,;y)$	$B(5\,;130)$	$C(10\,;200)$

التمثيل البياني للدالة التألفية g هو المستقيم (D') المار من $B(5\,;130)$ و $C(10\,;200)$.



6) عدد الأيام التي من أجلها تكون التسعيرتين متساويتين:
التمثيلان البيانيان يتقاطعان في النقطة $C(10\,;200)$، هذا يعني أنه من أجل $x = 10$ تكون $f(x) = g(x)$ ، و بالتالي فإن عدد الأيام التي من أجلها تكون التسعيرتين متساويتين هو 10 أيام و المبلغ الذي سيدفع هو 200€

7) الدراسة البيانية :
من أجل $x = 10$ تكون التسعيرتين متساويتين، لأن التمثيلين البيانيين يتقاطعان في $C(10\,;200)$
من أجل $x < 10$ ، (D) التمثيل البياني للدالة f يقع تحت (D') التمثيل البياني للدالة g ، إذن على الشخص الذي يريد أن يقضي اقل من 10 أيام في التزحلق عليه أن يختار التسعيرة الأولى لأنها الأفضل
من أجل $x > 10$ ، (D') التمثيل البياني للدالة g يقع تحت (D) التمثيل البياني للدالة f ، إذن على الشخص الذي يريد أن يقضي أكثر من 10 أيام في التزحلق عليه أن يختار التسعيرة الثانية لأنها الأفضل.

الموضوع الثالث

التمرين الأول :

إليك العبارة E حيث : $E = 2(x-1)(x-2) - (x-3)^2$

1) بين أن $E = x^2 - 5$
2) أحسب E من أجل $x = \sqrt{5}$
3) حلل E إلى جداء عاملين
4) حل المعادلة $E = 0$

التمرين الثاني :

إليك علامات سيرين في الفروض مرتبة تنازليا (العلامات من 20) :

$m \;;\; 15{,}5 \;;\; 14 \;;\; 13 \;;\; 12 \;;\; 09 \;;\; 8 \;;\; n$

إذا كان معدل العلامات هو 11,75 و المدى هو 10,5 ، جد العلامتين m و n

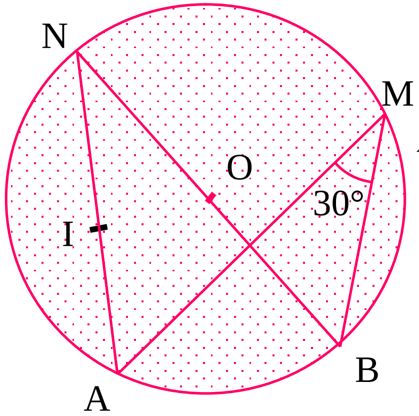
التمرين الثالث :

ليكن x قيس زاوية حادة، نعطي $sin\,x = \frac{24}{26}$

1) دون حساب قيمة x جد $cos\,x$

2) استنتج $tan\,x$

التمرين الرابع :



(C) دائرة مركزها O و نصف قطرها R

و A، B و M نقط من الدائرة (C)،

و $\widehat{AMB} = 30°$ ، $[NB]$

هو قطر للدائرة (C)

1) لتكن I منتصف $[AN]$، بين أن $(OI) \perp (IN)$ (C)

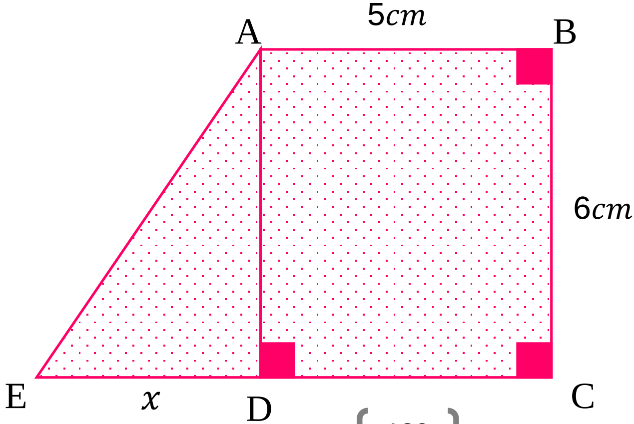
2) بين أن $AB = 2Rsin30°$

3) عبر عن الطول AN بدلالة R

الوضعية الإدماجية :

$ABCE$ شبه منحرف، D نقطة من $[EC]$ بحيث $ABCD$ مستطيل

ليكن $ED = x$



1) عين الدالة f التي تعبر عن مساحة الشبه المنحرف $ABCE$ بدلالة x

$\Leftarrow$ جد مساحة هذا الشبه المنحرف من أجل $x = 3{,}6cm$

$\Leftarrow$ جد قيمة x إذا كان مساحة الشبه المنحرف $ABCE$ تساوي $36cm^2$

2) لتكن $g(x)$ مساحة المثلث ADE، $h(x)$مساحة المستطيل $ABCD$

$\Leftarrow$ عبر عن $g(x)$ و $h(x)$ بدلالة x

3) في معلم متعامد و متجانس، مثل الدالتين $g(x)$ و $h(x)$

نأخذ : $1cm$ على محور الفواصل يمثل $1cm$، $1cm$ على محور التراتيب يمثل $3cm^2$

الحل المفصل للموضوع الثالث

حل التمرين الأول :

1) لنبين $E = x^2 - 5$:

$$E = 2(x-1)(x-2) - (x-3)^2$$
$$E = 2(x^2 - 2x - x + 2) - (x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2)$$
$$E = 2(x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 6x + 9)$$
$$E = 2x^2 - 6x + 4 - x^2 + 6x - 9$$
$$E = (2x^2 - x^2) + (6x - 6x) + (4 - 9)$$
$$E = x^2 - 5$$

هذا الحد مسبوق بالإشارة $(-)$ ، لذا يجب وضع الأقواس

2) حساب E من أجل $x = \sqrt{5}$:

$$E = x^2 - 5 = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 5 = 5 - 5 = 0$$

إذن من أجل $x = \sqrt{5}$ نجـــــــــد : $E = 0$

3) تحليل العبارة E :

$E = x^2 - 5$ ، نفكر في المتطابقة $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ،

فنضع $x = a$ و $b = \sqrt{5}$، أي :

$$E = x^2 - 5 = x^2 - (\sqrt{5})^2 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

4) لنحل المعادلة $E = 0$:

$E = 0$ معنـــــــــاه : $x^2 - 5 = 0$

معنـــــــــاه : $x^2 = 5$

و منـــــــــه : $x = \sqrt{5}$

إذن للمعادلة $E = 0$ حل و هو $\sqrt{5}$

حل التمرين الثاني :

حساب العلامتين m و n :

لدينا : $M = \frac{m+15,5+14+13+12+9+8+n}{8} = 11,75$

و منــــه : $M = \frac{m+n+71,5}{8} = 11,75$

و منــــه : $\frac{m+n+71,5}{8} = \frac{94}{8}$

و منــــه : $m + n + 71,5 = 94$ أي : $m + n = 94 - 71,5$

و منـــــــــــــــه : $m + n = 22,5$

من جهة أخرى لدينا مدى هذه السلسلة هو 10,5 ، هذا يعني أن $m - n = 10{,}5$ لأن $(m > n)$

نتحصل على الجملة التالية :

$$\begin{cases} m + n = 22{,}5 & (1) \\ m - n = 10{,}5 & (2) \end{cases}$$

نجمع طرفا لطرف المعادلتين 1 و 2

فنجـــــــــد : $m + n + m - n = 22{,}5 + 10{,}5$

و منه : $2m = 33$ و منـــــــــــه : $m = 16{,}5$

نعوض قيمة m بـ16,5 في إحدى المعادلتين، نعوض مثلا في المعادلة

$m + n = 22{,}5$ فنجـــــــــد :

$16{,}5 + n = 22{,}5$ أي : $n = 22{,}5 - 16{,}5$ أي : $n = 6$

النتيجة : $m = 16{,}5$ و $n = 6$

حل التمرين الثالث :

1) حساب $\cos x$:

نعلم أن $cos^2x + sin^2x = 1$ إذن : $cos^2x = 1 - sin^2x$

لكن $sin\,x = \frac{24}{26}$

و بالتالي : $cos^2x = 1 - \left(\frac{24}{26}\right)^2$ أي : $cos^2x = 1 - \frac{576}{676}$

أي : $cos^2 x = \frac{100}{676}$

أي : $\cos x = \sqrt{\frac{100}{676}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{676}}$ نجـــــد : $\cos x = \frac{10}{26}$

2) لنستنتج $tan\, x$:

لدينا العلاقة $tan\, x = \frac{sin\, x}{cos\, x}$ و منـــــه : $tan\, x = \frac{\frac{24}{26}}{\frac{10}{26}}$

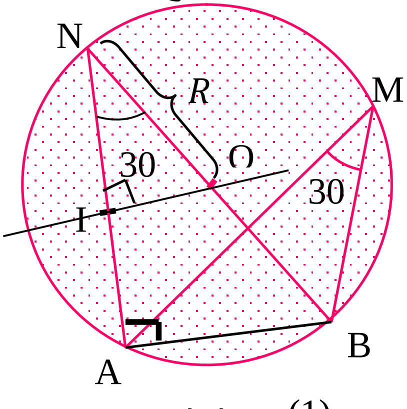
و منـــــه : $tan\, x = \frac{24}{26} \times \frac{26}{10}$

نجــــــد : $\tan x = \frac{24}{10}$

حل التمرين الرابع :

1) لنبين أن $(OI) \perp (IN)$:

نعلم أن $[NB]$ قطر للدائرة (C) المحيطة بالمثلث ANB ، نستنتج أن المثلث ANB قائم في النقطة A.



هذا يعنــــــــــي أن : $(AB) \perp (AN)$ ....(1) (C)

في المقابل لدينا : O و I منتصفا الضلعين $[NB]$ و $[AN]$ على

الترتيب، و منـــــه : $(OI) // (AB)$ ....(2)

من (1) و (2) ينتـــج أن : $(OI) \perp (AN)$

و بالتـــــــــــــــالي فإن : $(OI) \perp (IN)$

2) لنبين أن $AB = 2R\sin 30°$:

لدينا $\widehat{AMB}$ و $\widehat{ANB}$ زاويتان محيطيان في الدائرة (C) و تحصران القوس $\widehat{AB}$ نفسه، هذا يعني أن :

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 30°$$

و بالتالي يكون لدينا في المثلث القائم ANB :

$$\sin\widehat{ANB} = \sin 30° = \frac{AB}{NB} = \frac{AB}{2R}$$

$$NB = NO + OB$$
$$NB = R + R$$
$$NB = 2R$$

من المساواة $\sin 30° = \frac{AB}{2R}$ نجـــــــد : $AB = 2R \times \sin 30°$

و منـــــــــــه : $AB = 2R\sin 30°$

3) التعبير عن الطول AN بدلالة R :

بتطبيق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم ANB لدينا :

$$AN^2 = NB^2 - AB^2$$

$$NB = 2R$$
$$AB = 2R\sin 30°$$

معناه : $AN^2 = (2R)^2 - (2R\sin 30°)^2$

$(ab)^n = a^n \times b^n$

معناه : $AN^2 = 4R^2 - (2R)^2 \times (sin30°)^2$

$4R^2$ عامل مشترك

معناه : $AN^2 = 4R^2 - 4R^2 \times (sin30°)^2$

معناه : $AN^2 = 4R^2(1 - (sin30°)^2)$

$(cos\, x)^2 + (sin\, x)^2 = 1$
$(cos\, x)^2 = 1 - (sin\, x)^2$

معناه : $AN^2 = 4R^2 \times (cos30°)^2$

$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$
$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

معناه : $AN = \sqrt{4R^2 \times (cos30°)^2}$

معناه : $AN = \sqrt{4 \times R^2} \times \sqrt{(cos30°)^2}$

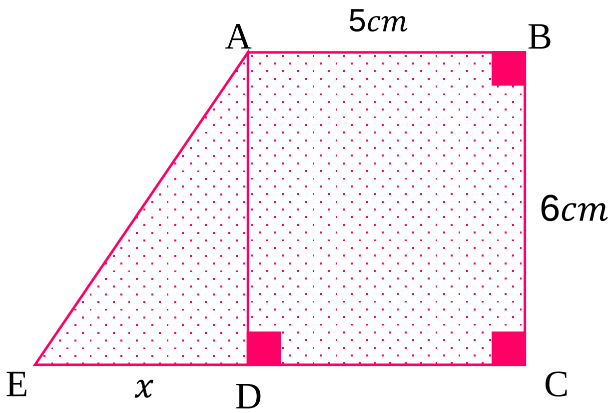
معناه : $AN = 2R \times cos30°$

و منـــــــــــــــــــه : $AN = 2Rcos30°$

حل الوضعية الإدماجية :

1) تعيين الدالة f التي تعبر عن مساحة الشبه المنحرف $ABCE$ بدلالة x :

$f(x)$ مساحة الشبه المنحرف $ABCE$ ، أي :



$$f(x) = \frac{(EC + AB) \times BC}{2}$$

معناه : $f(x) = \frac{(5+x+5)\times 6}{2}$

معناه : $f(x) = \frac{(10+x)\times 6}{2}$

معناه : $f(x) = \frac{60+6x}{2}$

و منـــــــــــه : $f(x) = 30 + 3x$

$\Leftarrow$ حساب مساحة هذا الشبه المنحرف من أجل $x = 3{,}6cm$:

معناه حساب صورة العدد 3,6 بالدالة f ، أي :

$$f(3{,}6) = 30 + 3 \times 3{,}6 = 40{,}8$$

$\Leftarrow$ حساب قيمة x إذا كان مساحة الشبه المنحرف $ABCE$ تساوي $36cm^2$

معناه حساب العدد الذي صورته بالدالة f هي 36 ، أي :

$f(x) = 36$ معناه : $30 + 3x = 36$

معناه : $3x = 36 - 30$

معناه : $3x = 6$ أي : $x = 2$

2) التعبير عن الدالتين g و h :

⇐ التعبير عن الدالة h :

$h(x)$ هي مساحة المستطيل $ABCD$، و بالتالي فإن : $h(x) = 6 \times 5 = 30$

إذن : $h(x) = 30$

هذه الدالة تسمى بدالة ثابتة، فمهما كانت قيمة العدد x فإن $h(x) = 30$، و تمثيلها البياني يكون مستقيم مواز لمحور الفواصل.

⇐ التعبير عن الدالة g :

$g(x)$ هي مساحة المثلث ADE ، و بالتالي فإن : $g(x) = \frac{AD \times ED}{2}$

أي : $g(x) = \frac{6 \times x}{2}$

و منـــــــــــــــــه : $g(x) = 3x$

3) تمثيل الدوال $g(x)$ و $h(x)$:

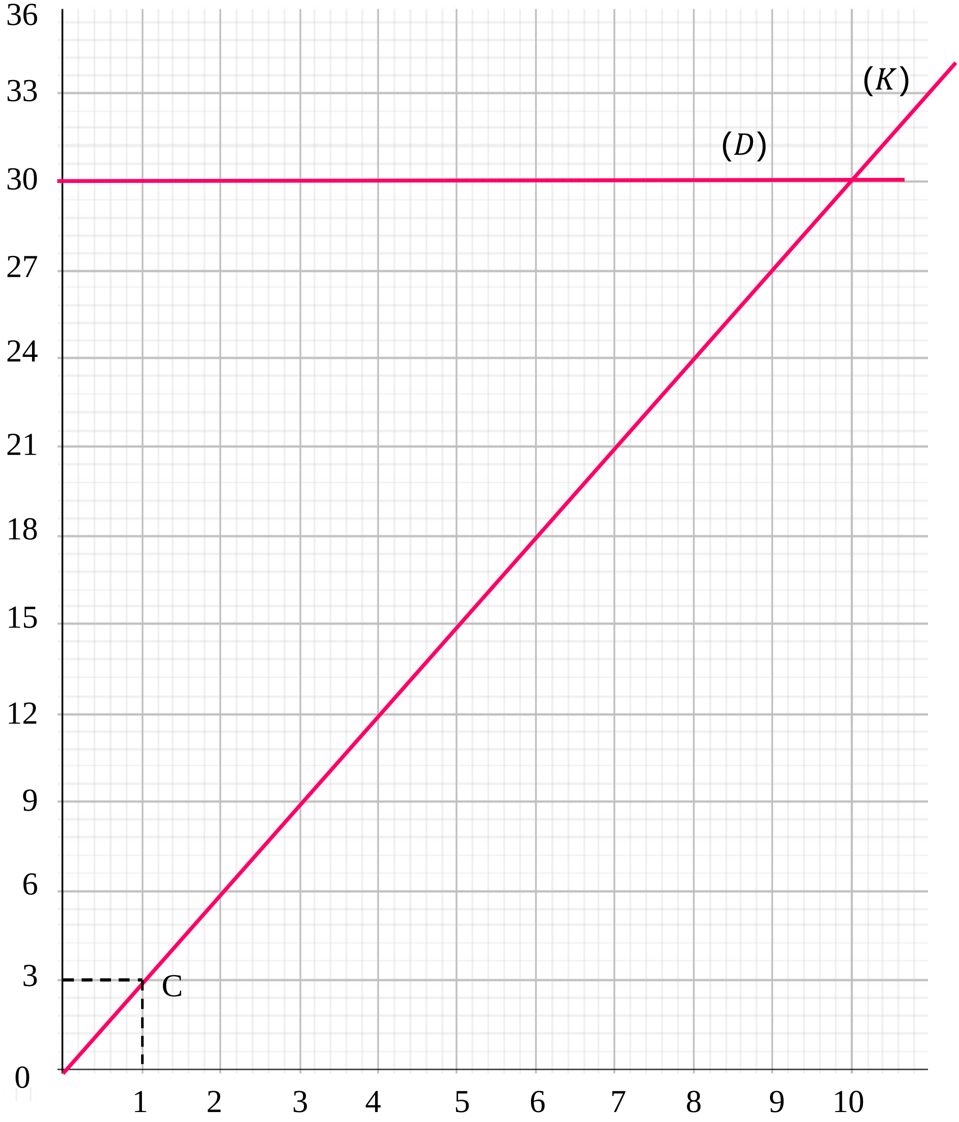
$h(x) = 30$ و هي دالة ثابتة، و بالتالي فإن تمثيلها البياني (D) يكون مواز لمحور الفواصل، و يمر من النقطة $M(0\,;30)$

$(K): y = 3x$

x	1
y	3
$(x\,;y)$	$C(1\,;3)$

$g(1) = 3 \times 1 = 3$

التمثيل البياني للدالة الخطية g هو المستقيم (K) الذي يمر من مبدأ المعلم و يمر من النقطة $C(1\,;3)$



36
33
30
27
24
21
18
15
12
9
6
3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
(K)
(D)
C

الموضوع الرابع

التمرين الأول :

1) تحقق بالنشر أن : $(2-3x) = -(3x-2)$

2) أنشر و بسط العبارة A حيث :

$$A = (3x-2)^2 + (4x-1)(3x-2) + 7(2-3x)$$

3) حلل العبارة إلى جداء عاملين

4) حل المتراجحة $A < 21x^2$ ثم مثل بيانيا مجموعة حلولها

التمرين الثاني :

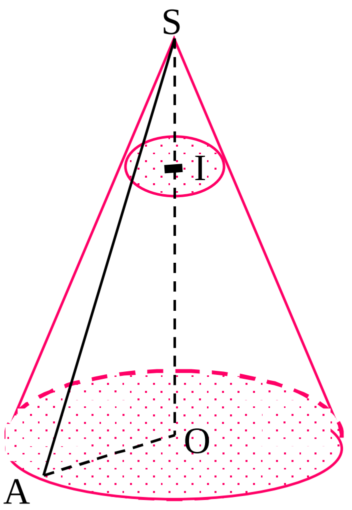
ريان تلميذ في السنة الرابعة متوسط، تحصل على هذه النقاط في الفصل الأول (النقاط من 20) :

المواد	رياضيات	لغة عربية	لغة فرنسية	لغة حية	تربية مدنية	علوم طبيعية	تاريخ جغرافيا	تربية إسلامية	فيزياء	رياضة
النقاط	10	9,5	7	12,5	12	10	8,5	11,5	11	12
المعامل	4	5	3	2	1	2	3	2	2	1

1) هل نجح ريان لو كانت معاملات المواد كلها تساوي 1؟ علل (معدل النجاح أكبر أو يساوي 10)

2) هل نجح ريان باحتساب المعاملات؟ علل

3) عين المدى و الوسيط لهذه السلسلة



التمرين الثالث :

مخروط الدوران رأسه S و قاعدته قرص نصف قطره $[OA]$ ،

ارتفاع هذا المخروط هو $SO = 8cm$ و طول مولد له هو $SA = 10cm$

I نقطة من $[SO]$ ، حيث : $SI = 2cm$

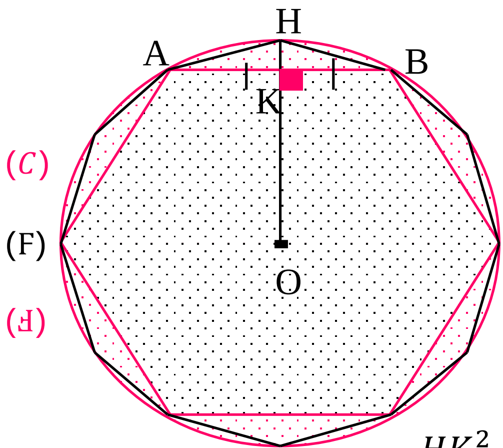
1) بين أن $OA = 6cm$

2) بين أن القيمة المضبوطة v لحجم هذا المخروط هو $96\pi\ cm^3$ ثم أعط القيمة المدورة إلى 0,1

3) نقطع هذا المخروط بمستو مار من النقطة I وموازٍ لقاعدته، نحصل على مخروط مصغر له

⇐ جد معامل التصغير

⇐ أحسب القيمة المضبوطة v' لحجم المخروط المصغر.



التمرين الرابع :

(Ⅎ) سداسي منتظم مركزه O

(F) مضلع منتظم له 12 ضلع مركزه O

(C) دائرة مركزها O و نصف قطرها a

بين أن : $OK^2 = a^2 - \frac{AB^2}{4}$

1) بين أن : $HK^2 = a^2 - 2aOK + OK^2$

2) عبر عن HK^2 بدلالة a و AB

3) بين أن : $HB = \sqrt{2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{AB^2}{4}}}$

الوضعية الإدماجية :

لدى أنس مسبح مملوء بالماء، المسبح على شكل متوازي المستطيلات بعدا قاعدته $7m$ و $5m$ و ارتفاعه $4m$، قرر تفريغ هذا المسبح بواسطة مضخة، المضخة تفرغ $7m^3$ في الساعة.

1) أحسب حجم الماء المتواجد داخل المسبح
2) جد حجم الماء المتبقي بعد 5 ساعات من التفريغ
3) لتكن x عدد ساعات التفريغ و f حجم الماء المتبقي بـm^3 داخل المسبح،
   ⇐ عبر الدالة f بدلالة x
   ⇐ ما طبيعة الدالة f ؟
4) جد عدد الساعات اللازمة كي يكون حجم الماء المتبقي في المسبح هو $77m^3$
5) مثل في معلم متعامد و متجانس الدالة f

نأخذ : $1cm$ على محور الفواصل يمثل $2h$ ، و $1cm$ على محور التراتيب يمثل $20m^3$

6) بقراءة بيانية :
   ⇐ جد عدد الساعات اللازمة لتفريغ المسبح بأكمله
   ⇐ جد حجم الماء المتواجد داخل المسبح بعد 7 ساعات من التفريغ

الحل المفصل للموضوع الرابع

حل التمرين الأول :

1) لنتحقق أن $(2-3x) = -(3x-2)$:

$$\begin{aligned}(2-3x) &= -(3x-2) = -1 \times (3x-2)\\ &= -3x+2\\ &= 2-3x\end{aligned}$$

2) نشر و تبسيط العبارة A :

$$A = (3x - 2)^2 + (4x - 1)(3x - 2) + 7(2 - 3x)$$
$$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 + 12x^2 - 8x - 3x + 2 + 14 - 21x$$
$$= 9x^2 + 12x^2 - 12x - 8x - 3x - 21x + 4 + 2 + 14$$
$$= 21x^2 - 44x + 20$$

3) تحليل العبارة A :

$$A = (3x - 2)^2 + (4x - 1)(3x - 2) + 7(2 - 3x)$$
$$A = (3x - 2)^2 + (4x - 1)(3x - 2) + 7\big(-(3x - 2)\big)$$
$$A = (3x - 2)(3x - 2) + (4x - 1)(3x - 2) - 7(3x - 2)$$
$$A = (3x - 2)[(3x - 2) + (4x - 1) - 7]$$
$$A = (3x - 2)(3x - 2 + 4x - 1 - 7)$$
$$A = (3x - 2)(7x - 10)$$

4) لنحل المتراجحة $A < 21x^2$:

$A < 21x^2$ معناه : $21x^2 - 44x + 20 < 21x^2$

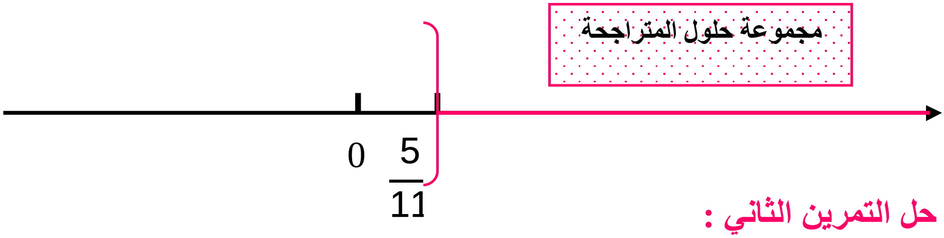
معناه : $-44x + 20 < 0$

معناه : $-44x < -20$

بقسمة طرفي هذه المتراجحة على العدد السالب (-44) نحصل على متراجحة جديدة مختلفة الاتجاه و هي : $\frac{-44x}{-44} > \frac{-20}{-44}$ أي : $x > \frac{5}{11}$

إذن كل الأعداد الأكبر من $\frac{5}{11}$ هي حلول للمتراجحة $A < 21x^2$.

⇐ التمثيل البياني لمجموعة حلول المتراجحة $A < 21x^2$:



حل التمرين الثاني :

1) ليكن M معدل ريان بدون احتساب المعاملات :

المعدل هو الوسط الحسابي لهذه النقاط :

$$M = \frac{10 + 9{,}5 + 7 + 12{,}5 + 12 + 10 + 8{,}5 + 11{,}5 + 11 + 12}{10}$$

$$M = \frac{104}{10}$$

$$M = 10{,}4$$

بما أن $10 < 10{,}4$ فهذا يعني أن ريان ناجح بدون احتساب المعاملات

2) ليكن M' معدل ريان باحتساب المعاملات :

في هذه الحالة، معدل ريان هو المتوسط الحسابي المتوازن لنقاطه :

$$M' = \frac{10 \times 4 + 9{,}5 \times 5 + 7 \times 3 + 12{,}5 \times 2 + 12 + 10 \times 2 + 8{,}5 \times 3 + 11{,}5 \times 2 + 11 \times 2 + 12}{4 + 5 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 2 + 2 + 1}$$

$$M' = \frac{40 + 47{,}5 + 21 + 25 + 12 + 20 + 25{,}5 + 23 + 22 + 12}{25}$$

$$M' = \frac{248}{25} = 9{,}92$$

بما أن $10 > 9{,}92$ فهذا يعني أن ريان لم ينجح في الفصل الأول لأن معدله أقل من معدل القبول.

3) تعيين المدى و الوسيط :

⇐ المدى :

مدى سلسلة إحصائية هو الفرق بين أكبر قيمة و أصغر قيمة لها

أعلى نقطة تحصلها عليها ريان هي 12,5 و أدني نقطة هي 7، و بالتالي $12{,}5 - 7 = 5{,}5$ و منه ــــــــــــــــــ المدى هو 5,5

⇐ تعيين النقطة الوسيطية :

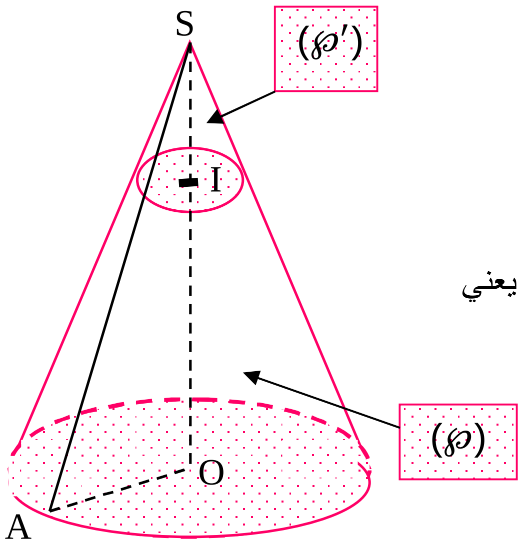
لتعيين النقطة الوسيطية يجب أن نرتب هذه النقاط :

$\underbrace{7\ ;\ 8{,}5\ ;\ 9{,}5\ ;\ 10\ ;\ \mathbf{10}}_{\boxed{\text{5 قيم}}}\ ;\ \underbrace{\mathbf{11}\ ;\ 11{,}5\ ;\ 12\ ;\ 12\ ;\ 12{,}5}_{\boxed{\text{5 قيم}}}$

عدد النقاط هو 10 (عدد زوجي) ، و منه النقطة الوسيطية هي نصف مجموع النقطتين الخامسة و السادسة، أي : $Med = \frac{10+11}{2} = 10{,}5$

إذن النقطة الوسيطية هي 10,5

حل التمرين الثالث :



1) لنبين أن $OA = 6cm$:

$[SO]$ هو ارتفاع هذا المخروط، هذا يعني

أن المثلث SOA قائم في النقطة O،

فحسب نظرية فيثاغورث فإن : $SA^2 = SO^2 + OA^2$

أي : $OA^2 = SA^2 - SO^2$ أي : $OA^2 = 10^2 - 8^2$

أي : $OA^2 = 100 - 64 = 36$

و منـــــــــــــه : $OA = \sqrt{36} = 6cm$

2) لنبين أن القيمة المضبوطة v لحجم هذا المخروط هو $96\pi\ cm^3$:

حجم مخروط الدوران يساوي ثلث جداء مساحة قاعدة و ارتفاع هذا المخروط، أي :

$v = \frac{1}{3} \times \pi \times OA^2 \times SO$ معناه : $v = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8$

معناه : $v = \frac{1}{3} \times \pi \times 288$

و منـــــــــــــه : $v = 96\pi cm^3$

بالتدوير إلى 0,1 نجد $v = 301{,}4cm^3$

3) معامل التصغير :

ليكن k معامل التصغير

$$k = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$\Leftarrow$ حجم المخروط المصغر :

بما أن $(\wp')$ هو تصغير للمخروط $(\wp)$ في النسبة $\frac{1}{4}$ فإن :

$$v' = v \times \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

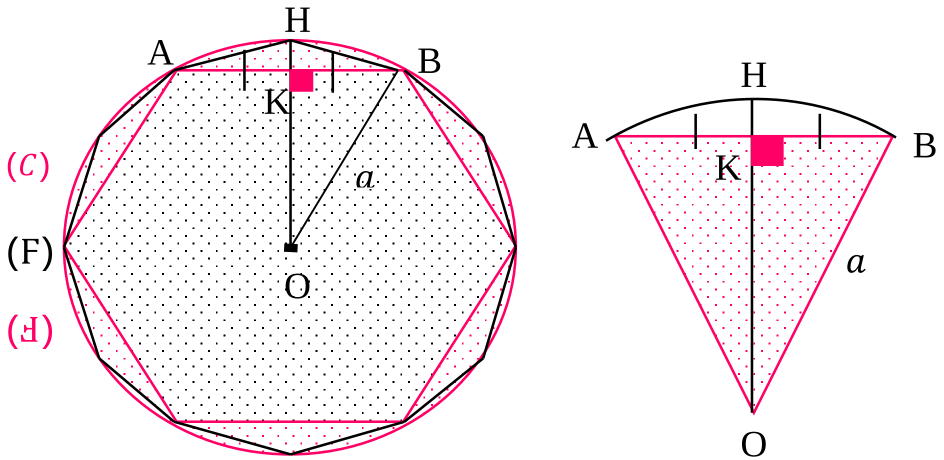
و منـــــــــــــه : $v' = 96\pi \times \frac{1}{64}$

و منـــــــــــــه : $v' = 1{,}5\pi cm^3$

حل التمرين الرابع :

1) لنبين أن $OK^2 = a^2 - \frac{AB^2}{4}$:

بتطبيق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم OBK نجد :



$OB^2 = KB^2 + OK^2$ و منه : $OK^2 = OB^2 - KB^2$

لكن $OB = a$ و $KB = \frac{AB}{2}$ (K منتصف $[AB]$)

و منـــــــــــه : $OK^2 = a^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2$

و منـــــــــــه : $OK^2 = a^2 - \frac{AB^2}{4}$

2) لنبين أن $HK^2 = a^2 - 2aOK + OK^2$:

من الشكل لدينا : $HO = HK + OK$ أي : $HK = HO - OK$

معناه : $HK^2 = (HO - OK)^2$

معناه : $HK^2 = HO^2 - 2 \times HO \times OK + OK^2$

$a = HO$ (نصف قطر الدائرة)

معناه : $HK^2 = a^2 - 2 \times a \times OK + OK^2$

و منــــــــــه : $HK^2 = a^2 - 2aOK + OK^2$

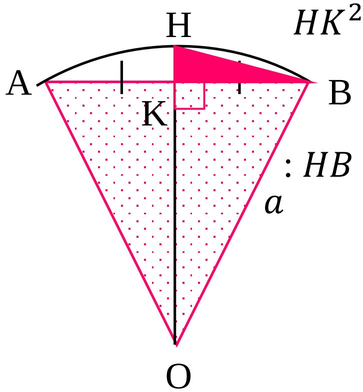
3) التعبير عن HK^2 بدلالة a و AB :

لدينا $HK^2 = a^2 - 2aOK + OK^2$

في المقابل لدينا $OK^2 = a^2 - \frac{AB^2}{4}$ أي : $OK = \sqrt{a^2 - \frac{AB^2}{4}}$

و بالتالي : $HK^2 = a^2 - 2 \times a \times \sqrt{a^2 - \frac{AB^2}{4}} + a^2 - \frac{AB^2}{4}$

و منه : $HK^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{AB^2}{4}} - \frac{AB^2}{4}$



4) لنبين أن : $HB = \sqrt{2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{AB^2}{4}}}$:

بتطبيق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم HBK نجد :

$$HB^2 = HK^2 + KB^2$$

و منه :
$$HB^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{AB^2}{4}} - \frac{AB^2}{4} + \frac{AB^2}{4}$$

و منه : $HB^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{AB^2}{4}}$

و منه : $HB = \sqrt{2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{AB^2}{4}}}$

توصل العالم اليوناني أرخميدس (212-287 قبل الميلاد) إلى إيجاد عبارة تقريبية تسمح بحساب محيط الدائرة و هذا بحساب محيط عدة مضلعات منتظمة تحاط بها تلك الدائرة، (أضلاع هذه المضلعات يكون عددا كبيرا)

حل الوضعية الإدماجية :

1) حساب حجم الماء المتواجد داخل المسبح :

حجم الماء v هو حجم المسبح، المسبح على شكل متوازي المستطيلات، و بالتالي :

$$v = 5 \times 7 \times 4 = 140$$

و منه : $v = 140m^3$

2) حجم الماء المتبقي بعد 5 ساعات من التفريغ :

المضخة تفرغ $7m^3$ في الساعة، يعني الحجم المتبقي بعد ساعة هو :

$$140 - 7 = 133$$

و بالتالي فإن حجم الماء المتبقي بعد 5 ساعات هو : $140 - 7 \times 5 = 105$

إذن حجم الماء المتقي بعد 5 ساعات من التفريغ هو $105m^3$

3) التعبير عن الدالة f بدلالة x :

بعد ساعة يكون حجم الماء المتبقي هو $140 - 7 \times 1 = 133$

بعد ساعتين يكون حجم الماء المتبقي هو $140 - 7 \times 2 = 126$

بعد 3 ساعات يكون حجم الماء المتبقي هو $140 - 7 \times 3 = 119$

بعد x ساعة سيكون حجم الماء المتبقي هو $140 - 7x$

و منه : $f(x) = 140 - 7x$

الدالة f من الشكل $f(x) = ax + b$ ، فهي دالة تألفية حيث :

$a = -7$ و $b = 140$

4) حساب عدد الساعات اللازمة كي يكون حجم الماء المتبقي داخل المسبح $77m^3$

x هو عدد ساعات التفريغ، و حجم الماء المتبقي هو $77m^3$ ، معناه :

$$f(x) = 77$$

أي نحسب العدد الذي صورته بالدالة f هو 77 ، فنحل المعادلة $f(x) = 77$

و منه : $140 - 7x = 77$ أي : $-7x = 77 - 140$

أي : $-7x = -63$

و منـــــــــــه : $x = 9$

إذن عدد الساعات اللازمة كي يكون حجم الماء المتبقي في المسبح $77m^3$ هو 9 ساعات

5) تمثيل الدالة f :

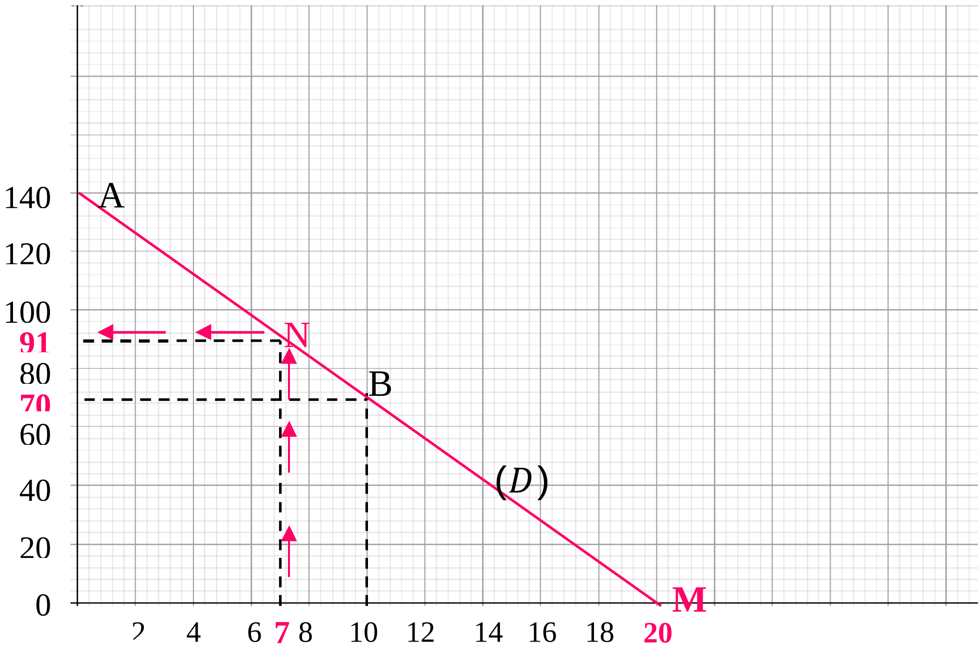
$$(D): y = 140 - 7x$$

$f(0) = 140$

$f(10) = 140 - 7 \times 10 = 70$

x	0	10
y	140	70
$(x\,;y)$	*A(0 ;140)*	*B(10 ;70)*

التمثيل البياني للدالة التألفية f هو المستقيم (D) المار من النقطتين *A(0 ;140)* و *B(10 ;70)*



6) القراءة البيانية :

⇐ عدد الساعات اللازمة لتفريغ المسبح بأكمله

أن يكون المسبح فارغ من الماء معناه أن تكون $f(x) = 0$، بيانيا النقطة $M(20\ ;\ 0)$ هي نقطة تقاطع المستقيم (D) التمثيل البياني للدالة f مع محور الفواصل، هذا يعني أنه من أجل $x = 20$ فإن $f(x) = 0$ و بالتالي فإن عدد الساعات اللازمة لتفريغ المسبح بأكمله هو 20 ساعة

⇐ حجم المتواجد داخل المسبح بعد 7 ساعات من التفريغ :

ننطلق من الفاصلة 7 و متبعين الأسهم حتى الوصول إلى (D) منحى الدالة f ثم إلى الترتيب 91

نقرأ إحداثيتا النقطة $N(7\ ;91)$، و هذا يدل على أن بعد 7 ساعات من التفريغ يبقى $91m^3$ من الماء داخل المسبح.

الموضوع الخامس

التمرين الأول :

1) أعط الكتابة العلمية للعدد B حيث : $B = \frac{6\times10^{-7}\times15\times10^{11}}{8(10^2)^4}$

2) أكتب العدد C على شكل $a\sqrt{5}$ حيث a عدد صحيح نسبي

$$C = 5\sqrt{80} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{180}$$

التمرين الثاني :

لتكن العبارة F حيث : $F = 4x^2 - 9 + (2x+3)(x-2)$

1) أنشر و بسط العبارة F

2) حلل $4x^2 - 9$ إلى جداء عاملين ثم استنتج تحليلا للعبارة F

3) حل المعادلة $(x^2 - 5) \times F = 0$

التمرين الثالث :

1) حل الجملة التالية :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5,5 \\ 6x - 2y = 1 \end{cases}$$

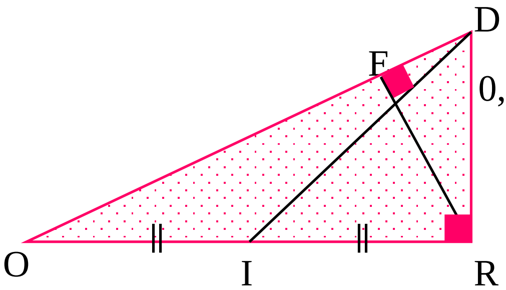
2) ليكن α و β قيسي زاويتين حادتين بالدرجات حيث :

$$\begin{cases} 3\cos\alpha + 4\tan\beta = 5{,}5 \\ 12\cos\alpha - 4\tan\beta = 2 \end{cases}$$

⇐ اعتمادا على الجواب الأول عين $\cos\alpha$ و $\tan\beta$

⇐ جد باستعمال الحاسبة α و β

التمرين الرابع :



في هذا التمرين كل الأطوال تدور إلى $0{,}1$

المثلث DOR قائم في النقطة R، حيث :

$\widehat{DOR} = 35°$ و $OR = 4cm$

1) أحسب الطول DR

2) أحسب الطول OD

3) في المثلث DOR، النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة R على $[OD]$،
أحسب الطول ER

4) النقطة I منتصف $[OR]$ ، جد بالتقريب قيس الزاوية $\widehat{IDR}$ مدورا النتيجة إلى الوحدة

الوضعية الإدماجية :

أنبوب من حديد طوله $5m$ عندما تكون t درجة حرارته $0°C$ ، و طوله l يزداد بتزايد درجة حرارته، الدالة التي تعبر هذه الوضعية هي :

$$l : t \to l(t) = 5(1 + 12 \times 10^{-6} t)$$

1) عين العددين a و b حيث $l(t) = at + b$

2) أحسب طول هذا الأنبوب عندما تكون درجة حرارته $30°C$

3) أحسب درجة حرارة هذا الأنبوب إذا كان طوله $5{,}0054m$

الحل المفصل للموضوع الخامس

حل التمرين الأول :

1) الكتابة العلمية للعدد B :

$$B = \frac{6 \times 10^{-7} \times 15 \times 10^{11}}{8(10^2)^4} = \frac{6 \times 15 \times 10^{-7} \times 10^{11}}{8 \times 10^{2\times4}}$$

$$= \frac{90 \times 10^{-7+11}}{8 \times 10^8} = \frac{90}{8} \times \frac{10^4}{10^8}$$

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$$
$$(10^m)^n = 10^{m\times n}$$

$$= 11{,}25 \times 10^4 \times 10^{-8}$$

$$\frac{10^m}{10^n} = 10^m \times 10^{-n}$$

$$= 11{,}25 \times 10^{4-8} = 11{,}25 \times 10^{-8}$$

$$= 1{,}125 \times 10 \times 10^{-8} = 1{,}125 \times 10^{1-8}$$

$$= 1{,}125 \times 10^{-7}$$

2) كتابة العدد C على شكل $a\sqrt{5}$ حيث a عدد صحيح نسبي :

$$C = 5\sqrt{80} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{180}$$

$$C = 5\sqrt{16 \times 5} - 3\sqrt{25 \times 5} + 2\sqrt{36 \times 5}$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a^2} = a$$
$$\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$$

$$C = 5\sqrt{4^2 \times 5} - 3\sqrt{5^2 \times 5} + 2\sqrt{6^2 \times 5}$$

$$C = 5\sqrt{4^2} \times \sqrt{5} - 3\sqrt{5^2} \times \sqrt{5} + 2\sqrt{6^2} \times \sqrt{5}$$

$$C = 5 \times 4\sqrt{5} - 3 \times 5\sqrt{5} + 2 \times 6\sqrt{5}$$

$$C = 20\sqrt{5} - 15\sqrt{5} + 12\sqrt{5}$$

$$C = (20 - 15 + 12)\sqrt{5}$$

$$C = 17\sqrt{5}$$

حل التمرين الثاني :

1) نشر و تبسيط العبارة F :

$$F = 4x^2 - 9 + (2x + 3)(x - 2)$$

$$F = 4x^2 - 9 + 2x^2 - 4x + 3x - 6$$

$$F = 6x^2 - x - 15$$

2) تحليل $4x^2 - 9$ إلى جداء عاملين :

لدينا : $4x^2 - 9 = (2x)^2 - (3)^2$ ، نفكر في المتطابقة

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ فنضع : $a = 2x$ و $b = 3$ ، و منه تحليل هذه العبارة من الشكل $(a - b)(a + b)$

أي : $4x^2 - 9 = (2x)^2 - (3)^2$

و منه : $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$

$\Leftarrow$ تحليل العبارة F :

$$F = 4x^2 - 9 + (2x + 3)(x - 2)$$
$$F = (2x - 3)(2x + 3) + (2x + 3)(x - 2)$$
$$F = (2x + 3)[(2x - 3) + (x - 2)]$$
$$F = (2x + 3)(2x - 3 + x - 2)$$
$$F = (2x + 3)(3x - 5)$$

3) حل المعادلة $(x^2 - 5) \times F = 0$:

$(x^2 - 5) \times F = 0$ معناه : $(x^2 - 5) \times (2x + 3)(3x - 5) = 0$

معناه : $3x - 5 = 0$ أو $2x + 3 = 0$ أو $x^2 - 5 = 0$

$3x - 5 = 0$ أي : $3x = 5$ أي : $x = \frac{5}{3}$

$2x + 3 = 0$ أي : $2x = -3$ أي : $x = -\frac{3}{2}$

$x^2 - 5 = 0$ أي : $x^2 = 5$ أي : $x = \sqrt{5}$

و منه للمعادلة $(x^2 - 5) \times F = 0$ ثلاثة حلول و هي : $\frac{5}{3}$ و $-\frac{3}{2}$ و $\sqrt{5}$

حل التمرين الثالث :

1) حل الجملة :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5,5 & \text{1} \\ 6x - 2y = 1 & \text{2} \end{cases}$$

نحل هذه الجملة بطريقة الجمع و التعويض

قصد التخلص من y نضرب طرفي المعادلة 2 في $(+2)$ فنحصل :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5,5 & \text{1} \\ 12x - 4y = 2 & \text{2} \end{cases}$$

نجمع طرفا لطرف المعادلتين فنجـــــــــد :

$$3x + 4y + 12x - 4y = 5,5 + 2$$

و منه : $15x = 7,5$ ومنه : $x = \frac{7,5}{15} = \frac{7,5 \div 7,5}{15 \div 7,5}$ نجد : $x = \frac{1}{2}$

نعوض قيمة x بـ$\frac{1}{2}$ في إحدى المعادلتين فنجـــــــــــــد : $3 \times \frac{1}{2} + 4y = 5{,}5$

أي : $\frac{3}{2} + 4y = 5{,}5$ أي : $4y = 5{,}5 - \frac{3}{2}$ أي : $4y = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}$

أي : $4y = \frac{8}{2} = 4$ أي : $y = \frac{4}{4}$ أي : $y = 1$

الثنائية $\left(\frac{1}{2}\,;1\right)$ هي حل للجملة المعطاة.

2) تعيين $cos\,\alpha$ و $tan\,\beta$ حيث:

$$\begin{cases} 3\cos\alpha + 4\tan\beta = 5{,}5 & (1) \\ 12\cos\alpha - 4\tan\beta = 2 & (2) \end{cases}$$

نضع $x = \cos\alpha$ $y = \tan\beta$ تصبح الجملة :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5{,}5 & (1) \\ 6x - 2y = 1 & (2) \end{cases}$$

حسب الجواب السابق فإن حل الجملة هي الثنائية $\left(\frac{1}{2}\,;1\right)$

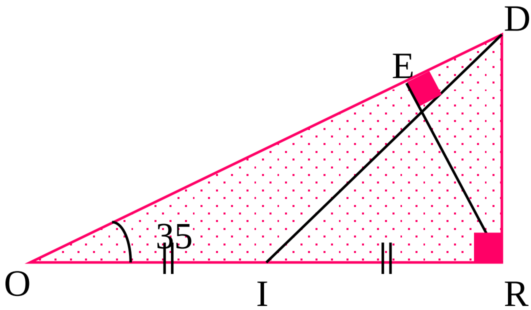
و بالتالي فإن : $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ و $\tan\beta = 1$

باستعمال الآلة الحاسبة، نضغط على اللمسات التالية :

$2ndf$	cos^{-1}	$\frac{1}{2}$	$=$
$2ndf$	tan^{-1}	1	$=$

فنجـــــــــــــد : $\alpha = 60°$ و $\beta = 45°$

حل التمرين الرابع :



1) حساب الطول DR :

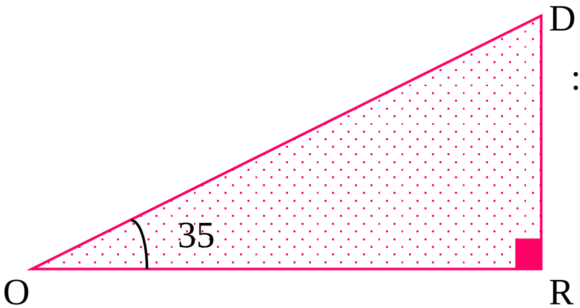
في المثلث القائم DOR لدينا :

$\tan\widehat{DOR} = \frac{DR}{OR}$ أي : $\tan 35° = \frac{DR}{4}$

و منـــــــــــــــــه : $DR = 4 \times \tan 35°$

و منه : $DR \approx 2{,}800$ بالتدوير إلى 0,1 نجــــــــــــد : $DR = 2{,}8cm$

2) حساب الطول OD :



في المثلث القائم DOR لدينا :

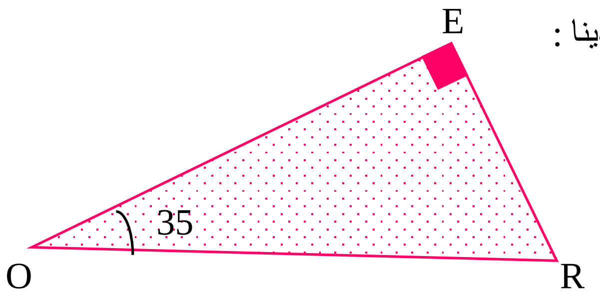
$\cos\widehat{DOR} = \frac{OR}{OD}$

أي : $\cos 35° = \frac{4}{OD}$

و منـــــــــــــــــه : $OD = \frac{4}{\cos 35°}$

و منه : $OD \approx 4{,}884$ بالتدوير إلى 0,1 نجــــــــــــد : $OD = 4{,}9cm$

3) حساب الطول ER :



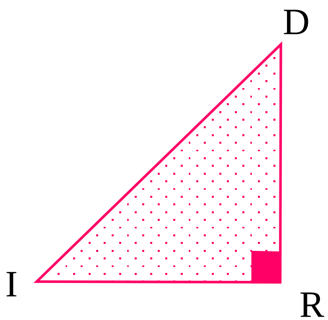
في المثلث القائم ROE لدينا :

$\sin\widehat{ROE} = \frac{ER}{OR}$ أي : $\sin 35° = \frac{ER}{4}$

و منــــــــــــه : $ER = 4 \times \sin 35°$

و منه : $ER \approx 2{,}294$ و بالتدوير إلى 0,1 نجــــــــــــد : $ER = 2{,}3cm$

4) حساب قيس الزاوية $\widehat{IDR}$:



في المثلث القائم IDR لدينا :

$\tan\widehat{IDR} = \frac{IR}{DR}$ لكن حسب

الجواب الأول $DR = 4 \times \tan 35°$

و عليه : $\tan\widehat{IDR} = \frac{2}{4\times\tan 35°} \approx 0{,}714$

بالضغط على اللمسات في الآلة الحاسبة $\boxed{0{,}714}$ $\boxed{\tan^{-1}}$ $\boxed{2ndf}$

نجد : $\widehat{IDR} \approx 35{,}537°$ بالتدوير إلى الوحدة نجــــــــــــد : $\widehat{IDR} = 36°$

حل الوضعية الإدماجية :

1) تعيين عين العددين a و b :

لدينا : $l(t) = 5(1 + 12 \times 10^{-6}t)$

معناه : $l(t) = 5 \times 1 + 5 \times 12 \times 10^{-6}t$

معناه : $l(t) = 5 + 60 \times 10^{-6}t$

و بالتـــــــــــــالي : $b = 5$ و $a = 60 \times 10^{-6}$

الدالة l من الشكل $l(t) = at + b$ فهي دالة تألفية.

حساب طول هذا الأنبوب عندما تكون درجة حرارته $30°C$:

معناه حساب صورة العدد 30 بالدالة l :

$l(t) = 5 + 60 \times 10^{-6}t$ أي : $l(30) = 5 + 60 \times 10^{-6} \times 30$

و منـــــــــــه : $l(30) = 5 + 1800 \times 10^{-6}$

و منـــــــــــه : $l(30) = 5 + 18 \times 10^{2} \times 10^{-6}$

و منـــــــــــه : $l(30) = 5 + 18 \times 10^{-4}$

و منـــــــــــه : $l(30) = 5{,}0018$

إذن طول هذا الأنبوب عندما تكون درجة حرارته $30°C$ هو $5{,}0018m$ أي يزداد طوله بمقدار $18 \times 10^{-4}m$

2) حساب درجة حرارة هذا الأنبوب إذا كان طوله $5{,}0054m$:

طول هذا الأنبوب هو $5{,}0054m$ أي : $l(t) = 5{,}0054$ ، في هذه الحالة نحسب العدد t الذي صورته بالدالة l هو $5{,}0054$، و عليه نحل المعادلة

$l(t) = 5{,}0054$

$l(t) = 5{,}0054$ معناه : $5 + 60 \times 10^{-6}t = 5{,}0054$

معناه : $60 \times 10^{-6}t = 5{,}0054 - 5$

معناه : $60 \times 10^{-6}t = 0{,}0054$ أي : $60 \times 10^{-6}t = 54 \times 10^{-4}$

معناه : $t = \frac{54\times10^{-4}}{60\times10^{-6}}$ أي : $t = \frac{54}{60} \times \frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 0{,}9 \times 10^{-4} \times 10^{6}$

و منــــــــــــــــه : $t = 0{,}9 \times 10^{2}$ و منــــــــــــــــه : $t = 90°C$

إذن درجة حرارة هذا الأنبوب عندما يكون طوله $5{,}0054m$ هي $90°C$

مواضيع مقترحة لشهادة التعليم المتوسط

الموضوع الأول

التمرين الأول :

ليكن العددان A و B حيث :

$$B = \frac{62{,}5 \times 10^{12} \times 1{,}2 \times 10^{-5}}{0{,}3 \times 10^{10}} \quad ; \quad A = \sqrt{63} - 2\sqrt{28} + 5\sqrt{7}$$

1) أكتب A على شكل $a\sqrt{7}$ حيث a عدد طبيعي

2) أعط الكتابة العلمية للعدد B

3) بين أن : $\frac{6A}{12} - \frac{A}{2} = 0$

التمرين الثاني :

لتكن العبارة E حيث : $E = (2x-5)^2 - 3(2x-5)(x-4)$

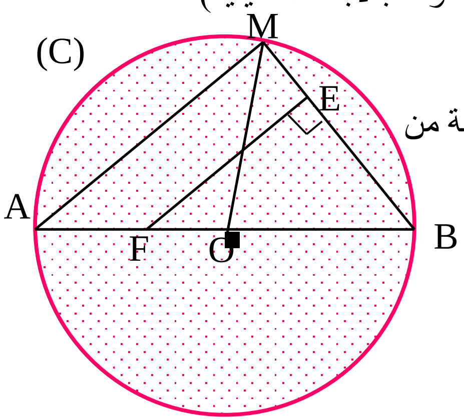
1) أنشر و بسط العبارة E

2) حلل E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى

3) حل المعادلة : $(2x-5)(-x-1) = 0$

التمرين الثالث :

إليك الشكل المقابل (الأبعاد غير مرسومة بالأبعاد الحقيقية)



(C) دائرة مركزها O

و قطرها $AB = 10cm$ و M نقطة من

الدائرة حيث : $BM = 6cm$

1) ما نوع المثلث MBA ؟ علل

2) أحسب الطول AM

3) أحسب قيس الزاوية $\widehat{MBA}$ بالتدوير إلى الوحدة ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{MOA}$

4) المستقيم العمودي على (MB) في E يقطع $[AB]$ في F حيث :

$BE = 5{,}4cm$ أحسب الطول BF

التمرين الرابع :

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O\,,\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{OJ}\,)$

1) علم النقط : $C(7\,;\,4)$, $B(5\,;\,6)$, $A(2\,;3)$

2) أحسب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{BC}$ ثم استنتج الطول BC

3) إذا علمت أن : $AC = \sqrt{26}$, $AB = 3\sqrt{2}$, أثبت أن المثلث ABC قائم

4) أوجد إحداثيي النقطة D صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$

الوضعية الإدماجية :

الجزء الأول

في استطلاع للرأي قامت به جريدة وطنية حول استعمال الهاتف النقال خلال شهر رمضان مع مجموعة من الأشخاص تحصلت على النتائج التالية :

مدة الاستعمال	$60 \le t < 120$	$120 \le t < 180$	$180 \le t < 240$	$240 \le t < 300$
التكرار	20	32	38	10
مركز الفئة				
التكرار المجمع الصاعد				

1) أنقل ثم أكمل الجدول

2) ما هو معدل استعمال الهاتف النقال؟

3) ما هي الفئة الوسيطية؟

الجزء الثاني

⇐ تعرض شركة الهاتف النقال على زبائنها صيغتين للدفع :

الصيغة الأولى : دفع 8 دينار للدقيقة

الصيغة الثانية : دفع 6 دينار للدقيقة مع اشتراك شهري قدره 500 دينار

1) أكمل الجدول التالي :

عدد الدقائق المستهلكة خلال شهر	100	...	...
المبلغ المدفوع حسب الصيغة 1		1400	
المبلغ المدفوع حسب الصيغة 2			2450

2) ليكن x هو عدد الدقائق المستهلكة خلال شهر، و ليكن P_1 المبلغ المدفوع حسب الصيغة 1 و P_2 المبلغ المدفوع حسب الصيغة 2

⇐ عبر عن P_1 و P_2 بدلالة x

3) في المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O\,, \overrightarrow{OI}\,, \overrightarrow{OJ}\,)$ مثل بيانيا الدالتين :

$$g(x) = 6x + 500 \qquad ; \qquad f(x) = 8x$$

نأخذ على محور الفواصل $1cm$ لكل 50 دقيقة، و على محور التراتيب $1cm$ لكل 500دج

4) حل المتراجحة : $6x + 500 > 8x$ ثم فسر النتيجة المتحصل عليها

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

نعتبر الأعداد التالية :

$$A = \frac{70}{180} \times \frac{20}{70} - \left(\frac{50}{30} - 1\right)^2 \; ; \; B = \frac{3 \times 10^2 \times 5 \times 10^4}{12 \times (10^3)^3}$$

$$C = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{125} - 7\sqrt{45}$$

1) أكتب العدد A على شكل كسر غير قابل للاختزال

2) أعط الكتابة العلمية للعدد B

3) أكتب العدد C على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a عدد نسبي صحيح و b أصغر عدد طبيعي ممكن

التمرين الثاني :

لتكن العبارة E حيث : $E = 7(3x-2)(2x-5) - (3x-2)^2$

1) أنشر و بسط العبارة E

2) حلل العبارة E

3) حل المعادلة $(x^2-3)^2 E = 0$

التمرين الثالث :

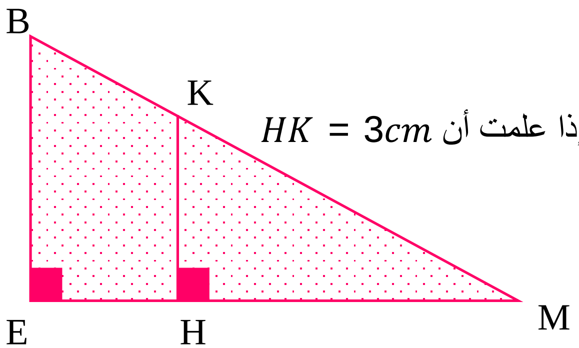
في مطعم دفعت عائلة بلقاسم مبلغ 2240دج مقابل ثلاث وجبات للكبار و وجبة واحدة للصغار، بينما دفعت عائلة محمد مبلغ 1880دج مقابل وجبتين للكبار و وجبتين للصغار.

⇐ أحسب ثمن الوجبة الواحدة للكبار و ثمن الوجبة الواحدة للصغار

التمرين الرابع :

تمعن جيد في الشكل المقابل حيث :

$EM = 8cm\ ;\ MB = 10cm\ ;\ EH = 3{,}2cm\ ;\ BK = 4cm$



1) أوجد النسبة $\frac{HK}{BE}$

2) أحسب الطول BE إذا علمت أن $HK = 3cm$

الوضعية الإدماجية :

قناة تلفزيونية تقترح على الجمهور التصويت على مرشحهم المفضل عن طريق الـsms، لهذا تقدمت ثلاث متعاملين للهاتف و قدموا عروض كما هي مبينة في الجدول أدناه :

دفع 90دج و 15دج للرسالة الواحدة	عرض المتعامل الأول
30دج للرسالة الواحدة	عرض المتعامل الثاني
210دج لعدد غير محدود من الرسائل	عرض المتعامل الثالث

نسمي x عدد الرسائل sms

1) جد أفضل عرض لشخص أرسل $50sms$ خلال 30 دقيقة

2) ليكن $f(x)$ المبلغ المدفوع بعرض المتعامل الأول، $g(x)$ المبلغ المدفوع بعرض المتعامل الثاني و $h(x)$ المبلغ المدفوع بعرض المتعامل الثالث

$\Leftarrow$ عبر عن الدوال $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ بدلالة x

$\Leftarrow$ ما طبيعة كل دالة؟ مع التعليل

3) في معلم متعامد و متجانس، مثل الدوال $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$

نأخذ $1cm$ على محور الفواصل يمثل $10sms$، $10cm$ على محور التراتيب يمثل 30دج

4) بقراءة بيانية :

$\Leftarrow$ لدى مهدي 150دج، يريد التصويت لمرشحه المفضل، حدد العرض الأفضل له

$\Leftarrow$ جد عدد sms الذي من أجلها تصبح عرض المتعامل الثالث أفضل

الموضوع الثالث

التمرين الأول :

1) أحسب $PGCD(76800\,;58800)$

2) عين القيمة المضبوطة لـ : $\sqrt{\dfrac{76800}{58800}}$

التمرين الثاني :

1) بسط كلا من العدد m و n حيث :

$$m = \sqrt{4800} - \sqrt{4500} \quad ; \quad n = (\sqrt{3} - 1)(3 + 4\sqrt{3})$$

2) أجعل مقام النسبة $\frac{m}{n}$ عددا ناطقا

التمرين الثالث :

تحصل تلاميذ أحد أقسام الرابعة متوسط على هذه النقاط في فرض مادة الرياضيات :

النقطة	07	09	10	12	14	18
عدد التلاميذ	3	5	7	6	5	1

1) ما هو عدد تلاميذ القسم؟

2) أحسب معدل القسم في هذا الفرض (مدورا النتيجة إلى الوحدة)

3) أعط جدول التكرارات المجمعة الصاعدة و التواترات المجمعة المتزايدة

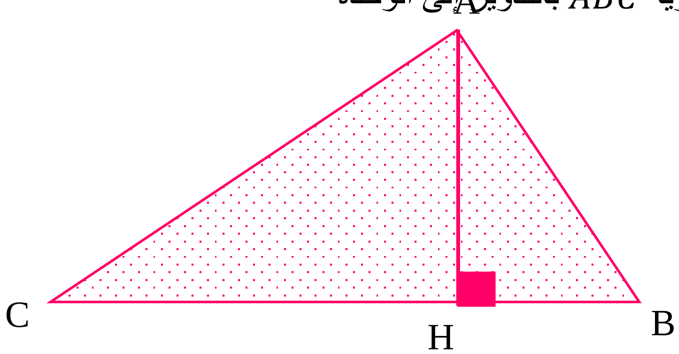
4) أعط النسبة المئوية لعدد التلاميذ الذي تحصلوا على علامة تفوق أو تساوي 10 (بالتدوير إلى 0,1)

التمرين الرابع :

ABC مثلث حيث : $\widehat{ACB} = 30°$; $BH = 1{,}5cm$; $AC = 4cm$

1) أحسب القيمة المضبوطة لـAH

2) جد قيس الزاوية $\widehat{ABC}$ بالتدوير إلى الوحدة



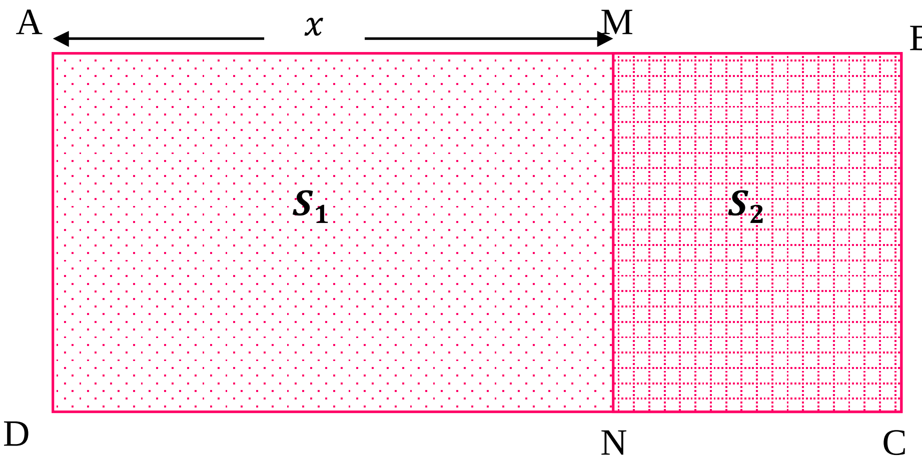
الوضعية الإدماجية :

بسبب فيروس كورونا الذي اجتاح العالم، قررت السلطات الجزائرية بناء مستشفى للتصدي لهذا الوباء، لهذا خصصت قطعة أرضية مساحتها $2400m^2$ و عرضها يساوي ثلثي طولها كما هي مبينة في الشكل أدناه :

S_1 الجزء المخصص للعلاج

S_2 الجزء المخصص للإدارة

نضع $AM = x$



1) أحسب عرض و طول هذه القطعة

2) عبر عن S_1 و S_2 مساحتي الجزأين بدلالة x

3) أراد المهندس المكلف بهذا المشروع أن تكون مساحة الجزء S_2 أقل بـ3 مرات عن مساحة الجزء S_1 . ساعد المهندس في تحديد الطول AM

4) في معلم متعامد و متجانس، مثل بيانيا الدالتين S_1 و S_2

نأخذ : $1cm$ على محور الفواصل يمثل $5m$ ، $1cm$ على محور التراتيب يمثل ($80m^2$

5) حل المتراجحة $S_1(x) > 3\,S_2(x)$

الموضوع الرابع

التمرين الأول :

A عدد حيث : $A = (2 - \sqrt{3})^2$

1) أنشر ثم بسط العدد A

2) لتكن العبارة E حيث : $E = m^2 - (7 - 4\sqrt{3})$

⇐ أحسب القيمة المضبوطة للعبارة E من أجل $m = \sqrt{7}$

⇐ حلل العبارة E إلى جداء عاملين

⇐ حل المعادلة $(m - 2 + \sqrt{3})(m + 2 - \sqrt{3}) = 0$

التمرين الثاني :

1) حل الجملة التالية :

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x + 4y = 32 \end{cases}$$

2) أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 500 و 125

3) ملأ تاجر 4000غ من الشاي في علب من صنف 125غ و 500غ، إذا علمت أن العدد الكلي للعلب هو 14، أوجد عدد العلب لكل صنف

(لاحظ أن $32 \times 125 = 4000$)

التمرين الثالث :

$[AB]$ قطعة مستقيم طولها $6cm$

1) أنشئ النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $90°$ في الاتجاه الموجب

2) ما نوع المثلث ABC ؟ علل إجابتك

3) أوجد الطول BC

التمرين الرابع :

1) أنشئ المثلث EFG القائم في F حيث : $EF = FG = 4cm$

2) أنشئ النقطتين : D صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{EF}$

C صورة E بالانسحاب الذي شعاعه$\overrightarrow{GD}$

3) بين أن الرباعي $EGDC$ مربع ثم أحسب مساحته

4) ليكن الشعاع $\vec{U}$ حيث : $\vec{U} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FG}$

$\Leftarrow$ بين أن $\vec{U} = \overrightarrow{ED}$

الوضعية الإدماجية :

تم بناء خزان للماء على شكل أسطوانة دورانية نصف قطر قاعدتها $5m$ و ارتفاعها $4m$ لتزويد مسبح على شكل متوازي المستطيلات بعدا قاعدته $20m$ و $6m$ وارتفاعه $2m$

1) أحسب سعة كل من الخزان و المسبح

2) إذا علمت أن الخزان مملوء تماما و المسبح فارغ تماما و تدفق الماء في المسبح هو $(12m^3/h)$ أي $12m^3$ في الساعة.

$\Leftarrow$ أحسب كمية الماء المتدفقة في المسبح و كمية الماء المتبقية في الخزان بعد مرور 3 ساعات

3) نفرض أن الخزان مملوء (سعته $314m^3$) و المسبح فارغ، نسمي $f(x)$ كمية الماء المتبقية في الخزان و $g(x)$ كمية الماء المتدفقة في المسبح بالمتر المكعب بعد مرور x ساعة

$\Leftarrow$ عبر عن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة x

4) نعتبر الدالتين f و g حيث :

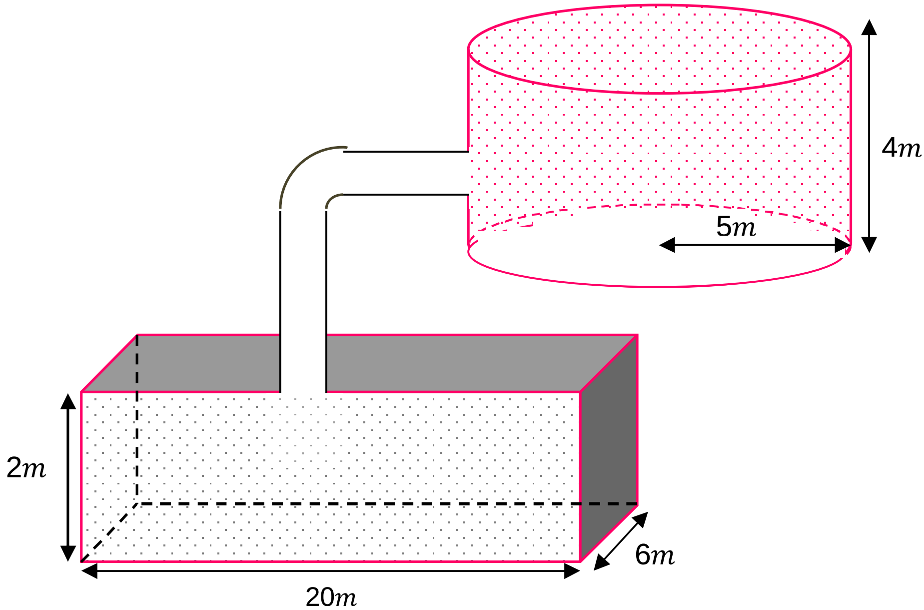
$$g(x) = 12x \quad ; \quad f(x) = 314 - 12x$$

$\Leftarrow$ أرسم التمثيل البياني لكل من الدالتين f و g في معلم متعامد و متجانس

نأخذ : $1cm$ على محور الفواصل يمثل $4h$، $1cm$ عل محور التراتيب يمثل $50m^3$

$\Leftarrow$ أوجد الوقت المستغرق لملء الخزان

$\Leftarrow$ حل المعادلة $f(x) = g(x)$، ماذا يمثل حل هذه المعادلة؟



الموضوع الخامس

التمرين الأول :

1) لتكن العبارة A حيث : $A = 3x - 5$ حيث x عدد حقيقي

⇐ أحسب القيمة المقربة إلى 10^{-2} بالنقصان للعدد A من أجل $x = \sqrt{2}$

⇐ حل المتراجحة $A \geq 0$ ثم مثل مجموعة حلولها بيانيا

2) أنشر ثم بسط العبارة B حيث : $B = (3x - 5)^2 + 9x^2 - 25$

⇐ استنتج أن $B = 6x(3x - 5)$

⇐ حل المعادلة $B = 0$

التمرين الثاني :

A و B عددان حقيقيان حيث :

$$A = \sqrt{108} - \sqrt{12} \quad ; \quad B = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

1) أكتب العدد A على الشكل $a\sqrt{3}$ حيث a عدد طبيعي
2) أكتب العدد B على شكل نسبة مقامها عدد ناطق
3) بين أن العدد C هو عدد طبيعي حيث : $C = (A + 1)(8B - 1)$

التمرين الثالث :

$(O;\ \vec{\imath};\vec{\jmath})$ معلم متعامد و متجانس

1) علم النقط : $A(0\,;2)$ ، $B(1\,;0)$ و $C(-1\,;0)$
2) بين طبيعة المثلث ABC
3) عين إحداثيتا النقطة D صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه O و زاويته $180°$

$\Leftarrow$ استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$

التمرين الرابع :

$(\wp)$ دائرة مركزها O و قطرها $AB = 8cm$ ، C نقطة من الدائرة حيث $BC = 3cm$

1) أحسب بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة قيس الزاوية $\widehat{BAC}$ ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{BOC}$
2) F صورة النقطة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$ ، المستقيم الذي يشمل F و يوازي (BC) يقطع (AC) في النقطة D.

$\Leftarrow$ أحسب الطول DF

الوضعية الإدماجية :

يقترح مدير صحيفة يومية على زبائنه صيغتين لاقتناء الجريدة.
الصيغة الأولى : ثمن الجريدة 10دج
الصيغة الثانية : ثمن الجريدة 8دج مع اشتراك سنوي قدره 500دج
1) أنقل و أتمم الجدول :

عدد الجرائد المشتراة	50		
مبلغ الصيغة الأولى بـــ دج		1000	
مبلغ الصيغة الثانية بـــ دج			3300

2) ليكن x عدد الجرائد المشتراة ، نسمي $f(x)$ الثمن المدفوع بالصيغة الأولى و $g(x)$ الثمن المدفوع بالصيغة الثانية.
⇐ عبر عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة x

3) مثل بيانيا الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث :
$2cm$ على محور الفواصل يمثل 50 جريدة و $2cm$ على محور التراتيب يمثل 500دج

4) حل المعادلة $f(x) = g(x)$ و ماذا يمثل الحل؟

5) ما هي الصيغة الأفضل في الحالتين :

⇐ عند اقتناء 150 جريدة

⇐ عند اقتناء 270 جريدة

تمارين من الأولمبياد

التمرين الأول : سطيف 2020/ الدور الولائي

أكتب العدد A بأبسط شكل ممكن دون إجراء العمليات الحسابية و دون استعمال الآلة الحاسبة :

$$A = \frac{100001}{99999} - \frac{99999}{100000}$$

الحل :

نضع $x = 100000$

لاحظ أن : $100001 = 100000 + 1$ و بالتالي :

$$100001 = x + 1$$

$99999 = 100000 - 1$ و بالتالي :

$$99999 = x - 1$$

و منه العدد من الشكل : $A = \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}$ و منه :

$$A = \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x+1) - (x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

نوحد مقامي هذين الكسرين

$$A = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{x^2 - 1}$$

$$A = \frac{(x^2 + 1 + 2x) - (x^2 + 1 - 2x)}{x^2 - 1}$$

$$A = \frac{x^2 + 1 + 2x - x^2 - 1 + 2x}{x^2 - 1}$$

$$A = \frac{4x}{x^2 - 1}$$

بتعويض قيمة x بـ100000 نجد :

$$A = \frac{4x}{x^2 - 1} = \frac{4 \times 100000}{100000^2 - 1} = \frac{400000}{9999999999}$$

و منـــــــــــــــه :

$$A = \frac{400000}{9999999999}$$

التمرين الثاني : سطيف 2020/ الدور الولائي

استأجر العم محند حفارة لإنجاز نقب بئر ارتوازي بعمق $90m$ للوصول إلى الماء.

إذا علمت أن الحفارة تصل إلى عمق $32m$ في اليوم الأول، و يتراجع مردودها بـ 25% بعد كل يوم من النقب عن سابقه.

هل تكفي أربعة أيام للوصول إلى العمق المرغوب؟

خفض x بـ $p\%$ هو حساب y حيث :

$$y = x\left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

الحل :

ليكن P_1 العمق المنجز في اليوم الأول

P_2 العمق المنجز في اليوم الثاني

P_3 العمق المنجز في اليوم الثالث

P_4 العمق المنجز في اليوم الرابع

$\Leftarrow$ العمق المنجز في اليوم الأول هو $32m$ ، و بالتالي : $P_1 = 32m$

$\Leftarrow$ العمق المنجز في اليوم الثاني :

$$P_2 = 32\left(1 - \frac{25}{100}\right) = 32 \times \frac{75}{100} = 24$$

و بالتالي : $P_2 = 24m$

⇐ العمق المنجز في اليوم الثالث :

$$P_3 = 24\left(1 - \frac{25}{100}\right) = 24 \times \frac{75}{100} = 18$$

و بالتالي : $P_3 = 18m$

⇐ العمق المنجز في اليوم الرابع :

$$P_4 = 18\left(1 - \frac{25}{100}\right) = 18 \times \frac{75}{100} = 13{,}5$$

و بالتالي : $P_4 = 13{,}5m$

وبما أن : $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 32 + 24 + 18 + 13{,}5 = 87{,}5 \neq 90$

و بالتالي فإن الأيام الأربعة لا تكفي للوصول المرغوب

التمرين الثالث : المدية 2020 الدور الولائي

ليكن المجموعتان الجبريتان الآتيتان :

$$x = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + 2019^2 - 2020^2$$

$$y = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2019 + 2020$$

بين أن $x + y = 0$

الحل :

$$1^2 - 2^2 = (1 - 2)(1 + 2) = -(1 + 2)$$

لنبين أن $x + y = 0$:

$$x = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + 2019^2 - 2020^2$$

$$x = (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \cdots + (2019^2 - 2020^2)$$

$$x = (1 - 2)(1 + 2) + (3 - 4)(3 + 4) + \cdots + (2019 - 2020)(2019 + 2020)$$

$$x = -(1 + 2) - (3 + 4) - \cdots - (2019 + 2020)$$

$$x = -1 - 2 - 3 - 4 - \cdots - 2019 - 2020$$

لاحظ أن : $x = -1 - 2 - 3 - 4 - \cdots - 2019 - 2020$

و منه : $x = -\underbrace{(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2019 + 2020)}_{\boxed{y}}$

و منـــــــــــــــــــه : $x = -y$

و بالتـــــــــــــــــالي : $x + y = 0$

التمرين الرابع : المدية 2020 الدور الولائي

x عدد حقيقي موجب تماما حيث : $x + 2\sqrt{x} = 168$

عين قيمة x

الحل :

$x + 2\sqrt{x} = 168$ معناه : $x + 2\sqrt{x} + 1 = 168 + 1$

لاحظ أن : $x + 2\sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} + 1\right)^2$

و منه : $\left(\sqrt{x} + 1\right)^2 = 169$

و منه : $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{169} = 13$ و منــــــــه : $\sqrt{x} = 13 - 1 = 12$

و منه : $\left(\sqrt{x}\right)^2 = 12^2$

و بالتـــــــــــــــالي : $x = 144$

التمرين الخامس : الجلفة 2016/ الدور الولائي

1) أحسب : $(\sqrt{5}+2)^2$ و $(\sqrt{5}-2)^2$

2) نضع : $A=\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

$\Leftarrow$ أثبت أن الجذر التربيعي للعدد A هو 2

الحل :

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

1) لنحسب $(\sqrt{5}+2)^2$ و $(\sqrt{5}-2)^2$:

لحساب هذين العددين نستعمل المتطابقات الشهير من الشكل :

$$(\sqrt{5}+2)^2=(\sqrt{5})^2+2\times\sqrt{5}\times 2+2^2=5+4\sqrt{5}+4$$

$$=9+4\sqrt{5}$$

$$(\sqrt{5}-2)^2=(\sqrt{5})^2-2\times\sqrt{5}\times 2+2^2=5-4\sqrt{5}+4$$

$$=9-4\sqrt{5}$$

2) لنثبت أن الجذر التربيعي للعدد A هو 2 :

معناه نثبت أن $\sqrt{A}=2$:

نعوض $9+4\sqrt{5}$ بـ $(\sqrt{5}+2)^2$ و $9-4\sqrt{5}$ بـ $(\sqrt{5}-2)^2$

لدينا : $A=\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

معناه : $A=\sqrt{(\sqrt{5}+2)^2}-\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$

معناه : $A = (\sqrt{5} + 2) - (\sqrt{5} - 2)$

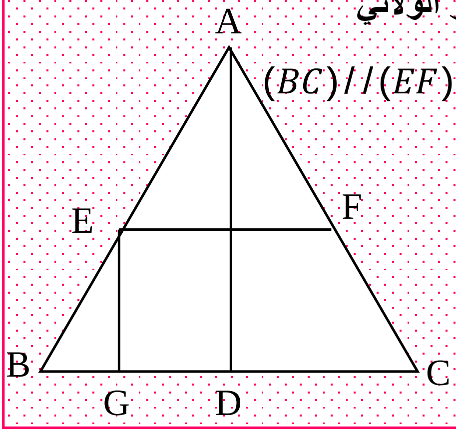
معناه : $A = \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 2$

و منه : $A = 4$

و بالتـــــــــــــالي : $\sqrt{A} = \sqrt{4} = 2$

إذن : $\sqrt{A} = \sqrt{\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}} = 2$

التمرين السادس : الجزائر 2016/ الدور الولائي



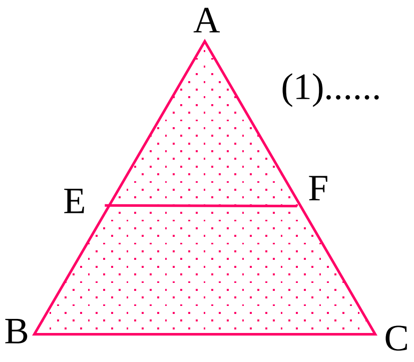
لاحظ الشكل حيث : $(AD)//(EG)$ ، $(BC)//(EF)$

أثبت أن : $\frac{EF}{BC} + \frac{EG}{AD} = 1$

الحل :

في المثلث ABC :

لدينا النقط A، F، C و A، E، B على استقامة واحدة و $(BC)//(EF)$



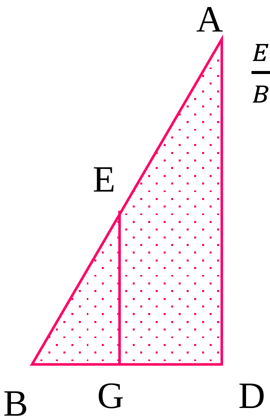
فحسب نظرية طالس : $\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}$ ......(1)

في المثلث ADB :

لدينا النقط B، G، D و B، E، A على

استقامة واحدة و $(AD)//(EG)$

فحسب نظرية طالس : $\frac{BG}{BD}=\frac{BE}{BA}=\frac{EG}{AD}$ ....(2)



من المساويتين (1) و (2) ينتج : $\frac{EF}{BC}+\frac{EG}{AD}=\frac{AE}{AB}+\frac{BE}{BA}$

و منه : $\frac{EF}{BC}+\frac{EG}{AD}=\frac{AE+BE}{AB}$

و منه : $\frac{EF}{BC}+\frac{EG}{AD}=\frac{AB}{AB}$

و بالتـــــــــــــالي : $\frac{EF}{BC}+\frac{EG}{AD}=1$

التمرين السابع : الجزائر 2020/ الدور الجهوي

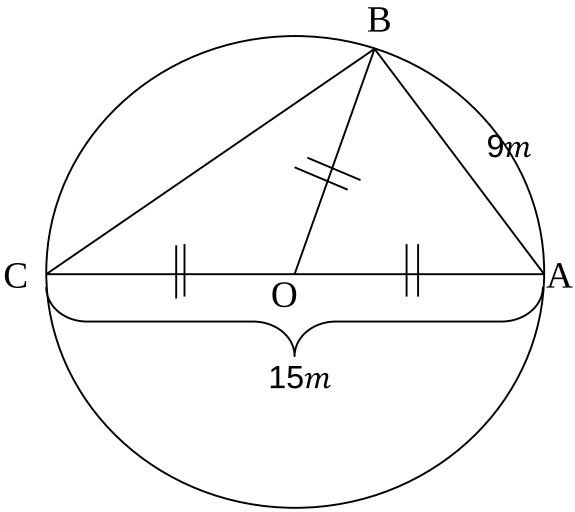
غرس أحمد أربعة أشجار في حديقة (التين، الزيتون، التفاح و البرتقال)، إذا علمت أن شجرة الزيتون تبع عن باقي الأشجار بـ $7{,}5m$ و تبعد شجرة التين عن شجرة البرتقال بـ $15m$ و عن شجرة التفاح بـ $9m$

كم تبعد شجرة التفاح عن شجرة البرتقال؟

الحل :

نرمز بـO إلى شجرة الزيتون، A إلى شجرة التين، B إلى شجرة التفاح و C إلى شجرة البرتقال

$\Leftarrow$ شجرة الزيتون تبعد عن باقي الأشجار بـ$7{,}5m$ و بالتالي



النقط A، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $7{,}5m$

$\Leftarrow$ تبعد شجرة التين عن شجرة البرتقال بـ$15m$

و بالتالي النقطتان A و C متناظرتان بالنسبة إلى النقطة O مركز هذه الدائرة.

و عليه فإن المثلث ABC قائم في النقطة B، و بتطبيق نظرية فيثاغورث فإن : $AC^2 = BC^2 + AB^2$

معناه : $BC^2 = AC^2 - AB^2$

معناه : $BC^2 = 15^2 - 9^2 = 144$

معناه : $BC = \sqrt{144} = 12$

و بالتالي فإن شجرة التفاح تبعد بـ $12m$عن شجرة البرتقال

التمرين الثامن : الجزائر 2020/ الدور الجهوي

قام ملك برحلة في البرية، تنقلت قافلة الرحلة في عربات، كل واحدة منها حملت نفس العدد من الركاب، تعطلت خلال الذهاب عشر عربات، فاضطرت كل عربة غير معطلة إلى حمل راكب إضافي، أثناء العودة تعطلت خمس عشرة عربة أخرى، فأعيد تقسيم الركاب على العربات المتبقية بالتساوي، فزاد عدد الركاب في كل عربة بثلاثة أفراد عما كان عليه في بداية الرحلة.

كم كان عدد العربات في بداية الرحلة؟ و ما عدد المشاركين فيها؟

الحل :

نرمز بـa إلى عدد العربات و b عدد الركاب في العربة الواحدة.

العربات تحمل نفس العدد من الركاب، و بالتالي فإن عدد المشاركين هو ab .

بعد تعطل 10 عربات يصبح :

$\Leftarrow$ عدد العربات هو $a-10$

$\Leftarrow$ عدد الركاب في كل عربة هو $b+1$

و منه : $ab=(a-10)(b+1)$ و منه : $ab=ab+a-10b-10$

و منه : $a-10b=10$ ....(1)

بعد تعطل 15 عربة يصبح :

$\Leftarrow$ عدد العربات هو $a-25$

$\Leftarrow$ عدد الركاب في كل عربة هو $b+3$

و منه : $ab=(a-25)(b+3)$ ومنه : $ab=ab+3a-25b-75$

و منه : $3a-25b=75$ ....(2)

نحل الجملة :

$$\begin{cases} a-10b=10 \\ 3a-25b=75 \end{cases}$$

من المعادلة الأولى لدينا $a = 10 + 10b$، نعوض في المعادلة الثانية فنجد :

$3(10 + 10b) - 25b = 75$ أي : $30 + 30b - 25b = 75$

أي : $5b = 45$

و منــــــــــــه : $b = 9$

نعوض قيمة b بـ9 في إحدى المعادلتين فنجد : $a - 10 \times 9 = 10$

و منــــــــــــه : $a = 100$

إذن : عدد العربات هو 100 و عدد المشاركين هو $100 \times 9 = 900$

التمرين التاسع : الجزائر 2020/ الدور الجهوي

سافر رجلان معا، فتزود الأول بـ5 أرغفة و الثاني بـ3 أرغفة، في طريقهما التقيا برجل سخي فأكل معهما الطعام بالتساوي حتى نفذ، و لما انصرف كافأهما بـ8 قطع ذهبية و اختلفا في كيفية تقسيمهما بينهما، فمر عليهم رجل فتحاكما إليه، فأعطى لصاحب الـ5 أرغفة 7 قطع و صاحب الـ3 أرغفة قطعة واحدة.

هل كان الرجل منصفا في قسمته؟ و ضح

الحل :

الرجل أكل معهما بالتساوي، معناه يضطر الشخصان إلى تقسيم كل رغيف إلى 3 (ثلاثة أشخاص)

صاحب الـ5 أرغفة عندما يقسم كل رغيف إلى 3 يتحصل على 15 جزءا $(5\times3=15)$

صاحب الـ3 أرغفة عندما يقسم كل رغيف إلى 3 يتحصل على 9 أجزاء $(3\times3=9)$

مجموع الأرغفة هو 24 $(15+9)$ ، عليه فإن كل واحد منهم أكل 8 أجزاء

$\Leftarrow$ ما أكله الرجل من صاحب الـ5 أرغفة :

لصاحب الـ5 أرغفة 15 جزء، أكل 8 و أعطى للرجل 7 لأن : $15-8=7$

⇐ ما أكله الرجل من صاحب الـ3 أرغفة :

لصاحب الـ3 أرغفة 9 أجزاء، أكل 8 و أعطى للرجل 1 لأن : 1=8-9
و بالتالي يكون الرجل أكل نفس ما أكلها صاحبي الأرغفة أي 8 لأن : 8=1+7

و لهذا كان الرجل الحكيم منصفا في قسمته، لذا أعطى 7 قطع ذهبية لصاحب الـ5 أرغفة لأنه قدم 7 أجزاء للرجل، و أعطى قطعة ذهبية واحدة لصاحب الـ3 أرغفة لأنه قدم جزء واحد للرجل.

التمرين العاشر : الجزائر 2020/ الدور الجهوي

أقلعت طائرة على الساعة $8h$ صباحا من قاعدة لأداء مهمة مراقبة، و بعد قطع مسافة معينة عادت إلى قاعدتها على الساعة $11h30min$ صباحا متبعة نفس مسار الذهاب.
إذا كانت سرعتها المتوسطة خلال الذهاب $960km/h$ و خلال الإياب $720km/h$ ، ما هو الوقت المستغرق خلال الذهاب؟ و ما هو الوقت المستغرق خلال الإياب؟

الحل :

نرمز بـd إلى المسافة المقطوعة في الذهاب و هي نفسها في الإياب، t_1 مدة قطع المسافة في الذهاب، و t_2 مدة قطع المسافة في الإياب.

نعلم أن السرعة المتوسطة هي حاصل قسمة المسافة المقطوعة على مدة قطع هذه المسافة، و بالتالي :

⇐ في الذهاب :

السرعة المتوسطة هي $960km/h$ أي $960 = \frac{d}{t_1}$

و منـــــــــــــــــه : $d = 960t_1$ ....(1)

⇐ في الإياب :

السرعة المتوسطة هي $720km/h$ أي $720 = \frac{d}{t_2}$

و منــــــــــه : $d = 720t_2$ ....(2)

من (1) و (2) ينتج أن : $960t_1 = 720t_2$

لاحظ أن : $240 \times 3t_2 = 240 \times 4t_1$ و بالتالي : $4t_1 = 3t_2$

و منــــــــــه : $4t_1 - 3t_2 = 0$

من جهة أخرى، الطائرة أقلعت على الساعة $8h$ و عادت على الساعة $11h30min$، يعني أنها استغرقت $3h30min$ (3 ساعات و نصف)،

معنــــــــــاه : $t_1 + t_2 = 3h30min$

و منــــــــــه : $t_1 + t_2 = 210$

نحصل على الجملة :

$$\begin{cases} 4t_1 - 3t_2 = 0 \\ t_1 + t_2 = 210 \end{cases}$$

من المعادلة الثانية: $t_1 + t_2 = 210$ ينتج أن : $t_1 = 210 - t_2$

نعوض في المعادلة الأولى t_1 بـ $210 - t_2$

فنجــــــــــد : $4(210 - t_2) - 3t_2 = 0$

و منه : $840 - 4t_2 - 3t_2 = 0$ و منه : $-7t_2 = -840$

و منــــــه : $t_2 = 120$

نعوض قيمة t_2 بـ120 في المعادلة $t_1 = 210 - t_2$

فنجـــــــد : $t_1 = 210 - 120 = 90$

بالتالي فإن الوقت المستغرق في الذهاب هو 90 دقيقة أي $1h30min$ ، و الوقت المستغرق في الإياب هو 120 دقيقة أي $2h$

التمرين الحادي عشر : الجزائر 2020/ الدور الجهوي

خلال حفل عشاء قدم الأكل للضيوف بالكيفية التالية :

- صحن كسكس لكل 4 ضيوف
- صحن شربة لكل ضيفين
- طبق فاكهة لكل 3 ضيوف

ما هو عدد الضيوف إذا كان عدد الصحون و الأطباق المستعملة هو 65؟

الحل :

لاحظ أن 4 مضاعفا لـ2، لذا لكل 4 ضيوف يقدم لهم صحن واحد من الكسكس و صحنين من الشربة، لكن يقع إشكال في تقسيم أطبقا الفاكهة لأن 4 ليس مضاعفا لـ3 ، و بالتالي نلجأ إلى حساب المضاعف المشترك الأصغر لـ4، 2 و 3:

لاحظ أن : $12 = 3 \times 4$ و $12 = 6 \times 2$ و $12 = 4 \times 3$ و بالتالي فإن المضاعف المشترك الأصغر لـ4، 2 و 3 هو 12

و منه : عدد صحون الكسكس لـ12 ضيفا هو 3

عدد صحون الشربة لـ12 ضيفا هو 6

عدد أطباق الفاكهة لـ12 ضيفا هو 4

و بالتالي عدد الصحون و الأطباق المستعملة لـ12 ضيفا هو $13 = 3 + 6 + 4$

تترجم هذه الوضعية بجدول التناسبية الأتي :

عدد الضيوف	12	x
عدد الصحون و الأطباق	13	65

$$x = \frac{65 \times 12}{13} = \frac{780}{13} = 60$$

إذن عدد الضيوف إذا كان عدد الصحون و الأطباق المستعملة 65 هو 60 ضيفا

التمرين الثاني عشر : الأردن 2001

مستطيل إذا زاد عرضه $6m$ و نقص طوله $8m$ لما تغيرت مساحته، و إذا زاد عرضه بـ $\frac{1}{8}$ طوله و نقص طوله بـ $\frac{2}{5}$ عرضه لأصبح الشكل مربعا.

$\Leftarrow$ أوجد كلا من طول و عرض هذا المستطيل

الحل :

ليكن x طول هذا المستطيل و y عرضه.

إذا زاد عرضه $6m$ و نقص طوله $8m$ لما تغيرت مساحته

معناه : $(x-8)(y+6) = xy$

معناه : $xy + 6x - 8y - 48 = xy$

معناه : $6x - 8y - 48 = 0$

معناه : $6x - 8y = 48$ ………………… **(1)**

إذا زاد عرضه بـ $\frac{1}{8}$ طوله و نقص طوله بـ $\frac{2}{5}$ عرضه لأصبح الشكل مربعا

معناه : $\left(x - \frac{2}{5}y\right) = \left(y + \frac{1}{8}x\right)$

معناه : $x - \frac{1}{8}x - \frac{2}{5}y - y = 0$

معناه : $\frac{7x}{8} - \frac{7y}{5} = 0$ معناه : $\frac{35x}{40} - \frac{56y}{40} = 0$

معناه : $\frac{35x-56y}{40} = 0$ معناه : $7(5x - 8y) = 0$

معناه : $5x - 8y = 0$ ....(2)

بطرح طرفا لطرف المعادلة (2) من (1) نجد :

$$6x - 8y - 5x - (-8y) = 48$$

و منه : $6x - 5x - 8y + 8y = 48$ و بالتــــــــــــــــــــالي :

$$x = 48$$

بتعويض قيمة x بـ40 في إحدى المعادلتين نجـــــــــــــــــــد : $y = 30$

إذن طول هذا المستطيل هو $48m$ و عرضه هو $30m$

التمرين الثالث عشر : فرنسا 2020

يبلغ قطر العجلة الأمامية لدراجة من القرن التاسع عشر $80cm$ و يبلغ قطر العجلة الخلفية لها $50cm$.

⇐ ما هي المسافة المقطوعة من طرف هذه الدراجة إذا علمت أن العجلة الخلفية قامت بـ78 دورة أكثر من العجلة الأمامية؟

الحل :

نسمي D المسافة المقطوعة من طرف الدراجة، N عدد مرات دوران العجلة الأمامية و n عدد مرات دوران العجلة الخلفية.

نعلم أن المسافة التي قطعتها الدراجة مساوية للمسافة التي قطعتها العجلة الأمامية و مساوية أيضا للمسافة التي قطعتها العجلة الخلفية، بعد الدورة الواحدة تقطع العجلة مسافة مساوية لمحيطها و بالتالي :

$$D = N \times \pi \times 80 = n \times \pi \times 50$$

معناه : $80N = 50n$

حسب نص التمرين العجلة الخلفية قامت بـ78 دورة زيادة عن العجلة الأمامية يعني أن :

$$n = 78 + N$$

و منه : $80N = 50(78 + N)$ أي : $80N = 3900 + 50N$

أي : $30N = 3900$ وبالتالي : $N = 130$

و عليه فإن المسافة المقطوعة من طرف هذه الدراجة هي :

$$D = N \times \pi \times 80 = 130 \times 3{,}14 \times 80$$
$$D = 32656$$

إذن المسافة التي قطعتها هذه الدراجة هي $32656cm$ أي $326{,}56m$

التمرين الرابع عشر : السعودية 2006

المتوسط الحسابي لأربعة أعداد هو 205، قمنا باستبدال أحد هذه الأعداد بالعدد 99 فأصبح المتوسط الحسابي 200.

⇐ ما هو العدد الذي تم استبداله

الحل :

لتكن الأعداد a، b، c و m

المتوسط الحسابي لهذه الأعداد هو 205 يعني أن :

$$\frac{a + b + c + m}{4} = 205$$

معناه : $a + b + c + m = 820$ ....(1)

نفرض أن العدد الذي قمنا باستبداله بـ99 هو العدد m يعني أن :

$$\frac{a + b + b + 99}{4} = 200$$

معناه : $a + b + c + 99 = 800$

معناه : $a + b + c = 800 - 99$

منعاه : $a + b + c = 701$ ....(2)

بطرح المعدلة (2) من المعادلة (1) نجـــــــــد :

$$a + b + c + d - a - b - c = 820 - 701$$

$$d = 119$$

و منه العدد الذي قمنا باستبداله هو 119

التمرين الخامس عشر : أمريكا 2008

x و y عددين حقيقيين موجبين تماما حيث :

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ و } x^4 + y^4 = \frac{17}{18}$$

⇐ جد قيمة الجداء xy

الحل :

لدينا : $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$

و منه : $1 = \frac{17}{18} + 2x^2y^2$

و منه : $2x^2y^2 = 1 - \frac{17}{18}$ أي : $2x^2y^2 = \frac{18}{18} - \frac{17}{18}$

أي : $2x^2y^2 = \frac{1}{18}$

$$\boxed{x^2y^2 = (xy)^2}$$

و منه : $x^2y^2 = \frac{1}{18} \div 2$ أي : $x^2y^2 = \frac{1}{36}$

و منه : $xy = \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{\sqrt{36}}$ أي : $xy = \frac{1}{6}$

الفهرس